DOI:10.11721/cqnuj20130617

# 边界分红策略下跳-扩散风险过程的最优投资*

杨　鹏
(西安学院 基础部，西安 710123)

**摘要**:研究了当分红边界给定时，跳扩散风险过程的最优投资和最优红利问题。假设红利支付策略是边界分红策略，也就是当盈余超出一常数边界，超出部分立即作为红利支出，否则没有红利支出。保险人可以在风险资产和无风险资产上投资。研究了当分红边界给定时，跳扩散风险过程的最优投资策略和最优红利。当理赔为一些特殊分布时，给出了计算最优投资策略和最优红利的方法，分别为 $A_n=\frac{u-r_o}{\sigma^2}\sqrt{W_n}-\frac{\rho\beta}{\sigma}$, $v_n\approx\overset{n}{\underset{i=0}{\geq}}u_ih$。

**关键词**:跳扩散风险过程;边界分红;投资;Hamilton-Jacobi-Bellman 方程;随机控制
**中图分类号**:O211.3;F830　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2013)06-92-06

在保险实务中，由于竞争激烈，当保险公司的盈余达到一定水平时，保险公司将降低保费或将盈余的一部分作为红利分给保单持有者。因此为了更好地描述保险公司的现金流，需在保险风险模型中考虑分红。De Yang 和 Zhang [1]对跳扩散风险过程，考虑了投资和破产概率，得到了破产概率的数值解。自 Finetti[2]研究了分红问题起，很多学者都研究了分红问题，如 Lin et al[3] Greber 和 Shiu[4]。特别感兴趣的是两种依赖盈余的红利策略。一是常数边界分红策略，对于常数边界分红策略，当盈余低于一个常数边界时没有分红;当盈余高于这个常数边界时，高出部分全部作为红利分出。另外一种分红策略是阀值分红策略，当盈余低于一个常数边界时没有分红;当盈余高于这个常数边界时，只是把盈余的一部分作为红利分出。Jeanblanc-Picqué 和 Shiryaev[5]，A Smussen 和 M. Taksar[6]研究了这种类型的分红。

目前很少有文献在红利问题中考虑投资。林祥和杨鹏[7]研究了扩散风险模型下投资和再保险对红利的影响。因此对跳-扩散风险模型，找到使得红利最大的投资和再保险策略，无论在理论上，还是在保险实务中，都有着非常重要的意义。因此本文，对于跳-扩散风险模型，综合考虑投资和分红，分红方式为边界分红，给出了红利和投资策略的计算方法。

## 1 模型和 HJB 方程

为了使数学上更为严格，假设所有的随机过程和随机变量都定义在完备的概率空间 $(\Omega,F,P)$ 上，并且有一满足通常条件的 $\sigma$一流 $\{F_t,t\geqslant0\}$，即 $F_t$ 右连续且 $P$ 完备。允许连续交易，不考虑交易费用和税收，且所有资产都是无穷可分的。

考虑如下的跳-扩散风险模型

$$\mathrm{d}X_t=\alpha\mathrm{d}t+\beta\mathrm{d}W_t^1-\mathrm{d}\sum_{i=1}^{N_1t}Y_k \tag{1}$$

其中 $\alpha>0$ 是保险公司单位时间的保费收入;$\{Y_k,k=1,2,\cdots\}$是一列独立同分布的(严格)正值随机变量，共同分布为 $F(y)$，密度函数为 $f(y)$，$F(0)=0$，$Y_k$ 表示第 $k$ 次赔付的大小;$\{N_1(t),t\geqslant0\}$是参数为 $\lambda_1>0$ 的泊松过程，表示到时刻 $t$ 为止的总的索赔发生次数;$\{W_t^1,t\geqslant0\}$是标准的布朗运动，$\beta\geqslant0$ 是常数，表示扩散变差参数。此外，假设$\{Y_k,k=1,2,\cdots\}$，$\{N(t),t\geqslant0\}$和$\{W_t^1,t\geqslant0\}$之间是相互独立的。$\{X_t,t\geqslant0\}$为保险公司在 $t$ 时刻的盈余。

考虑一个金融市场，由 2 个金融资产组成，其中一个是无风险资产(债券)，时刻 $t$ 的价格$\{B_t,t\geqslant0\}$满足下面

---

* 收稿日期:2012-12-01　　网络出版时间:2013-11-20 14:46
资助项目:国家自然科学基金(No. 10901164);西京学院校级科研项目(No. XJ120106,XJ120109)
作者简介:杨鹏，男，讲师，硕士，研究方向为金融数学、保险精算，E-mail: yangpeng511@163.com
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20131120.1446.201306.92_044.html

的方程
$$dB_t = r_0 B_t dt$$
其中 $r_0 > 0$ 为无风险利率。风险资产(股票)，在时刻 $t$ 时的价格 $P(t)$ 满足下面的随机微分方程
$$dP(t) = \mu P(t)dt + \sigma P(t)dW_t^2$$
其中 $\mu \geqslant r_0 > 0$，$\sigma > 0$ 为常数，$\{W_t^{(2)}: t \geqslant 0\}$ 是标准布朗运动，假设布朗运动 $W_t^{(1)}$ 和 $W_t^{(2)}$ 的相关系数为 $\rho$，即 $E[W_t^{(1)} W_t^{(2)}] = \rho t$。

在任何时间 $t$，保险公司选择投资策略 $A(t)$ 作为控制变量，一旦 $A(t)$ 给定，则 $t$ 时刻，保险公司的财富过程为
$$dX(t,A) = A(t)\frac{dP(t)}{P(t)} + (X_t - A_t)\frac{dB(t)}{B(t)} + dX(t) =$$
$$[(\mu - r_0)A_t + r_0 X_t + \alpha]dt + \beta dW_t^{(1)} + \sigma A_t dW_t^{(2)} - d\sum_{i=1}^{N_1 t} Y_k \tag{2}$$

如果 $A(t)$ 关于 $\{F_t, t \geqslant 0\}$ 可料，且 $A(t)$ 满足条件 $p\left\{\int_0^T A^2(t)\,dt < \infty\right\} = 1$，对于所有 $T < \infty$。则称 $A(t)$ 是可行策略。

下面考虑边界分红，假设保险公司支付红利以一个常数 $b > 0$ 来控制。当盈余低于 $b$ 时没有红利支付；当盈余高于 $b$ 时，高出的部分全部作为红利支付。对 $t \geqslant 0$，设 $D(t)$ 为到时刻 $t$ 为止支付的总红利，则支付红利后，在时刻 $t$，保险公司的盈余 $\tilde{X}(t,A) = X(t,A) - D(t)$。

破产时刻定义为
$$T_b = \inf\{t > 0 : \tilde{X}(t,A) \leqslant 0\}$$
设 $\delta > 0$ 是红利贴现率，$D_{x,b}^A$ 为在初始盈余为 $x$，投资策略为 $A$ 时，到破产时刻 $T_b$ 为止所有红利现值，即
$$D_{x,b}^A = \int_0^{T_b} e^{-\delta t}\, dD(t) = \int_0^{T_b} e^{-\delta t} I\{\tilde{X}(t,A) > b\}\, dt$$

对 $x \geqslant 0$，用 $V^A(x,b)$ 表示 $D_{x,b}^A$ 的期望，即 $V^A(x,b) = E[D_{x,b}^A \mid \tilde{X}(0) = x]$
投资的目的是使期望红利最大，即找到最优的值函数(期望折现红利的最大值)
$$V(x,b) = \sup_A V^A(x,b) \tag{3}$$
以及最优的投资策略 $A^*$ 使得
$$V^{A^*}(x,b) = V(x,b) \tag{4}$$
由 Schmidli[8] 得到下面的定理。

**定理 1**　假设 $V(x,b)$ 是定义在 $R_+$ 上二次连续可微函数，则 $V(x,b)$ 满足下面的 HJB 方程
$$\sup_A\left\{\frac{1}{2}(A^2\sigma^2 + \beta^2 + 2\rho\sigma\beta A)V''(x;b) + [\alpha + r_0 x + A(\mu - r_0)]V'(x;b) - \right.$$
$$\left.(\lambda + \delta)V(x;b) + \lambda\int_0^x V(x-y;b)f(y)\,dy\right\} = 0, 0 < x < b \tag{5}$$
$$V(x;b) = x - b + V(b-;b), x \geqslant b \tag{6}$$
由 Schmidli[8] 方法，容易得到下面的检验定理。

**定理 2**　设 $W(x;b)$ 是定义在 $R_+$ 上递增二次连续可微的凹函数，是方程(5)和(6)的经典解，那么值函数 $V(x;b)$ 和 $W(x;b)$ 是一致的，也就是说 $W(x;b) = V(x;b)$。进一步，如果可行投资策略 $A^*$ 满足下面的方程
$$\sup_A\{\frac{1}{2}(A^{*2}\sigma^2 + \beta^2 + 2\rho\sigma\beta A^*)V''(x;b) + [\alpha + r_0 x + A^*(\mu - r_0)] \cdot$$
$$V'(x;b) - (\lambda + \delta)V(x;b) + \lambda\int_0^x V(x-y;b)f(y)\,dy\} = 0\ , 0 < x < b$$
则 $A^*$ 是最优投资策略，即 $W(x,b) = V(x,b) = V^{A^*}(x,b)$。

## 2 最优的投资策略

研究最优的投资策略和最优值函数 $V(x;b)$，给出它们满足的方程。当理赔为一些特殊分布时，给出它们的计算方法，并进一步给出经济分析。由(5)式
$$A^* = -\frac{\mu - r_0}{\sigma^2}\frac{V'(x;b)}{V''(x;b)} - \frac{\rho\beta}{\sigma} \tag{7}$$
把(7)式代入(5)式

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu-r_0}{\sigma}\right)^2\frac{(V'(x;b))^2}{V''(x;b)}+\left[\alpha+r_0x-\frac{(\mu-r_0)\rho\beta}{\sigma}\right]V'(x;b)+\frac{1}{2}\beta^2(1-\rho^2)V''(x;b)-$$
$$(\lambda+\delta)V(x;b)+\lambda\int_0^x V(x-y;b)f(y)\,\mathrm{d}y=0 \tag{8}$$

设 $R_0=\left(\frac{\mu-r_0}{\sigma}\right)^2$，$\bar\lambda=\frac{\lambda}{R_0}$，$\bar r_0=\frac{r_0}{R_0}$，$\bar\alpha=\frac{\alpha}{R_0}$，$\bar\beta^2=\frac{\beta^2}{R_0}$，$\bar\delta=\frac{\delta}{R_0}$，$\bar\gamma=\frac{\gamma}{R_0}$，$H(y)=1-F(y)$，$u(x)=V'(x;b)$，则(8)式变为

$$[\bar\alpha+\bar r_0x-\rho\bar\beta]u(x)+\frac{1}{2}\bar\beta^2(1-\rho^2)u'(x)-\bar\delta V(x;b)-\bar\lambda\int_0^x u(x-y)H(y)\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\frac{(u(x))^2}{u'(x)} \tag{9}$$

### 2.1 理赔为指数分布

假设理赔为指数分布，给出值函数、最优投资策略的计算方法。假设，理赔分布为 $f(y)=k\mathrm{e}^{-ky}$，则 $F(y)=1-\mathrm{e}^{-ky}$，$H(y)=\mathrm{e}^{-ky}$。设 $v(y)=u(y)\mathrm{e}^{ky}$ 则有

$$v'(y)=u'(y)\mathrm{e}^{ky}+kv(y),\ \frac{v'(y)-kv(y)}{v(y)}=\frac{u'(y)}{u(y)} \tag{10}$$

把(10)式代到(9)式

$$-\bar\delta V(s;b)\mathrm{e}^{ks}+[\bar\alpha+\bar r_0s-\rho\bar\beta]v(s)+\frac{1}{2}\bar\beta^2(1-\rho^2)(v'(s)-kv(s))-\bar\lambda\int_0^s v(y)\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\frac{(v(s))^2}{v'(s)-kv(s)} \tag{11}$$

设 $W(s)=\left[\frac{v(s)}{v'(s)-kv(s)}\right]^2$，则
$$\frac{1}{\sqrt{W(s)}}=\frac{kv(s)-v'(s)}{v(s)}=k-\frac{v'(s)}{v(s)} \tag{12}$$

把 $W(s)$ 代到(11)式，得到

$$-\bar\delta V(s;b)\mathrm{e}^{ks}+[\bar\alpha+\bar r_0s-\rho\bar\beta]v(s)+\frac{1}{2}\bar\beta^2(1-\rho^2)\frac{-v(s)}{\sqrt{W(s)}}-\bar\lambda\int_0^s v(y)\,\mathrm{d}y=-\frac{1}{2}v(s)\sqrt{W(s)} \tag{13}$$

上式两边对 $s$ 求导，求导后两边同除以 $v(s)$，则获得

$$-k\bar\delta\frac{V(s;b)}{V'(s;b)}-\bar\delta+(-\bar\lambda+\bar r_0)+[\bar\alpha+\bar r_0s-\rho\bar\beta]\frac{v'(s)}{v(s)}-\frac{1}{2}\bar\beta^2(1-\rho^2)\frac{\frac{v'(s)}{v(s)}\sqrt{W(s)}-\frac{1}{2}\frac{W'(s)}{\sqrt{W(s)}}}{W(s)}=$$
$$-\frac{1}{2}\frac{v'(s)}{v(s)}\sqrt{W(s)}-\frac{1}{4}\frac{W'(s)}{\sqrt{W(s)}} \tag{14}$$

设 $Z(s)=\frac{V(s;b)}{V'(s;b)}$，则 $Z(0)=0$，把(12)式和 $Z(s)$ 代到(14)式，得到

$$-k\bar\delta Z(s)-\bar\delta+[\bar\alpha+\bar r_0s-\rho\bar\beta]\left(k-\frac{1}{\sqrt{W(s)}}\right)-\frac{1}{2}\bar\beta^2(1-\rho^2)\frac{\left(k-\frac{1}{\sqrt{W(s)}}\right)\sqrt{W(s)}-\frac{1}{2}\frac{W'(s)}{\sqrt{W(s)}}}{W(s)}+$$
$$(-\bar\lambda+\bar r_0)=-\frac{1}{2}\left(k-\frac{1}{\sqrt{W(s)}}\right)\sqrt{W(s)}-\frac{1}{4}\frac{W'(s)}{\sqrt{W(s)}} \tag{15}$$

解得

$$W'(s)=[\bar\beta^2(1-\rho^2)+W(s)]^{-1}\Big\{-4(W(s))^{\frac{3}{2}}\left[-\bar\lambda+\bar r_0-\bar\delta+k(\bar\alpha+\bar r_0s-\rho\bar\beta)-k\bar\delta Z(s)-\frac{1}{2}\right]+$$
$$4\left[\bar\alpha+\bar r_0s-\rho\bar\beta+\frac{1}{2}k\bar\beta^2(1-\rho^2)\right]W(s)-2k(W(s))^2-2\bar\beta^2(1-\rho^2)\sqrt{W(s)}\Big\} \tag{16}$$

$$Z'(s)=\frac{(V'(s;b))^2-V(s;b)V''(s;b)}{(V'(s;b))^2}=1+\frac{Z(s)}{\sqrt{W(s)}} \tag{17}$$

因为
$$\sqrt{W(s)}=\frac{v(s)}{kv(s)-v'(s)}=-\frac{u(s)}{u'(s)}=-\frac{V'(s;b)}{V''(s;b)}=\frac{\sigma^2}{\mu-r_0}\left(A^*(s)+\frac{\rho\beta}{\sigma}\right)$$

所以
$$W_0=\left(\frac{\sigma^2}{\mu-r_0}\right)^2\left(A^*(0)+\frac{\rho\beta}{\sigma}\right)=\frac{\sigma^2\beta^2\rho^2}{(\mu-r_0)^2} \tag{18}$$

设 $W_n=W(nh)$，$Z_n=Z(nh)$，$u_n=u(nh)$，$A_n=A(nh)$，则(16)、(17)式离散化为

$$W_{n+1}=W_n+h\left[\bar{\beta}^2(1-\rho^2)+W_n\right]^{-1}\Big\{-4(W_n)^{\frac{3}{2}}\left[-\bar{\lambda}+\bar{r}_0-\bar{\delta}+k(\bar{\alpha}+\bar{r}_0nh-\rho\bar{\beta})-k\bar{\delta}Z_n-\frac{1}{2}\right]-2\bar{\beta}^2(1-\rho^2)\sqrt{W_n}\Big\}+4\left[\bar{\alpha}+\bar{r}_0nh-\rho\bar{\beta}+\frac{1}{2}k\bar{\beta}^2(1-\rho^2)\right]W_n-2k(W_n)^2。\tag{19}$$

$$Z_{n+1}=Z_n+h\left[1+\frac{Z_n}{\sqrt{W_n}}\right],Z_0=0\tag{20}$$

又因为$-\frac{u(s)}{u'(s)}=\sqrt{W(s)}$，所以 $u_{n+1}\approx u_n\left[1-\frac{1}{\sqrt{W_n}}\right]$，$u_0=1$。设 $V_n=V(nh;b)$，则 $V_n\approx\sum_{i=1}^{n}u_ih$，$A_n=\frac{\mu-r_0}{\sigma^2}\cdot\sqrt{W_n}-\frac{\rho\beta}{\sigma}$。

从上面的分析，可以求得值函数 $V(x;b)$ 和最优投资策略 $A^*(x)$。

**算例 1**　设 $b=0.5$，$\lambda=3$，$k=1$，$\alpha=3.6$，$\delta=0.06$，$r_0=0.04$，$\beta=0.1$，$\rho=-0.1$，$h=0.01$。则有表 1 和图 1、2。表 1 给出了值函数 $V(x;b)$ 的取值，图 1、2 给出了参数对投资策略 $A^*(x)$ 的影响。

**表 1　值函数 $V(x;b)$ 的取值**

| | $\sigma=0.1$ | | | $\mu=0.1$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\mu=0.1$ | $\mu=0.4$ | $\mu=0.5$ | $\sigma=0.1$ | $\sigma=0.5$ | $\sigma=0.9$ |
| $x=0.2$ | 0.0611 | 0.1664 | 0.1801 | 0.0611 | 0.0269 | 0.1328 |
| $x=0.3$ | 0.0888 | 0.2469 | 0.2677 | 0.0888 | 0.0449 | 0.1822 |
| $x=0.4$ | 0.1154 | 0.3260 | 0.3536 | 0.1154 | 0.0603 | 0.2229 |
| $x=0.5$ | 0.1411 | 0.4035 | 0.4380 | 0.1411 | 0.0737 | 0.2576 |

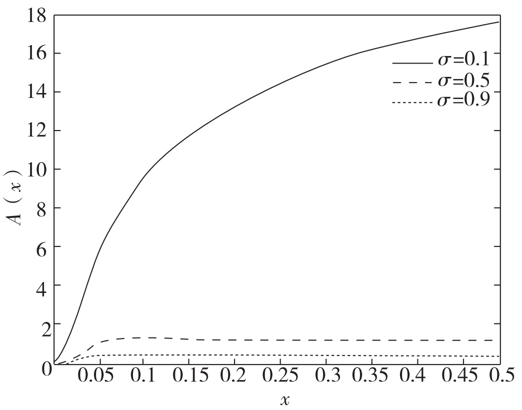


**图 1　理赔为指数分布，$\mu=0.1$**

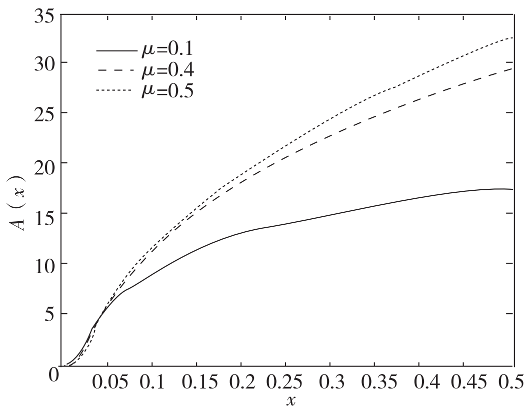


**图 2　理赔为指数分布，$\sigma=0.1$**

从图 1 看出，$\sigma$ 越大，$A^*(x)$ 越小；从图 2 看出 $\mu$ 越大，$A^*(x)$ 越大，这是与实际相符的。因为 $\sigma$ 代表风险资产的变差，$\sigma$ 越大说明风险越大，因此在风险资产上的投资额越少；$\mu$ 代表风险资产的利率，$\mu$ 越大投资者的预期收益越大，因此在风险资产上的投资额越多。

**2.2 理赔为 Pareto 分布**

假设理赔为 Pareto 分布，给出值函数、最优投资策略的计算方法。假设理赔额的分布密度为 $f(x)=\frac{ab^a}{(x+b)^{a+1}}$，$F(x)=1-\left(\frac{b}{x+b}\right)^a$，因此 $H(x)=\left(\frac{b}{x+b}\right)^a$，把上式代入 (9) 式，获得

$$-\bar{\delta}V(s;b)-\bar{\lambda}\int_0^s u(s-y)\left(\frac{b}{y+b}\right)^a\mathrm{d}y+[\bar{\alpha}+\bar{r}_0s-\rho\bar{\beta}]u(s)+\frac{1}{2}\bar{\beta}^2(1-\rho^2)u'(s)=\frac{1}{2}\frac{(u(s))^2}{u'(s)}\tag{21}$$

两边对 $s$ 求导，然后两边同时处以 $u'(s)$，有

$$-\bar{\delta}\frac{V'(s;b)}{V''(s;b)}-\frac{u'(s)}{}\int_0^s u'(s-y)\left(\frac{b}{y+b}\right)^a\mathrm{d}y-\bar{\lambda}\left(\frac{b}{s+b}\right)^a\frac{1}{u'(s)}+[\bar{\alpha}+\bar{r}_0s-\rho\bar{\beta}]+\bar{r}_0\frac{u(s)}{u'(s)}-\frac{1}{2}\bar{\beta}^2(1-\rho^2)\frac{1}{\sqrt{W(s)}}+\frac{1}{4}\bar{\beta}^2(1-\rho^2)\frac{u(s)}{u'(s)}\frac{W'(s)}{(\sqrt{W(s)})^3}=\frac{1}{2}\frac{(u(s))^2}{u'(s)}-\frac{1}{4}\frac{u(s)}{u'(s)}\frac{W'(s)}{\sqrt{W(s)}}\tag{22}$$

这里$\sqrt{W(s)}=-\frac{u(s)}{u'(s)}$，$\frac{V'(s;b)}{V''(s;b)}=-\sqrt{W(s)}$，由(22) 式解得

$$W'(s)=4W(s)\left[\bar{\beta}^2(1-\rho^2)+W(s)\right]^{-1}\Big\{\sqrt{W(s)}\left[-\bar{\lambda}m(s)+\bar{\lambda}\left(\frac{b}{s+b}\right)^a\frac{1}{u(s)}-\bar{r}_0+\bar{\delta}+\frac{1}{2}\right]-$$

$$\left.\frac{1}{2}\bar{\beta}^2(1-\rho^2)\frac{1}{\sqrt{W(s)}}+[\bar{\alpha}+\bar{r}_0 s-\rho\bar{\beta}]\right\} \tag{23}$$

其中 $m(s)=\int_0^s \frac{1}{\sqrt{W(s-y)}}\frac{u(s-y)}{u(s)}\left(\frac{b}{y+b}\right)^a \mathrm{d}y$ 。

设 $W_n=W(nh)$,$u_n=u(nh)$,$m_n=m(nh)$,$u_n=u(nh)$,$A_n=A(nh)$,则 $W(s)$ 和 $m(s)$,可离散化为

$$W_{n+1}=W_n+4h\{W_n\ [\bar{\beta}^2(1-\rho^2)+W_n]^{-1}\{\sqrt{W_n}[-\bar{\lambda}m_n+\bar{\lambda}\left(\frac{b}{nh+b}\right)^a\frac{1}{u_n}-\bar{r}_0+\bar{\delta}+\frac{1}{2}]-$$

$$\frac{1}{2}\bar{\beta}^2(1-\rho^2)\frac{1}{\sqrt{W_n}}+[\bar{\alpha}+\bar{r}_0 nh-\rho\bar{\beta}]\}\} \tag{24}$$

$$W_0=\left(\frac{\sigma^2}{\mu-r_0}\right)^2\left(A^*(0)+\frac{\rho\beta}{\sigma}\right)=\frac{\sigma^2\beta^2\rho^2}{(\mu-r_0)^2},u_{n+1}\approx u_n\left[1-\frac{1}{\sqrt{W_n}}\right],u_0=1,$$

$$m_n\approx\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{W_{n-i}}}\frac{u_{n-i}}{u_n}\left(\frac{b}{ih+b}\right)^a h,m_0=0 \tag{25}$$

设 $V_n=V(nh;b)$,则 $V_n\approx\sum_{i=0}^{n}u_i h$,$A_n=\frac{\mu-r_0}{\sigma^2}\sqrt{W_n}-\frac{\rho\beta}{\sigma}$。

从上面的分析,可以求得值函数 $V(x;b)$ 和最优投资策略 $A^*(x)$。

**算例 2** 设 $b=1$,$\lambda=3$,$k=1$,$\alpha=3.6$,$\delta=0.06$,$r_0=0.04$,$\beta=0.1$,$\rho=-0.1$,$h=0.01$, $a=3$, $b=2$。则有表2和图3、4。表2给出了值函数 $V(x;b)$ 的取值,图3、4给出了参数对投资策略 $A^*(x)$ 的影响。

**表 2 值函数 $V(x;b)$ 的取值**

| | $\mu=0.1$ | | | $\sigma=0.1$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\sigma=0.1$ | $\sigma=0.5$ | $\sigma=0.6$ | $\mu=0.1$ | $\mu=0.2$ | $\mu=0.3$ |
| $x=0.2$ | 0.063 2 | 0.125 2 | 0.148 9 | 0.063 2 | 0.140 6 | 0.157 7 |
| $x=0.3$ | 0.0934 | 0.186 5 | 0.222 5 | 0.093 4 | 0.200 5 | 0.206 9 |
| $x=0.4$ | 0.123 4 | 0.247 6 | 0.295 9 | 0.123 4 | 0.254 4 | 0.250 7 |
| $x=0.5$ | 0.153 2 | 0.308 4 | 0.369 2 | 0.153 2 | 0.304 2 | 0.390 7 |

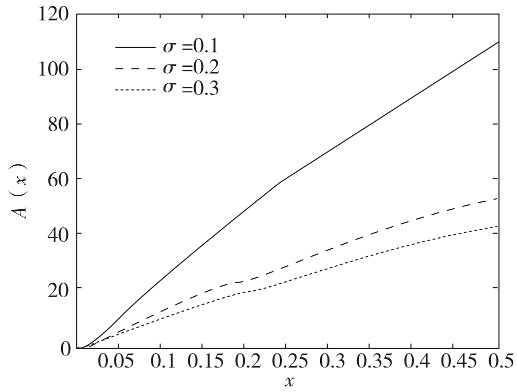


**图 3 理赔为 Pareto 分布, $\mu=0.1$**

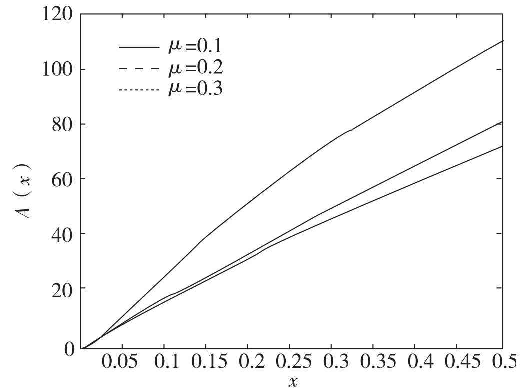


**图 4 理赔为 Pareto 分布, $\sigma=0.1$**

从图3可看出,$\sigma$ 越大,$A^*(x)$ 越小,和理赔为指数分布时,变化规律一样。从图4可看出,$\mu$ 和 $A^*(x)$ 之间没有明确的关系,这与理赔为指数分布时变化规律不同。因为,当理赔为 Pareto 分布,即重尾分布时,收益是不确定的,符合实际情况。

## 3 总结

本文,对于跳-扩散风险模型,考虑到边界分红策略,同时考虑了投资。通过应用 HJB 方程理论,得到了最优投资策略和值函数满足的方程。当理赔为指数和 Pareto 分布时,给出了最优投资策略和值函数的计算方法,并通过算例给出了值函数的数值解,且给出了一些参数对投资策略的影响。推广了林祥和杨鹏[7]的结果。

通过本文的研究,可以指导保险公司进行合理的分红和投资,并且使得财富最大。当然,本文也存在一些不足,如:没有给出理赔为一般分布时最优投资策略和值函数的显示解,在考虑投资时没考虑金融资产在交易时的

费用问题。这些不足,将是笔者以后研究的方向。

**参考文献:**

[1] Yang H,Zhang L. Optimal investment for insurer with jump-diffusion risk process[J]. Insurance: Mathematics and Economics ,2005,37(3):615-634.

[2] De Finetti B. Su un'impostazione alternativa dellteoria colletiva del rischio[J]. Transactions of the XV International Congress of Actuaries ,1957,2(1): 433-443.

[3] Lin X S,Willmot G E,Drekic S. The classical risk model with a constant dividend barrier[J]. Insurance: Mathematics and Economics ,2003,33(3):551-566.

[4] Gerber H U ,Shiu E S W. Optimal dividends: Analysis with Brownian motion[J]. North American Actuarial Journal ,2004,8 (1):1-20.

[5] Jeanblanc P,Shiryaev A N. Optimization of the flow of dividends[J]. Russian Mathematical Surveys ,1995,50(2): 257-277.

[6] Asmussen S,Taksa M. Controlled diffusion models for optimal dividend pay-out[J]. Insurance: Mathematics and Economics,1997,20(1):1-15.

[7] 林祥,杨鹏. 扩散风险摸型下投资和再保险对红利的影响[J]. 经济数学,2010,27(1):1-8.
Lin X,Yang P. The impacts of reinsurance and investment on the expected disounted dividendin diffusion risk model [J]. Mathematic in Economics,2010,27(1):1-8.

[8] Schmidli H. Stochastic control in insyrance[M]. London: Springer,2008.

[9] 杨鹏. 具有阈值分红策略的最优投资问题[J]. 统计与决策,2012,21:56-58.
Yang P. The problem of optimal investment with threshold dividend[J]. Tong Ji Yu Juece,2012,21:56-58.

## Under Barrier Dividend the Optimal Investment For Jump-Diffusion Risk Process

YANG Peng

(Department of Basic, Xijing College, Xi'an Shanxi 710123, China )

**Abstract**: In this paper, under barrier dividend is given, we consider optimal investment and optimal dividend for jump-diffusion risk process. We assume that the dividend paid policy is barrier strategy. That is, whenever the surplus exceed a constant barrier, the excess is paid out immediately as dividend; otherwise no dividends are paid. The insurer can invest in the money market and in a risk asset. When dividend barrier is given, we study the insurer's optimal investment policy and optimal dividend. In Yang and Zhang [1], they studied ruin probability for Jump-diffusion risk model with investment; obtain numerical results of ruin probability. In this paper, for special claim-size distribution, we had given the numerical calculation of the optimal investment policy and dividend. Meanwhile, we had given the affect of some parameters for dividend.

**Key words**: jump-diffusion risk process; barrier dividend; investment; Hamilton-Jacobi-Bellman equation; stochastic control

(责任编辑 欧红叶)