运筹学与控制论

DOI:10.11721/cqnuj20140103

一类伪不变凸极值问题解集的刻画*

陈　林[1]，苏文涛[2]，张莉洁[3]

(1. 四川大学 数学学院，成都 610065；2. 重庆师范大学 数学学院，重庆 401331；3. 中国石油西南管道公司，重庆 400021)

摘要: 有研究对可微的无约束伪不变凸极值问题的解集进行了刻画。本文在此基础上，在广义不变凸性假设下，利用广义 Clarke 梯度和 Lagrange 乘子研究了一类不可微的带约束的伪不变凸极值问题的一些性质。首先在广义 Clarke 梯度的基础上，给出了此类带约束的非可微伪不变凸极值问题的一些性质；然后在一定条件下证明了此类问题的可行集和最优解集是不变凸的；最后利用广义 Clarke 梯度和 Lagrange 乘子得到了最优解集的一些等价刻画。

关键词: 伪不变凸极值问题；广义 Clarke 梯度；Lagrange 乘子；解集刻画

中图分类号: O221.2　　**文献标志码:** A　　**文章编号:** 1672-6693(2014)01-0015-05

2009 年，杨新民对可微的无约束为不变凸极值问题的解集进行了刻画[1]。本文在此基础上，利用广义 Clarke 梯度和 Lagrange 乘子对一类不可微带约束的伪不变凸极值问题的解集进行了研究，并得到了一些结果。

1　预备知识

定义 1[2]　$\varphi: X\subset \mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 是局部 Lipschitz 函数，$v\in\mathbf{R}^n$，定义 $\varphi^0(x,v)$ 为 φ 在 x 处沿方向 v 的广义 Clarke 导数，且记为 $\varphi^0(x;v)=\lim\limits_{y\to x,\lambda\downarrow 0}\sup\dfrac{\varphi(y+\lambda v)-\varphi(y)}{\lambda}$。

定义 2[2]　$\varphi: X\subset \mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 是局部 Lipschitz 的。φ 在 $x\in X$ 处的广义 Clarke 梯度定义为 $\partial\varphi(x)$，并记为 $\partial\varphi(x)=\{\xi\in\mathbf{R}^n: \varphi^0(x;v)\geqslant \xi^{\mathrm{T}}v, \forall v\in\mathbf{R}^n\}$。

于是，$\varphi^0(x;v)=\max\{\langle\xi,v\rangle, \forall\xi\in\partial\varphi(x), \forall v\in\mathbf{R}^n\}$。

定义 3[3]　称 Γ 是关于 η 的不变凸集，若 $\forall x,y\in\Gamma$，$\forall\lambda\in[0,1]$，$y+\lambda\eta(x,y)\in\Gamma$。

定义 4[4]　$\eta:\Gamma\times\Gamma\to\mathbf{R}^n$，称 η 满足条件 C，若 $\forall x,y\in\Gamma$，$\lambda\in[0,1]$，则

$$\eta(y,y+\lambda\eta(x,y))=-\lambda\eta(x,y),\ \eta(x,y+\lambda\eta(x,y))=(1-\lambda)\eta(x,y)$$

定义 5[5]　称 f 满足条件 D，若 $\forall x,y\in\Gamma$，$f(y+\eta(x,y))\leqslant f(x)$。

定义 6[6]　集合 Γ 是关于 η 的不变凸集，称 f 在 Γ 上是径向上半连续的，若 $\forall x,y\in\Gamma$，$g(\lambda)=f(y+\lambda\eta(x,y))$ 在 $[0,1]$ 上是上半连续的。

定义 7[7]　函数 $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$，称为：1) 正齐次的，若 $\forall x\in\mathbf{R}^n$，$\forall r>0$，$f(rx)=rf(x)$；2) 次奇的，若 $\forall x\in\mathbf{R}^n\backslash\{0\}$，$f(x)+f(-x)\geqslant 0$。

定义 8[8]　集合 Γ 是关于 η 的不变凸集，称 $f:\Gamma\to\mathbf{R}$ 是关于 η 的伪不变凸函数，如果 $\forall x,y\in\Gamma$，$\forall\xi\in\partial f(x)$，$\langle\xi,\eta(x,y)\rangle\geqslant 0\Rightarrow f(x)\geqslant f(y)$，或者等价地 $f(x)<f(y)\Rightarrow\langle\xi,\eta(x,y)\rangle<0$。

考虑如下伪不变凸极值问题

$$\text{(P)}\quad \min f(x)$$
$$\text{s.t.}\ g_i(x)\leqslant 0, i=1,2,\cdots,p; x\in\Gamma$$

其中 $\eta:\Gamma\times\Gamma\to\mathbf{R}$ 是给定的向量值函数，集合 Γ 是关于 η 的不变凸集，$f:\Gamma\to\mathbf{R}$ 和 $g_i:\Gamma\to\mathbf{R}$ $(i=1,2,\cdots,p)$ 都是局部 Lipschitz 的关于 η 的伪不变凸函数。假设问题(P)的解集非空，记 $A:=\{x\in\Gamma: g_i(x)\leqslant 0, i=1,2,\cdots,p\}$，$S:=\arg\min\limits_{x\in A}f(x)$。

* 收稿日期：2012-12-18　修回日期：2013-11-24　网络出版时间：2014-01-16 08:16

资助项目：重庆市自然科学基金(No. CSTC2010BB2090)

作者简介：陈林，男，博士研究生，研究方向为优化理论及应用，E-mail: 470994736@qq.com

网络出版地址：http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20140116.0816.024.html

令 $I=\{1,2,\cdots,p\}$,$z\in S$,$\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_p)\in\mathbf{R}^p$ 是最优解 z 对应的 Lagrange 乘子,$I(z)=\{i\in I:g_i(z)=0\}$;$\tilde{I}(z)=\{i\in I(z):\lambda_i>0\}$。

2 问题(P)的一些性质

引理 1[9] 集合 Γ 是关于 η 的不变凸集,$f:\Gamma\to\mathbf{R}$ 是关于 η 的预拟不变凸函数当且仅当 f 的下水平集是关于 η 的不变凸集。

引理 2 集合 Γ 是关于 η 的不变凸集,$f:\Gamma\to\mathbf{R}$ 是关于 η 的预拟不变凸函数,则 $\forall x,y\in\Gamma$,$\forall\xi\in\partial f(y)$,$f(x)\leqslant f(y)\Rightarrow\langle\xi,\eta(x,y)\rangle\leqslant 0$。

证明 假设 $\forall x,y\in\Gamma$,$f(x)\leqslant f(y)$。因为 $f:\Gamma\to\mathbf{R}$ 是关于 η 的预拟不变凸函数,故

$$\forall\lambda\in[0,1],f(y+\lambda\eta(x,y))\leqslant\max\{f(x),f(y)\}\leqslant f(y)$$

又因为 f 在 Γ 上是局部 Lipschitz 的,于是对任意充分小的 $\varepsilon>0$ 有

$$f^0(y;\eta(x,y))=\lim_{z\to y}\sup_{\lambda\downarrow 0}\frac{f(z+\lambda\eta(x,y))-f(z)}{\lambda}\leqslant\lim\sup_{\lambda\downarrow 0}\frac{f(y+\lambda\eta(x,y))-f(y)}{\lambda}+\varepsilon\leqslant\varepsilon$$

由 ε 的任意性可知,$f^0(y;\eta(x,y))\leqslant 0$,而注意到 $\varphi^0(x;v)=\max\{\langle\xi,v\rangle,\forall\xi\in\partial\varphi(x),\forall v\in\mathbf{R}^n\}$。进而有 $\forall\xi\in\partial f(y)$,$\langle\xi,\eta(x,y)\rangle\leqslant 0$。 证毕

引理 3 集合 Γ 是关于 η 的不变凸集,η 满足条件 C。$f:\Gamma\to\mathbf{R}$ 是关于 η 的伪不变凸函数且满足条件 D,则 $f:\Gamma\to\mathbf{R}$ 是关于 η 的预拟不变凸函数。

证明 假设 $f:\Gamma\to\mathbf{R}$ 不是关于 η 的预拟不变凸函数,则 $\exists x,y\in\Gamma$,$\exists\lambda\in[0,1]$,使得 $f(y+\lambda\eta(x,y))>\max\{f(x),f(y)\}$。

不失一般性,假设 $f(x)\leqslant f(y)$,并且记 $z=y+\lambda\eta(x,y)$,则显然

$$f(x)\leqslant f(y)<f(z)\tag{1}$$

于是由(1)式和 f 关于 η 的伪不变凸性,有

$$\forall\xi\in\partial f(z),\langle\xi,\eta(x,z)\rangle<0\tag{2}$$

又由 η 满足条件 C 可知,$\eta(x,z)=(1-\lambda)\eta(x,y)$,$\eta(y,z)=-\lambda\eta(x,y)$。结合这两式有

$$\eta(x,z)=-\frac{1-\lambda}{\lambda}\eta(y,z)\tag{3}$$

由(2)、(3)式易知

$$\forall\xi\in\partial f(z),\langle\xi,\eta(y,z)\rangle>0\tag{4}$$

令 $\bar{z}=z+\mu\eta(y,z)$,$\mu\in(0,1)$,一定有

$$f(\bar{z})>f(z)>f(y)\tag{5}$$

否则,$\exists\mu\in(0,1)$,使 $f(\bar{z})\leqslant f(z)$,亦即 $f(z+\mu\eta(y,z))\leqslant f(z)$。由引理 2,有

$$\forall\xi\in\partial f(z),\langle\xi,\eta(z+\mu\eta(y,z),z)\rangle\leqslant 0\tag{6}$$

再由 η 满足条件 C 可知 $\eta(z+\mu\eta(y,z),z)=\mu\eta(y,z)$。于是由(6)式有 $\langle\xi,\eta(y,z)\rangle\leqslant 0$。这显然与(4)式矛盾,又由(5)式和 f 关于 η 的伪不变凸性,$\forall\zeta\in\partial f(\bar{z})$,有

$$\langle\zeta,\eta(z,\bar{z})\rangle<0\tag{7}$$

$$\langle\zeta,\eta(y,\bar{z})\rangle<0\tag{8}$$

注意到 η 满足条件 C,有 $\eta(y,\bar{z})=(1-\mu)\eta(y,z)$,$\eta(z,\bar{z})=-\mu\eta(y,z)$。于是由(7)、(8)式分别可得 $\langle\zeta,\eta(y,z)\rangle>0$ 和 $\langle\zeta,\eta(y,z)\rangle<0$,矛盾。 证毕

引理 4 对问题(P),假设 η 满足条件 C,$g_i(i\in I)$ 满足条件 D,则 A 是关于 η 的不变凸集。

证明 $g_i(i\in I)$ 是关于 η 的伪不变凸函数,由引理 3 可知,$g_i(i\in I)$ 是关于 η 的预拟不变凸函数,再由引理 1 可知,$\forall i\in I$,$A_i=\{x\in\Gamma:g_i(x)\leqslant 0\}$ 是关于 η 的不变凸集。于是 $A=\bigcap_{i=1}^{p}A_i$ 是关于 η 的不变凸集。 证毕

定理 1 对问题(P),假设 η 满足条件 C,$g_i(i\in I)$ 满足条件 D。此外假设满足适当的约束规格。则 $z\in S$ 当且仅当存在 Lagrange 乘子 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_p)\in\mathbf{R}^p$,使得

$$0\in\partial f(z)+\sum_{i\in I}\lambda_i\partial g_i(z)\tag{9}$$

$$\lambda_i\geqslant 0,\lambda_i g_i(z)=0,\forall i\in I\tag{10}$$

证明 必要性在文献[2]中已经由 Clarke 给出。下面证明充分性,假设(9)、(10)式满足,证明 $z\in S$。设 $\exists\bar{z}\in$

A，使 $f(\bar{z})<f(z)$。由 f 关于 η 的伪不变凸性，有

$$\forall\, \xi\in \partial f(z),\langle \xi,\eta(\bar{z},z)\rangle<0 \tag{11}$$

由(9)式有

$$\exists\, \hat{\xi}\in \partial f(z),\exists\, \hat{\eta}_i\in \partial g_i(z)(i\in I),\text{s. t.}\langle \hat{\xi},\eta(\bar{z},z)\rangle+\sum_{i\in I}\lambda_i\langle \hat{\eta}_i,\eta(\bar{z},z)\rangle=0 \tag{12}$$

由(11)、(12)式，显然

$$\sum_{i\in I}\lambda_i\langle \hat{\eta}_i,\eta(\bar{z},z)\rangle>0 \tag{13}$$

另一方面，由(10)式，对 $\forall\, i\in I(z)$，显然 $g_i(\bar{z})\leqslant 0=g_i(z)$。由 $g_i(i\in I)$ 关于 η 的伪不变凸性、引理 3 及引理 2，有 $\forall\, \eta_i\in \partial g_i(z),i\in I(z),\langle \eta_i,\eta(\bar{z},z)\rangle\leqslant 0$。于是，有 $\sum\limits_{i\in I(z)}\lambda_i\langle \eta_i,\eta(\bar{z},z)\rangle\leqslant 0,\forall\, \eta_i\in \partial g_i(z)$。由(10)式有 $\sum\limits_{i\in I}\lambda_i\langle \eta_i,\eta(\bar{z},z)\rangle\leqslant 0,\forall\, \eta_i\in \partial g_i(z)$。特别地，$\sum\limits_{i\in I}\lambda_i\langle \hat{\eta}_i,\eta(\bar{z},z)\rangle\leqslant 0$，这与(13)式矛盾。　　证毕

定理 2　对问题(P)，假设 η 满足条件 C，$g_i(i\in I)$ 满足条件 D，则解集 S 是关于 η 的不变凸集。

证明　$\forall\, x,y\in S$，显然 $x,y\in A$ 且 $f(x)=f(y)$。$\forall\lambda\in[0,1]$，令 $z=y+\lambda\eta(x,y)$，由引理 4 易知 $z\in A$。又由 f 关于 η 的伪不变凸性和引理 3 可知，$f(z)=f(y+\lambda\eta(x,y))\leqslant\max\{f(x),f(y)\}=f(x)$。因此，$z\in S$。　　证毕

定理 3　对问题 (P)，假设 η 满足条件 C，$g_i(i\in I)$ 满足条件 D，$z\in S$，存在 Lagrange 乘子 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_p)\in \mathbf{R}^p$，使得(9)、(10) 式成立，则 $\forall\, x\in S,\sum\limits_{i\in I(z)}\lambda_i g_i(x)=0$；并且在 S 上 $f(\cdot)+\sum\limits_{i\in I(z)}\lambda_i g_i(\cdot)$ 是常值。

证明　只需证 $\forall\, x\in S,\sum\limits_{i\in I(z)}\lambda_i g_i(x)=0$ 即可。事实上，如果 $\tilde{I}(z)=\varnothing$，结论显然成立。如果 $\tilde{I}(z)\neq\varnothing$，显然 $\forall\, x\in S,\sum\limits_{i\in I(z)}\lambda_i g_i(x)=0\Leftrightarrow\sum\limits_{i\in \tilde{I}(z)}\lambda_i g_i(x)=0$。易证，$\forall\, x\in S,i\in \tilde{I}(z),g_i(x)=0$，故 $\sum\limits_{i\in \tilde{I}(z)}\lambda_i g_i(x)=0$。否则，设 $\exists\, i_0\in \tilde{I}(z),\hat{x}\in S$，使得 $g_{i_0}(\hat{x})<0$。因此，$g_{i_0}(\hat{x})<0=g_{i_0}(z)$. 由 g_{i_0} 关于 η 的伪不变凸性，有

$$\forall\, \eta_{i_0}\in\partial g_{i_0}(z),\langle \eta_{i_0},\eta(\hat{x},z)\rangle<0 \tag{14}$$

此外，对 $i\in\tilde{I}(z)\backslash\{i_0\},g_i(\hat{x})<0=g_i(z)$，由 $g_i(i\in\tilde{I}(z)\backslash\{i_0\})$ 关于 η 的伪不变凸性、引理 3 和引理 2，有

$$\forall\, \eta_i\in\partial g_i(z)(i\in\tilde{I}(z)\backslash\{i_0\}),\langle \eta_i,\eta(\hat{x},z)\rangle\leqslant 0 \tag{15}$$

由(14)、(15)式可知

$$\sum_{i\in\tilde{I}(z)}\lambda_i\langle \eta_i,\eta(\hat{x},z)\rangle<0 \tag{16}$$

另一方面，由(9)式知，$\exists\,\hat{\xi}\in\partial f(z),\hat{\eta}_i\in\partial g_i(z)(i\in\tilde{I}(z))$，使得

$$\langle \hat{\xi},\eta(\hat{x},z)\rangle+\sum_{i\in\tilde{I}(z)}\lambda_i\langle \hat{\eta}_i,\eta(\hat{x},z)\rangle=0 \tag{17}$$

因此，由(16)、(17)式有

$$\langle \hat{\xi},\eta(\hat{x},z)\rangle>0 \tag{18}$$

对 $\hat{x}\in S,f(\hat{x})=f(z)$，由 f 关于 η 的伪不变凸性、引理 3 和引理 2 可知，$\forall\,\xi\in\partial f(z),\langle \xi,\eta(\hat{x},z)\rangle\leqslant 0$。这与(18)式矛盾。　　证毕

3　问题(P)的解集刻画

下面利用 Clarke 次梯度和 Lagrange 乘子对问题(P)的解集进行了刻画。这些结果可用于寻找问题(P)的所有最优解，本节始终假设定理 3 的条件满足，并且记

$$\Gamma_1=\{x\in\Gamma:g_i(x)=0,\forall\, i\in\tilde{I}(z);g_i(x)\leqslant 0,\forall\, i\in I\backslash\tilde{I}(z)\}$$

$$\Gamma_2=\{x\in\Gamma:g_i(x)\leqslant 0,\forall\, i\in I\backslash\tilde{I}(z)\},C(z)=\{\xi\in\partial f(z):\langle \xi,\eta(x,z)\rangle\geqslant 0\}$$

定理 4　对问题(P)，$z\in S$，假设 $S_1=\{x\in\Gamma_1:\exists\,\zeta\in\partial f(x),\langle \zeta,\eta(z,x)\rangle=0\}$，$S_2=\{x\in\Gamma_1:\exists\,\zeta\in\partial f(x),\langle \zeta,\eta(z,x)\rangle\geqslant 0\}$，$S_3=\{x\in\Gamma_1:\exists\,\xi\in C(z),\zeta\in\partial f(x),\langle \xi,\eta(x,z)\rangle=\langle \zeta,\eta(z,x)\rangle\}$，$S_4=\{x\in\Gamma_1:\exists\,\xi\in C(z),\zeta\in\partial f(x),\langle \xi,\eta(x,z)\rangle\leqslant\langle \zeta,\eta(z,x)\rangle\}$，$S_5=\{x\in\Gamma_1:\exists\,\xi\in C(z),\zeta\in\partial f(x),\langle \xi,\eta(x,z)\rangle=\langle \zeta,\eta(z,x)\rangle=0\}$，则 $S=S_1=S_2=S_3=S_4=S_5$。

证明 显然，$S_5\subseteq S_1\subseteq S_2$，$S_5\subseteq S_3\subseteq S_4$。故只需证明 $S\subseteq S_5$，$S_2\subseteq S$，$S_4\subseteq S$。

首先证 $S\subseteq S_5$。$\forall x\in S$，因为满足定理3的条件，故有 $\sum_{i\in I(z)}\lambda_i g_i(x)=0$。进而，$g_i(x)=0$，$\forall i\in\tilde{I}(z)$；$g_i(x)\leqslant 0$，$\forall i\in I\backslash\tilde{I}(z)$。因为 $z\in S$，$x\in S$，由定理2可知，对 $\forall\lambda\in[0,1]$，有 $x+\lambda\eta(z,x)\in S$，$z+\lambda\eta(x,z)\in S$。$\forall\lambda\in[0,1]$，$f(x+\lambda\eta(z,x))=f(x)$。则 $\exists\delta\in(0,1]$，s. t.

$$\sup_{\substack{\|y-x\|<\delta\\0<\lambda<\delta}}\frac{f(y+\lambda\eta(z,x))-f(y)}{\lambda}\geqslant\frac{f(x+\lambda\eta(z,x))-f(x)}{\lambda}=0$$

进而，$f^0(x;\eta(z,x))=\lim_{y\to x}\sup_{\lambda\downarrow 0}\frac{f(y+\lambda\eta(z,x))-f(y)}{\lambda}\geqslant 0$。由Clarke次梯度的定义，有

$$f^0(x;\eta(z,x))=\max\{\langle\zeta,\eta(z,x)\rangle,\forall\zeta\in\partial f(x)\}$$

故
$$\exists\zeta\in\partial f(x),\text{s. t. }\langle\zeta,\eta(z,x)\rangle\geqslant 0\tag{19}$$

另一方面，因为 $f(z)=f(x)$，由 f 关于 η 的伪不变凸性、引理2和引理3可知，$\forall\bar{\zeta}\in\partial f(x)$，$\langle\bar{\zeta},\eta(z,x)\rangle\leqslant 0$。故对上面的 $\zeta\in\partial f(x)$，亦有 $\langle\zeta,\eta(z,x)\rangle\leqslant 0$。由此式和(19)式可知，$\exists\zeta\in\partial f(x)$，$\langle\zeta,\eta(z,x)\rangle=0$。

此外，$\forall\lambda\in[0,1]$，$f(z+\lambda\eta(x,z))=f(z)$。同理可证，$\exists\zeta\in\partial f(x)$，$\langle\zeta,\eta(z,x)\rangle=0$。故 $x\in S_5$。

然后证 $S_2\subseteq S$。$\forall x\in S_2$，则 $g_i(x)=0$，$\forall i\in\tilde{I}(z)$；$g_i(x)\leqslant 0$，$\forall i\in I\backslash\tilde{I}(z)$。显然 $x\in A$，且 $\exists\zeta\in\partial f(x)$，s. t. $\langle\zeta,\eta(z,x)\rangle\geqslant 0$。由 f 关于 η 的伪不变凸性可知，$f(z)\geqslant f(x)$。而 $z\in S$，故 $x\in S$。

最后证 $S_4\subseteq S$。$\forall x\in S_4$，则 $g_i(x)=0$，$\forall i\in\tilde{I}(z)$；$g_i(x)\leqslant 0$，$\forall i\in I\backslash\tilde{I}(z)$。显然 $x\in A$，且 $\exists\xi\in C(z)$，$\zeta\in\partial f(x)$，s. t. $\langle\xi,\eta(x,z)\rangle\leqslant\langle\zeta,\eta(z,x)\rangle$。

注意到 $C(z)$ 的定义，于是有 $0\leqslant\langle\xi,\eta(x,z)\rangle\leqslant\langle\zeta,\eta(z,x)\rangle$，进而 $\langle\zeta,\eta(z,x)\rangle\geqslant 0$。

由 f 关于 η 的伪不变凸性可知，$f(z)\geqslant f(x)$。而 $z\in S$，故 $x\in S$。命题成立。 证毕

定理5 对问题(P)，设 $z\in S$，假设

$$S_6=\{x\in\Gamma_2:\exists\eta_i\in\partial g_i(x),\langle\eta_i,\eta(z,x)\rangle=0,\forall i\in\tilde{I}(z);\exists\zeta\in\partial f(x),\langle\zeta,\eta(z,x)\rangle=0\}$$

$$S_7=\{x\in\Gamma_2:\exists\eta_i\in\partial g_i(x),\langle\eta_i,\eta(z,x)\rangle=0,\forall i\in\tilde{I}(z);\exists\zeta\in\partial f(x),\langle\zeta,\eta(z,x)\rangle\geqslant 0\}$$

$$S_8=\{x\in\Gamma_2:\exists\eta_i\in\partial g_i(x),\langle\eta_i,\eta(z,x)\rangle\geqslant 0,\forall i\in\tilde{I}(z);\exists\zeta\in\partial f(x),\langle\zeta,\eta(z,x)\rangle=0\}$$

$$S_9=\{x\in\Gamma_2:\exists\eta_i\in\partial g_i(x),\langle\eta_i,\eta(z,x)\rangle\geqslant 0,\forall i\in\tilde{I}(z);\exists\zeta\in\partial f(x),\langle\zeta,\eta(z,x)\rangle\geqslant 0\}$$

$$S_{10}=\{x\in\Gamma_2:\exists\eta_i\in\partial g_i(x),\langle\eta_i,\eta(z,x)\rangle=0,\forall i\in\tilde{I}(z);\exists\zeta\in\partial f(x),\xi\in C(z),\langle\xi,\eta(x,z)\rangle=\langle\zeta,\eta(z,x)\rangle\}$$

$$S_{11}=\{x\in\Gamma_2:\exists\eta_i\in\partial g_i(x),\langle\eta_i,\eta(z,x)\rangle=0,\forall i\in\tilde{I}(z);\exists\zeta\in\partial f(x),\xi\in C(z),\langle\xi,\eta(x,z)\rangle\leqslant\langle\zeta,\eta(z,x)\rangle\}$$

$$S_{12}=\{x\in\Gamma_2:\exists\eta_i\in\partial g_i(x),\langle\eta_i,\eta(z,x)\rangle\geqslant 0,\forall i\in\tilde{I}(z);\exists\zeta\in\partial f(x),\xi\in C(z),\langle\xi,\eta(x,z)\rangle=\langle\zeta,\eta(z,x)\rangle\}$$

$$S_{13}=\{x\in\Gamma_2:\exists\eta_i\in\partial g_i(x),\langle\eta_i,\eta(z,x)\rangle\geqslant 0,\forall i\in\tilde{I}(z);\exists\zeta\in\partial f(x),\xi\in C(z),\langle\xi,\eta(x,z)\rangle\leqslant\langle\zeta,\eta(z,x)\rangle\}$$

$$S_{14}=\{x\in\Gamma_2:\exists\eta_i\in\partial g_i(x),\langle\eta_i,\eta(z,x)\rangle\geqslant 0,\forall i\in\tilde{I}(z);\exists\zeta\in\partial f(x),\xi\in C(z),\langle\xi,\eta(x,z)\rangle=\langle\zeta,\eta(z,x)\rangle=0\}$$

$$S_{15}=\{x\in\Gamma_2:\exists\eta_i\in\partial g_i(x),\langle\eta_i,\eta(z,x)\rangle=0,\forall i\in\tilde{I}(z);\exists\zeta\in\partial f(x),\xi\in C(z),\langle\xi,\eta(x,z)\rangle=\langle\zeta,\eta(z,x)\rangle=0\}$$

则 $S=S_6=S_7=S_8=S_9=S_{10}=S_{11}=S_{12}=S_{13}=S_{14}=S_{15}$。

证明 显然有如下关系式：$S_{15}\subseteq S_6\subseteq S_7\subseteq S_9$；$S_{15}\subseteq S_{10}\subseteq S_{11}\subseteq S_{13}$；$S_{15}\subseteq S_{14}\subseteq S_8\subseteq S_9$；$S_{15}\subseteq S_{14}\subseteq S_{12}\subseteq S_{13}$。下面只需证明 $S\subseteq S_{15}$，$S_9\subseteq S$，$S_{13}\subseteq S$。

先证 $S\subseteq S_{15}$。$\forall x\in S$，由定理4中第一部分的证明可知，$\exists\zeta\in\partial f(x)$，$\xi\in C(z)$，$\langle\xi,\eta(x,z)\rangle=\langle\zeta,\eta(z,x)\rangle=0$。由定理2，有 $\forall\lambda\in[0,1]$，$x+\lambda\eta(z,x)\in S$。由定理3，有 $\forall i\in\tilde{I}(z)$，$g_i(x+\lambda\eta(z,x))=g_i(x)=0$。因此，$\forall i\in\tilde{I}(z)$，$\exists\delta\in(0,1]$，使得 $\sup_{\substack{\|y-x\|<\delta\\0<\lambda<\delta}}\frac{g_i(y+\lambda\eta(z,x))-g_i(y)}{\lambda}\geqslant\frac{g_i(x+\lambda\eta(z,x))-g_i(x)}{\lambda}=0$。进而，$\forall i\in\tilde{I}(z)$，$g_i^0(x;\eta(z,x))=\lim_{y\to x}\sup_{\lambda\downarrow 0}\frac{g_i(y+\lambda\eta(z,x))-g_i(y)}{\lambda}\geqslant 0$。

由Clarke次梯度的定义，知 $\forall i\in\tilde{I}(z)$，$g_i^0(x;\eta(z,x))=\max\{\langle\eta_i,\eta(z,x)\rangle,\forall\eta_i\in\partial g_i(x)\}$。故

$$\forall i \in \tilde{I}(z), \exists \eta_i \in \partial g_i(x), \text{s.t.} \langle \eta_i, \eta(z,x) \rangle \geqslant 0 \tag{20}$$

另一方面，$\forall i \in \tilde{I}(z), g_i(z) = g_i(x) = 0$。由 g_i 关于 η 的伪不变凸性、引理 2 和引理 3 知，$\forall i \in \tilde{I}(z)$，$\forall \bar{\eta}_i \in \partial g_i(x)$，$\langle \bar{\eta}_i, \eta(z,x) \rangle \leqslant 0$。再由(20)式可知，$\forall i \in \tilde{I}(z)$ 和上面的 $\eta_i \in \partial g_i(x)$，有 $\langle \eta_i, \eta(z,x) \rangle = 0$。故 $x \in S_{15}$。

再证 $S_9 \subseteq S$。$\forall x \in S_9$，则 $\exists \zeta \in \partial f(x), \langle \zeta, \eta(z,x) \rangle \geqslant 0$；对

$$\forall i \in I \backslash \tilde{I}(z), g_i(x) \leqslant 0 \tag{21}$$

对

$$\forall i \in \tilde{I}(z), \exists \eta_i \in \partial g_i(x), \langle \eta_i, \eta(z,x) \rangle \geqslant 0 \tag{22}$$

由 g_i 关于 η 的伪不变凸性和(22)式可知，$\forall i \in \tilde{I}(z), g_i(x) \leqslant g_i(z) = 0$。由此式和(21)式可知，对 $\forall i \in I$，$g_i(x) \leqslant 0$，因此 x 是可行点。又由 f 关于 η 的伪不变凸性和(22)式有 $f(z) \geqslant f(x)$。注意到 $z \in S$，因此 $x \in S$。

最后证 $S_{13} \subseteq S$。$\forall x \in S_{13}$，则 $\exists \zeta \in \partial f(x), \xi \in C(z), \langle \xi, \eta(x,z) \rangle \leqslant \langle \zeta, \eta(z,x) \rangle$；$\forall i \in I \backslash \tilde{I}(z), g_i(x) \leqslant 0$；$\forall i \in \tilde{I}(z), \exists \eta_i \in \partial g_i(x), \langle \eta_i, \eta(z,x) \rangle \geqslant 0$。

类似前面证明易知 x 是可行点。而 $\xi \in C(z) = \{\xi \in \partial f(z) : \langle \xi, \eta(x,z) \rangle \geqslant 0\}$，于是 $\exists \zeta \in \partial f(x)$，$\langle \zeta, \eta(z,x) \rangle \geqslant 0$。由 f 关于 η 的伪不变凸性，$f(z) \geqslant f(x)$。而 $z \in S$，故 $x \in S$。 证毕

参考文献：

[1] Yang X M. On characterizing the solution sets of pseudoinvex extremum problems[J]. J Optim Theory Appl, 2009, 140:537-542.

[2] Clarke F H. Optimization and nonsmooth analysis[M]. New York: John Wiley, 1983.

[3] Jeyakuma V. Strong and weak invexity in mathematical programming[J]. Math Method Oper Res, 1985, 55:109-125.

[4] Mohan S R, Neogy S K. On invex sets and preinvex functions[J]. J Math Anal Appl, 1995, 189:901-908.

[5] Yang X M, Yang X Q, Teo K L. Characterizaions and applications of prequasi-invex functions[J]. J Optim Theory Appl, 2003, 117:607-625.

[6] Liu C P, Yang X M, Lee H W. Characterizations of the solution sets of pseudoinvex programs and variational inequalities[J]. J Inequal Appl, 2011, 2011(1):32.

[7] Sach P H, Penot J P. Charaterizations of generalized convexities via generalized directional derivative[J]. Numer Funct Anal Optim, 1998, 19:615-634.

[8] Mohan S R, Neogy S K. On invex sets and preinvex functions[J]. J Math Anal Appl, 1995, 189:901-908.

[9] Mishra S R, Giorgi G. Invexity and optimization, nonconvex optimization and its applications[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2008.

Operations Research and Cybernetics

Characterizations of the Solution Set for a Class of Pseudoinvex Extremum Problems

CHEN Lin[1], SU Wen-tao[2], ZHANG Li-jie[3]

(1. College of Mathematic, Sichuan University, Chengdu 610065; 2. College of Mayhematics, Chongqing Normal University, Chongqing 401331; 3. The Southwest Pipeline Company of Petro China, Chongqing 400021, China)

Abstract: Yang X.M. studied on characterizing the solution sets of pseudoinvex extremum problems without constraint in 2009. This paper, based on his significant work, studies the characterizations of the solution set for a class of nondifferentiable pseudoinvex extremum problems with some constraints via generalized Clarke gradient and Lagrange multiplier, and some properties of this class of problems are given. First, some properties are given for the nondifferentiable pseudolinear programming with constraints under the generalized Clarke gradient. Even in certain conditions, the optimal solution set and feasible set is invex for such problems. Finally, some characterizations of the solution set are proved via the generalized Clarke gradient and Lagrange multiplier.

Key words: pseudoinvex extremum problems; generalized Clarke gradient; Lagrange multiplier; characterizations of the solution set

(责任编辑 黄 颖)