DOI:10.11721/cqnuj20130620

分担值与亚纯函数的正规族*

尚海涛

(华东交通大学理工学院 基础学科部,南昌 330100)

摘要:本文通过定义 $\mathfrak{R}_1=\{f_1=f-c;f\in\mathfrak{R}\}$,将 $\mathfrak{R}$ 在 Δ 上的正规转换为研究 $\mathfrak{R}_1$ 在 Δ 上的正规。运用文献[8]得到 $\mathfrak{R}_1$ 在 Δ 不正规的充分必要条件:存在点列 $z_j\in\Delta$,函数列 $f_{1j}\in\mathfrak{R}_1$ 和正数列 $\rho_j\to0^+$,使得 $g_j(\xi)=f_{1j}(z_j+\rho_j\xi)\to g(\xi)$,并且 $g(\xi)$ 是非常数亚纯函数,再运用分担值的定义和文献[9]中的不等式得到 $g(\xi)$ 又必为一个常数,通过反证推广了陈怀惠和方明亮的结果。设 $\mathfrak{R}$ 是区域 D 上的一族亚纯函数,k 是一不小于 2 的正整数,a,b,c 是有穷复数,$a\neq b$,如果对任意的 $f\in\mathfrak{R}$,$f-c$ 的零点重级至少是 k,并且 f 和 $f^{(k)}$ 在 D 分担 a 与 b,则 $\mathfrak{R}$ 在 D 上正规。

关键词:正规族;分担值;亚纯函数

中图分类号:O174.52　　**文献标志码:**A　　**文章编号:**1672-6693(2013)06-0106-03

1 引言及主要结果

本文使用亚纯函数的值分布理论的记号和概念(参见文献[1-4]),使用 Δ 复平面上的单位开圆盘,D 表示复平面上的一个区域,$f^{\#}(z)$表示 $f(z)$的球面导数。

设 f 为区域 D 上的亚纯函数,$a\in D$ 为有穷复数,定义:$\overline{E}_f(a)=\{z\in D:f(z)=a\}$,如果定义在区域 D 上的两个亚纯函数 f 和 g 满足 $\overline{E}_f(a)=\overline{E}_g(a)$,则称 f 和 g 在 D 上 IM 分担 a。有关分担值参见文献[2]。

定义　设 $\mathfrak{R}$ 为区域 D 上的一族亚纯函数,若对 $\mathfrak{R}$ 中的任一函数列 $f_n(z)(n=1,2,\cdots)$,都可选出一个子列 $f_{n_k}(z)(k=1,2,\cdots)$在区域 D 上按球距内闭一致收敛,则称 $\mathfrak{R}$ 在 D 内正规。

上述定义参见文献[1]。

Schwick 首先把分担值与正规族联系起来,证明了定理 1。

定理 1[3]　设 $\mathfrak{R}$ 为单位圆盘 Δ 上的亚纯函数族,a_1,a_2,a_3 为 3 个互为判别的有穷复数。如果任意的 $f\in\mathfrak{R}$,a_1,a_2,a_3 为 f 和 f' 在 Δ 上的 IM 分担值,则 $\mathfrak{R}$ 在 Δ 上正规。

徐焱证明了定理 2。

定理 2[4]　设 $\mathfrak{R}$ 为单位圆盘 Δ 上的全纯函数族,a 和 b 为两个互为判别的有穷复数。如果任意的 $f\in\mathfrak{R}$,a 与 b 为 f 和 f' 在 Δ 上的 IM 分担值,则 $\mathfrak{R}$ 在 Δ 上正规。

庞学诚和 Zalcman 证明了如下定理 3。

定理 3[5]　设 $\mathfrak{R}$ 为单位圆盘 Δ 上的亚纯函数族,a 和 b 为两个互为判别的有穷复数,c 为非零复数。如果任意的 $f\in\mathfrak{R}$,有

$$\overline{E}_f(0)=\overline{E}_{f'}(a),\overline{E}_f(c)=\overline{E}_{f'}(b)$$

则 $\mathfrak{R}$ 在 Δ 上正规。

黄小军证明了下述定理 4。

定理 4[6]　设 $\mathfrak{R}$ 为单位圆盘 Δ 上的亚纯函数族,k 是一正整数,a 和 b 为两个互为判别的有穷复数,c 为非零复数。如果任意的 $f\in\mathfrak{R}$,f 的零点重级至少是 k,并且

$$\overline{E}_f(0)=\overline{E}_{f^k}(a),\overline{E}_f(c)=\overline{E}_{f^k}(b)$$

则 $\mathfrak{R}$ 在 Δ 上正规。

陈怀惠和方明亮证明了如下定理 5。

* **收稿日期:**2012-12-17　**修回日期:**2013-03-02　**网络出版时间:**2013-11-20 14:46

作者简介:尚海涛,男,讲师,硕士,研究方向为复分析,E-mail:573185680@qq.com

网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20131120.1446.201306.106_047.html

定理 5[7] 设 $\mathfrak{R}$ 是区域 D 上的一族亚纯函数,k 是一不小于 2 的正整数,a,b,c 是有穷复数,$a\neq b$,如果对任意的 $f\in\mathfrak{R}$,$f-c$ 的零点重级至少是 $k+1$,并且 f 和 $f^{(k)}$ 在 Δ 上 IM 分担 a 与 b,则 $\mathfrak{R}$ 在 D 上正规。

自然地,很多人会问定理 5 中的条件 $f-c$ 的零点重级至少是 $k+1$ 是不是可以改成 k? 在本文中作者回答了这个问题,证明了定理 6。

定理 6 设 $\mathfrak{R}$ 是区域 D 上的一族亚纯函数,k 是一不小于 2 的正整数,a,b,c 是有穷复数,$a\neq b$,如果对任意的 $f\in\mathfrak{R}$,$f-c$ 的零点重级至少是 k,并且 f 和 $f^{(k)}$ 在 D 分担 a 与 b,则 $\mathfrak{R}$ 在 D 上正规。

2 引理

引理 1[8] 设 $\mathfrak{R}$ 为单位圆盘 Δ 上的亚纯函数族,k 是一正整数,且族 $\mathfrak{R}$ 中每个函数的零点重数至少为 k,则若 $\mathfrak{R}$ 在 Δ 内不正规的充要条件是存在

Ⅰ)复数列 $z_j\in\Delta$;

Ⅱ)函数列 $f_j\in\mathfrak{R}$;

Ⅲ)正数列 $\rho_j\to 0^+$。

使得 $g_j(z)=f_j(z_j+\rho_j z)\to g(z)$,按球面距离内闭一致收敛,这里的 $g(z)$ 是复平面 C 上的非常数亚纯函数且 $g^{(k)}(z)$ 不恒为 0。

引理 2[9] 设 f 是一亚纯函数,k 是一正整数,并且 $f^{(k)}(z)\neq 0$,则对任意的 $\varepsilon>0$,有

$$\overline{N}(r,f)\leqslant\frac{1}{k}N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}}\right)+\frac{1}{k}N(r,f)+\varepsilon T(r,f)+S(r,f)$$

3 定理的证明

无妨设 $D=\Delta$,令 $\mathfrak{R}_1=\{f_1=f-c;f\in\mathfrak{R}\}$,显然 $\mathfrak{R}$ 在 Δ 上正规当且仅当 $\mathfrak{R}_1$ 在 Δ 上正规。由已知条件易得:对任意的 $f_1\in\mathfrak{R}_1$,$\overline{E}(a-c,f_1)=\overline{E}(a,f_1{}^{(k)})$,$\overline{E}(b-c,f_1)=\overline{E}(b,f_1{}^{(k)})$。

假设 $\mathfrak{R}_1$ 在 Δ 不正规,据引理 1,有 $f_{1j}\in\mathfrak{R}_1$,$z_j\in\Delta$ 和 $\rho_j\to 0^+$,使得

$$g_j(\xi)=f_{1j}(z_j+\rho_j\xi)\to g(\xi)$$

按球面距离内闭一致收敛,这里的 $g(\xi)$ 是复平面 C 上的非常数亚纯函数且满足 $g^{(k)}(\xi)\neq 0$。可以断言 $g^{(k)}(\xi)\neq 0$,$g(\xi)\neq a-c$,$g(\xi)\neq b-c$。

事实上,假设 $g^{(k)}(\xi_0)=0$,因为 $g_j{}^{(k)}(\xi)-\rho_j{}^k a\to g^{(k)}(\xi)$ 和 $g^{(k)}(\xi)\not\equiv 0$,故存在 ξ_j,$\xi_j\to\xi_0$,使得

$$g_j{}^{(k)}(\xi_j)-\rho_j{}^k a=0\quad \text{i. e. }\ f_{1j}{}^{(k)}(z_j+\rho_j\xi_j)=a$$

由 $\overline{E}(a-c,f_1)=\overline{E}(a,f_1{}^{(k)})$,故 $f_{1j}(z_j+\rho_j\xi_j)=a-c$。

因此,$g(\xi_0)=\lim\limits_{j\to\infty}g_j(\xi_j)=a-c$。

同理可得 $g(\xi_0)=b-c$。

又 $a\neq b$ 知,矛盾,故 $g^{(k)}(\xi)\neq 0$。

现在,需证明 $g(\xi)\neq a-c$。假设存在点 ξ_0,使得 $g(\xi_0)=a-c$,由 $g(\xi)\not\equiv a-c$,由 Hurwitz 定理,存在点列 $\xi_j{}^*$,$\xi_j{}^*\to\xi_0$,满足 $f_{1j}(z_j+\rho_j\xi_j{}^*)=a-c$,由 $\overline{E}(a-c,f_1)=\overline{E}(a,f_1{}^{(k)})$,有 $\rho_j{}^k f_{1j}{}^{(k)}(z_j+\rho_j\xi_j{}^*)=\rho_j{}^k a$,令 $j\to\infty$,则有 $g^{(k)}(\xi_0)=0$,矛盾。

同理 $g(\xi)\neq b-c$。

根据 Nevanlinna 第二基本定理及引理 2,有

$$T(r,g)\leqslant\overline{N}(r,g)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{g-(a-c)}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{g-(b-c)}\right)+S(r,g)\leqslant\overline{N}(r,g)+S(r,g)\leqslant$$

$$\frac{1}{k}N\left(r,\frac{1}{g^{(k)}}\right)+\frac{1}{k}N(r,g)+\varepsilon T(r,g)+S(r,g)\leqslant\frac{1}{k}N(r,g)+\varepsilon T(r,g)+S(r,g)$$

取 $\varepsilon=\frac{1}{4}$,则 $T(r,g)\leqslant\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{4}\right)T(r,g)+S(r,g)$。又 $k\geqslant 2$,所以 $T(r,g)\leqslant O(1)S(r,g)$,因此 g 为一常数,矛盾,定理 6 得证。

参考文献：

[1] Gu Y X. The normal family of Meromorphic functions[M]. Sichuan:Sichuan Education Publishing House,1991.

[2] Yi H X, Yang C J. Uniqueness theory of Meromorphic functions[M]. Beijing:Science Press,1995.

[3] Schwick W. Sharing values and normality[J]. Arch Math (Basel),1992,59:50-54.

[4] Xu Y. Sharing values and normality criteria[J]. Acta Mathematica Sinica,1999,42(5):833-838.

[5] Pang X C,Zalcman L. Normality and shared values[J]. Ark Math,2000,38:171-182.

[6] Huang X J,Gu Y X. Normal families related to shared values[J]. Acta Mathematica Sinica,2002,45(5):925-928.

[7] Chen H H,Fang M L. Shared values and normal families of Mermorphic functions[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications,2001,260(7):124-132.

[8] Li S Y,Xie H C. On the normal family of Meromorphic functions[J]. Acta Mathematica Sinica,1986,27(4):468-476.

[9] Yang L. The exact inequality and defective number sums [J]. Science in China Ser A,1990,A:113-121.

[10] Jiang Y B. Normal families of a kind of holomorphic functions concerning derivatives[J]. Mathematics is Practice and Theory,2011,41(4):143-147.

[11] Wu C,Mu C L,Li,J T. Uniqueness of Meromorphic funcitons sharing one value[J]. Bull Aust Math Soc,2011,142 (3):24-29.

[12] Li J T,Sharing set and normal families of entire functions [J]. Results Math,2011,32(5):699-710.

[13] Zhang Q D,Qin C Y,Normal families and Shared values of Meromorphic function[J]. Acta Mathematica Sinica, 2008,51(1):145-152.

[14] Chang J M. Normality of Meromorphic functions and uniformly discrete exceptional sets[J]. Comput Methods Funct Theory,2013,13:47-63.

Sharing Values and the Normal Family of Meromorphic Functions

SHANG Hai-tao

(Department of Basic Sciences, Institute of Technology,

East China Jiaotong University, Nanchang Jiangxi 330100, China)

Abstract: In this paper, defining $\Re_1=\{f_1=f-c;\ f\in\Re\}$, Then $\Re$ is normal in Δ if and only $\Re_1$ is normal in Δ. By using the literature [8] to get a necessary and sufficient condition which $\Re_1$ is not normal in Δ: there exist complex points $z_j\in\Delta$, functions $f_{1j}\in\Re_1$ and positive numbers $\rho_j\to0^+$, such that $g_j(\xi)=f_{1j}(z_j+\rho_j\xi)\to g(\xi)$, where $g(\xi)$ is nonconstant. And then by using the definition of shared values and the literature [9] get $g(\xi)$ shall be a constant, that is a contradiction, promoting the results of Chen Huai-hui and Fang Ming-liang. Let $\Re$ be a family of mermorphic functions in a domain D, let $k\geqslant2$ be a positive integer, and a, b, c be distinct complex numbers. If for each $f\in\Re$, the zeros of $f(z)-c$ are of multiplicit $y\geqslant k$, and $\overline{E}_f(a)=\overline{E}_{f^{(k)}}(a)$, $\overline{E}_f(b)=\overline{E}_{f^{(k)}}(b)$, then $\Re$ is normal in D.

Key words: normal family ; shared values ; Mermorphic functions

(责任编辑　游中胜)