运筹学与控制论

DOI:10.11721/cqnuj20140104

带有学习及退化效应和资源分配的交货期指派的单机排序问题*

赵升华，罗成新
(沈阳师范大学 数学与系统科学学院，沈阳 110034)

摘要:本文讨论带有学习及退化效应和资源分配的交货期指派的单机排序问题。所有工件有一个公共的交货期，如果工件在交货期内完工将不产生任何费用，但是在交货期之前或之后完工将产生相应的提前或延误费用。工件的实际加工时间是与开工时间、在排序中位置和资源分配有关的函数。目标是确定最优交货期的位置、交货期的大小、工件的最优排序和最优资源分配，最小化包括提前、延误、交货期大小、交货期位置和资源消耗的总费用。证明了带有学习及退化效应和资源分配的交货期指派问题仍然是多项式可解的，并且最优算法是可以在 $O(n^3)$ 时间内求出最优解。

关键词:排序;学习效应;退化效应;资源分配;交货期

中图分类号:O221.7　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2014)01-0020-05

在许多实际排序问题中，一个工件的加工时间可能由于退化效应、学习效应或资源分配而发生改变。Browne 和 Yechiali[1] 首先引进了带有退化效应的排序问题，其中工件的加工时间是与开工时间有关的线性不减函数。Cheng[2,3] 等分析了带有退化效应的工期指派问题。Cheng 和 Wang[4] 研究了带有学习效应的排序问题。Wang 和 Guo[5] 研究了带有学习及退化效应的单机排序问题，工件的加工时间定义为与开工时间和排序中位置有关的函数，目标是确定工期和排序的最优组合来最小化总的提前、延误和工期，并证明了这个问题可以在 $O(n\log n)$ 的多项式时间内求解。Shabtay 和 Steiner[6] 研究了依赖资源约束的排序问题。Wang[7] 等研究了带有学习效应和资源分配的排序问题，分别讨论了两种资源消耗函数下最小化时间表长、总的完工时间(或等待时间)、总的完工时间(或等待时间)的绝对差和资源消耗总费用，均给出了多项式时间算法。Yin 和 Wang[8] 研究了带有可控加工时间和学习效应的单机排序问题，目标函数是最小化时间表长、总的完工时间(或等待时间)、总的完工时间(或等待时间)的绝对差和总的压缩费用。通过将问题转化为指派问题，证明了这个问题是多项式时间可解的。Lu[9] 等研究了带有学习效应和依赖资源约束的工期指派的排序问题，工件的加工时间是与排序中位置和资源分配有关的函数，目标是确定工期、资源分配和排序的最优组合来最小化总的提前、延误、工期和资源消耗的总费用。对于两种不同资源消耗与两种不同的工期分派方法的每一种组合，均给出了多项式时间算法。Wei[10] 等研究了工件的实际加工时间为开始时间和资源分配函数的单机排序问题，目标是最小化时间表长、总的完工时间(或等待时间)、总的完工时间(或等待时间)的绝对差和总的资源消耗费用，证明了这个问题是多项式时间可解的。

近年来有关交货期的排序问题备受关注。在交货期的排序问题中，如果工件在交货期内完工不会产生费用，如果在交货期之前或之后完工将会产生提前或延误费用。本文讨论带有学习及退化效应和资源分配的交货期指派问题，目标是确定最优的交货期的位置、交货期的大小、工件的最优排序和最优资源分配，最小化包括提前、延误、交货期大小、交货期位置和资源消耗的总费用。文中证明了带有学习及退化效应和资源分配的交货期指派问题仍然是多项式可解的，并且给出了一个最优算法。

1 问题描述

设有 n 个独立的工件组成集合 $J=\{1,2,\cdots,n\}$ 要在一台机器上加工，每个工件在 $t=0$ 时刻都可以加工，机

* **收稿日期**:2013-01-07　　**修回日期**:2013-03-01　　**网络出版时间**:2014-01-16　08:16
资助项目:国家自然科学基金(No. 11171050)
作者简介:赵升华，女，研究方向为应用数学;**通讯作者**:罗成新，E-mail:luochengxin@163.com
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20140116.0816.001.html

器一次只能加工一个工件，并且不允许中断，$\bar{p}_j\,(j=1,2,\cdots,n)$ 表示工件 J_j 正常的加工时间。假设如果工件 J_j 被排在第 r 个位置，那么实际加工时间为 $p_{jr}(t,u_j)=(\bar{p}_j+bt)r^{a_j}-\theta_j u_j$，其中 $t\geqslant 0$ 是工件 J_j 的开始加工时间，$a_j\leqslant 0$ 是工件 J_j 的学习指数，b 是所有工件相同的退化率，u_j 表示分配给工件 J_j 的资源，其中 $0\leqslant u_j\leqslant \bar{u}_j<\dfrac{\bar{p}_j n^{a_j}}{\theta_j}$，$\bar{u}_j$ 表示分配给工件 J_j 的资源上界，θ_j 表示工件 J_j 的正的压缩率。$d(\geqslant 0)$ 表示交货期开始时间，$d_2=d+D$ 表示交货期的结束时间，其中 $D(\geqslant 0)$ 表示交货期的宽度。在任何排序中一个工件完成时间不大于 d 认为是提前，任何工件在 d_2 之后完成被认为是延误。本文中 d 和 D 都是决策变量。对于一个给定的排序 π，$C_j=C_j(\pi)$ 表示工件 J_j 的完成时间，$E_j=\max\{0,d-C_j\}$ 是工件 J_j 的提前，$T_j=\max\{0,C_j-d-D\}$ 是工件 J_j 的延误，$j=1,2,\cdots,n$。目标是确定交货期开始时间 d 和宽度 D 以及工件排序 π 和最优资源分配 u^*，使下述目标函数

$$f(d,D,u,\pi)=\sum_{j=1}^{n}(\alpha E_j+\beta T_j+\gamma d+\delta D+G_j u_j) \tag{1}$$

最小，其中 $\alpha,\beta,\gamma,\delta,G_j$ 分别是提前、延误、工期延误、交货期和资源分配的单位费用。使用三参数[13]表示可将问题表示为 $1\,|\,p_{jr}(t,u_j)=(\bar{p}_j+bt)r^{a_j}-\theta_j u_j\,|\,\sum_{j=1}^{n}(\alpha E_j+\beta T_j+\gamma d+\delta D+G_j u_j)$。

2 最优解的性质

以下给出的最优解的性质，在带有学习及退化效应和资源分配的交货期指派的单机排序问题中同样适用。

引理 1[11]　存在一个最优排序，第一个工件在 $t=0$ 时刻开始加工，相邻工件之间没有任何空闲时间。

引理 2[12]　存在一个最优排序，交货期的开始时间等于第 k 个工件的完成时间，其中 $k=\lceil n(\delta-\gamma)/\alpha\rceil$，交货期的完工时间等于第 $k+m$ 个工件的完工时间，其中 $k+m=\lceil n(\beta-\delta)/\beta\rceil$，$\lceil x\rceil$ 表示大于或等于 x 的最小整数。

3 最优算法

以下给出在带有学习及退化效应和资源分配的交货期指派的单机排序问题中最优资源分配和工件最优排序。

引理 3　目标函数值可以表示为 $f(d,D,u,\pi)=\sum_{j=1}^{n}\omega_j p_{[j]}+\sum_{j=1}^{n}G_{[j]}u_{[j]}$，其中 ω_j 表示第 j 个位置的工件的位置权，

$$\omega_j=\begin{cases}\alpha(j-1)+n\gamma, & 1\leqslant j\leqslant k\\ n\delta, & k+1\leqslant j\leqslant k+m\\ \beta(n-j+1), & k+m+1\leqslant j\leqslant n\end{cases} \tag{2}$$

证明

$$f(d,D,u,\pi)=\sum_{j=1}^{n}(\alpha E_j+\beta T_j+\gamma d+\delta D+G_j u_j)=\alpha\sum_{j=1}^{k}(j-1)\,p_{[j]}+$$

$$\beta\sum_{j=k+m+1}^{n}(n-j+1)\,p_{[j]}+n\gamma\Big(\sum_{j=1}^{k}p_{[j]}\Big)+n\delta\Big(\sum_{j=k+1}^{k+m}p_{[j]}\Big)+\sum_{j=1}^{n}G_{[j]}u_{[j]}=\sum_{j=1}^{k}(\alpha(j-1)+n\gamma)\,p_{[j]}+$$

$$\sum_{j=k+1}^{k+m}n\delta p_{[j]}+\sum_{j=k+m+1}^{n}\beta(n-j+1)\,p_{[j]}+\sum_{j=1}^{n}G_{[j]}u_{[j]}=\sum_{j=1}^{n}\omega_j p_{[j]}+\sum_{j=1}^{n}G_{[j]}u_{[j]}$$

其中 ω_j 由(2)式确定，$p_{[j]}$ 表示排在第 j 个位置的工件的实际加工时间。工件的实际加工时间为

$$p_{[1]}=\bar{p}_{[1]}-\theta_{[1]}u_{[1]},\quad p_{[2]}=\bar{p}_{[2]}2^{a_{[2]}}-\theta_{[2]}u_{[2]}+b2^{a_{[2]}}(\bar{p}_{[1]}-\theta_{[1]}u_{[1]}),$$

$$p_{[3]}=\bar{p}_{[3]}3^{a_{[3]}}-\theta_{[3]}u_{[3]}+b3^{a_{[3]}}(\bar{p}_{[2]}2^{a_{[2]}}-\theta_{[2]}u_{[2]}+(1+b2^{a_{[2]}})(\bar{p}_{[1]}-\theta_{[1]}u_{[1]})),$$

$$p_{[4]}=\bar{p}_{[4]}4^{a_{[4]}}-\theta_{[4]}u_{[4]}+b4^{a_{[4]}}(\bar{p}_{[3]}3^{a_{[3]}}-\theta_{[3]}u_{[3]}+(1+b3^{a_{[3]}})(\bar{p}_{[2]}2^{a_{[2]}}-\theta_{[2]}u_{[2]})$$
$$+(1+b3^{a_{[3]}})(1+b2^{a_{[2]}})(\bar{p}_{[1]}-\theta_{[1]}u_{[1]})),$$

………

$$p_{[n]}=\bar{p}_{[n]}n^{a_{[n]}}-\theta_{[n]}u_{[n]}+bn^{a_{[n]}}(\bar{p}_{[n-1]}(n-1)^{a_{[n-1]}}-\theta_{[n-1]}u_{[n-1]}+$$
$$(1+b(n-1)^{a_{[n-1]}})(\bar{p}_{[n-2]}(n-2)^{a_{[n-2]}}-\theta_{[n-2]}u_{[n-2]})+\cdots+$$
$$(\bar{p}_{[2]}2^{a_{[2]}}-\theta_{[2]}u_{[2]})\prod_{i=3}^{n-1}(1+bi^{a_{[i]}})+(\bar{p}_{[1]}-\theta_{[1]}u_{[1]})\prod_{i=2}^{n-1}(1+bi^{a_{[i]}}))。$$

$$f(d,D,u,\pi)=\sum_{j=1}^{n}(\alpha E_j+\beta T_j+\gamma d+\delta D+G_j u_j)=\sum_{j=1}^{n}\omega_j p_{[j]}+\sum_{j=1}^{n}G_{[j]}u_{[j]}=$$
$$\omega_1(\bar{p}_{[1]}-\theta_{[1]}u_{[1]})+\omega_2(\bar{p}_{[2]}2^{a_{[2]}}-\theta_{[2]}u_{[2]}+b2^{a_{[2]}}(\bar{p}_{[1]}-\theta_{[1]}u_{[1]}))+$$
$$\omega_3(\bar{p}_{[3]}3^{a_{[3]}}-\theta_{[3]}u_{[3]}+b3^{a_{[3]}}(\bar{p}_{[2]}2^{a_{[2]}}-\theta_{[2]}u_{[2]}+(1+b2^{a_{[2]}})(\bar{p}_{[1]}-\theta_{[1]}u_{[1]})))+$$
$$\omega_4(\bar{p}_{[4]}4^{a_{[4]}}-\theta_{[4]}u_{[4]}+b4^{a_{[4]}}(\bar{p}_{[3]}3^{a_{[3]}}-\theta_{[3]}u_{[3]}+(1+b3^{a_{[3]}})(\bar{p}_{[2]}2^{a_{[2]}}-\theta_{[2]}u_{[2]})+$$
$$(1+b3^{a_{[3]}})(1+b2^{a_{[2]}})(\bar{p}_{[1]}-\theta_{[1]}u_{[1]})))+\cdots+$$
$$\omega_{n-1}(\bar{p}_{[n-1]}(n-1)^{a_{[n-1]}}-\theta_{[n-1]}u_{[n-1]}+b(n-1)^{a_{[n-1]}}(\bar{p}_{[n-2]}(n-2)^{a_{[n-2]}}-\theta_{[n-2]}u_{[n-2]}+$$
$$(\bar{p}_{[n-3]}(n-3)^{a_{[n-3]}}-\theta_{[n-3]}u_{[n-3]})(1+b(n-2)^{a_{[n-2]}})+\cdots+$$
$$(\bar{p}_{[2]}2^{a_{[2]}}-\theta_{[2]}u_{[2]})\prod_{i=3}^{n-2}(1+bi^{a_{[i]}})+(\bar{p}_{[1]}-\theta_{[1]}u_{[1]})\prod_{i=2}^{n-2}(1+bi^{a_{[i]}})))+$$
$$\omega_n(\bar{p}_{[n]}n^{a_{[n]}}-\theta_{[n]}u_{[n]}+bn^{a_{[n]}}(\bar{p}_{[n-1]}(n-1)^{a_{[n-1]}}-\theta_{[n-1]}u_{[n-1]}+$$
$$(1+b(n-1)^{a_{[n-1]}})(\bar{p}_{[n-2]}(n-2)^{a_{[n-2]}}-\theta_{[n-2]}u_{[n-2]})+\cdots+$$
$$(\bar{p}_{[2]}2^{a_{[2]}}-\theta_{[2]}u_{[2]})\prod_{i=3}^{n-1}(1+bi^{a_{[i]}})+(\bar{p}_{[1]}-\theta_{[1]}u_{[1]})\prod_{i=2}^{n-1}(1+bi^{a_{[i]}})))+\sum_{j=1}^{n}G_{[j]}u_{[j]}=$$
$$(\bar{p}_{[1]}-\theta_{[1]}u_{[1]})(\omega_1+\omega_2 b2^{a_{[2]}}+\omega_3 b3^{a_{[3]}}(1+b2^{a_{[2]}})+\cdots+\omega_n bn^{a_{[n]}}\prod_{i=2}^{n-1}(1+bi^{a_{[i]}}))+$$
$$(\bar{p}_{[2]}2^{a_{[2]}}-\theta_{[2]}u_{[2]})(\omega_2+\omega_3 b3^{a_{[3]}}+\omega_4 b4^{a_{[4]}}(1+b3^{a_{[3]}})+\cdots+\omega_n bn^{a_{[n]}}\prod_{i=3}^{n-1}(1+bi^{a_{[i]}}))+$$
$$(\bar{p}_{[3]}3^{a_{[3]}}-\theta_{[3]}u_{[3]})(\omega_3+\omega_4 b4^{a_{[4]}}+\omega_5 b5^{a_{[5]}}(1+b4^{a_{[4]}})+\cdots+\omega_n bn^{a_{[n]}}\prod_{i=4}^{n-1}(1+bi^{a_{[i]}}))+\cdots+$$
$$(\bar{p}_{[n-1]}(n-1)^{a_{[n-1]}}-\theta_{[n-1]}u_{[n-1]})(\omega_{n-1}+bn^{a_{[n]}}\omega_n)+(\bar{p}_{[n]}n^{a_{[n]}}-\theta_{[n]}u_{[n]})\omega_n+\sum_{j=1}^{n}G_{[j]}u_{[j]}=$$
$$\sum_{j=1}^{n}\Omega_j\bar{p}_{[j]}j^{a_{[j]}}-\sum_{j=1}^{n}\Omega_j\theta_{[j]}u_{[j]}+\sum_{j=1}^{n}G_{[j]}u_{[j]}=\sum_{j=1}^{n}\Omega_j\bar{p}_{[j]}j^{a_{[j]}}+\sum_{j=1}^{n}(G_{[j]}-\theta_{[j]}\Omega_j)u_{[j]} \tag{3}$$

其中$\bar{p}_{[j]}$表示排在第j个位置的工件的正常加工时间,而

$$\Omega_1=\omega_1+\omega_2 b2^{a_{[2]}}+\omega_3 b3^{a_{[3]}}(1+b2^{a_{[2]}})+\cdots+\omega_n bn^{a_{[n]}}\prod_{i=2}^{n-1}(1+bi^{a_{[i]}}),$$
$$\Omega_2=\omega_2+\omega_3 b3^{a_{[3]}}+\omega_4 b4^{a_{[4]}}(1+b3^{a_{[3]}})+\cdots+\omega_n bn^{a_{[n]}}\prod_{i=3}^{n-1}(1+bi^{a_{[i]}}),$$
$$\Omega_3=\omega_3+\omega_4 b4^{a_{[4]}}+\omega_5 b5^{a_{[5]}}(1+b4^{a_{[4]}})+\cdots+\omega_n bn^{a_{[n]}}\prod_{i=4}^{n-1}(1+bi^{a_{[i]}}),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\Omega_{n-1}=\omega_{n-1}+bn^{a_{[n]}}\omega_n,\qquad \Omega_n=\omega_n。$$

从式子(3)可以看出,对于任何工件排序,如果$G_{[j]}-\theta_{[j]}\Omega_j$为负值,则工件$J_j$的最优资源分配为其上界$\bar{u}_{[j]}$;如果$G_{[j]}-\theta_{[j]}\Omega_j$为正值,则工件$J_j$的最优资源分配为0;如果$G_{[j]}-\theta_{[j]}\Omega_j=0$,那么工件$J_j$的最优资源分配可取介于0与$\bar{u}_{[j]}$之间的任意值。从而

$$u_{[j]}^{*}=\begin{cases}\bar{u}_{[j]},G_{[j]}-\theta_{[j]}\Omega_j<0\\ u_{[j]}\in[0,\bar{u}_{[j]}],G_{[j]}-\theta_{[j]}\Omega_j=0\\ 0,G_{[j]}-\theta_{[j]}\Omega_j>0\end{cases} \tag{4}$$

其中$u_{[j]}^{*}$,$1\leqslant j\leqslant n$,表示在第j个位置上工件的最优资源分配量。

引理 4 给定一个排序,问题$1|p_{jr}(t,u_j)=(\bar{p}_j+bt)r^{a_j}-\theta_j u_j|\sum_{j=1}^{n}(\alpha E_j+\beta T_j+\gamma d+\delta D+G_j u_j)$的最优资源分配通过(4)式决定。

证明 因为在等式(3),对于一个给定的排序,$\sum_{j=1}^{n}\Omega_j\bar{p}_{[j]}j^{a_{[j]}}$是固定的,对于$f(d,D,u,\pi)$,工件$J_j$变化的部分是$(G_{[j]}-\theta_{[j]}\Omega_j)u_{[j]}$。因此对$u_{[j]}$求导,可得$\dfrac{df(d,D,u,\pi)}{du_{[j]}}=G_{[j]}-\theta_{[j]}\Omega_j$,$j=1,2,\cdots,n$。如果

$G_{[j]}-\theta_{[j]}\Omega_j>0$，则不分配给工件 J_j 任何资源；如果 $G_{[j]}-\theta_{[j]}\Omega_j<0$，将分配给工件 J_j 尽可能大的资源；如果 $G_{[j]}-\theta_{[j]}\Omega_j=0$，分配给工件 J_j 任何可能的资源都是最优。证毕。

接下来讨论问题 $1|p_{jr}(t,u_j)=(\bar{p}_j+bt)r^{a_j}-\theta_j u_j|\sum_{j=1}^{n}(\alpha E_j+\beta T_j+\gamma d+\delta D+G_j u_j)$ 的最优排序。在上面的分析中，给出了对于任何给定的最优序列计算最优资源分配的表达式，问题归为了纯粹的排序问题，为了得到最优的排序，这里将其转化为一个指派问题。

令
$$\lambda_{ij}=\begin{cases}\Omega_j\bar{p}_i j^{a_i},G_i-\Omega_j\theta_i\geqslant 0\\ \Omega_j\bar{p}_i j^{a_i}+(G_i-\Omega_j\theta_i)\bar{u}_i,G_i-\Omega_j\theta_i<0\end{cases}\tag{5}$$

设 $z_{ij}\in\{0,1\}$，如果工件 J_i 被排在第 j 个位置，设 $z_{ij}=1$，否则 $z_{ij}=0$，其中 $i,j=1,2,\cdots,n$。则有如下的指派问题：

$$\min\ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}z_{ij}\ s.t.\sum_{i=1}^{n}z_{ij}=1,j=1,2\cdots,n,\ \sum_{j=1}^{n}z_{ij}=1,i=1,2\cdots,n,\ z_{ij}=0\text{ 或者 }1,\ i,j=1,2,\cdots,n\tag{6}$$

引理 5　对于问题 $1|p_{jr}(t,u_j)=(\bar{p}_j+bt)r^{a_j}-\theta_j u_j|\sum_{j=1}^{n}(\alpha E_j+\beta T_j+\gamma d+\delta D+G_j u_j)$ 的最优排序，能通过解线性指派问题(6) 确定，计算的复杂性是 $O(n^3)$ 。

基于上面的分析，可以得出求解问题 $1|p_{jr}(t,u_j)=(\bar{p}_j+bt)r^{a_j}-\theta_j u_j|\sum_{j=1}^{n}(\alpha E_j+\beta T_j+\gamma d+\delta D+G_j u_j)$ 的最优算法。

算法 1

步骤 1　指派最优交货期开始时间在第 k 个工件的完成时间，其中 $k=\lceil n(\delta-\gamma)/\alpha\rceil$，交货期结束在第 $k+m$ 个工件的完成时间，其中 $k+m=\lceil n(\beta-\delta)/\beta\rceil$。

步骤 2　通过等式(5)计算 λ_{ij}。

步骤 3　通过解指派问题(6)确定最优排序。

步骤 4　通过等式(4)计算最优资源分配。

步骤 5　计算最优的加工时间。

步骤 6　设最优交货期的开始时间等于第 k 个工件的完工时间，交货期的完成时间等于第 $k+m$ 个工件的完工时间。

定理 1　利用算法 1 可以求出问题 $1|p_{jr}(t,u_j)=(\bar{p}_j+bt)r^{a_j}-\theta_j u_j|\sum_{j=1}^{n}(\alpha E_j+\beta T_j+\gamma d+\delta D+G_j u_j)$ 的最优解，其时间复杂性为 $O(n^3)$ 。

证明　算法 1 的最优性由引理 3— 引理 5 得出。步骤 1 和 2 能在线性时间内执行，步骤 3 需要 $O(n^3)$ 时间，步骤 4—6 能在线性时间内执行。所以整个算法的计算复杂性是 $O(n^3)$ 。　证毕

4 结论

本文讨论了带有学习及退化效应和资源分配的交货期指派的单机排序问题。所有工件有一个相同的交货期，工件在交货期内完成将不产生任何费用，在交货期之前或之后完成将产生相应的提前或延误费用。工件的实际加工时间是与开工时间、在排序中位置和资源分配有关的函数。目标是最小化包括提前、延误、交货期大小、交货期位置和资源消耗的总费用。证明了该问题可以在 $O(n^3)$ 时间内求出最优解。

参考文献：

[1] Browne S, Yechiali U. Scheduling deteriorating jobs on a single processor [J]. Operations Research, 1990, 38: 495-498.

[2] Cheng T C E, Kang L, Ng C T. Due-date assignment and single machine scheduling with deteriorating jobs [J]. Journal of the Operational Research Society, 2004, 55: 198-203.

[3] Cheng T C E, Kang L, Ng C T. Single machine due-date scheduling of jobs with decreasing start-time dependent processing times [J]. International Transactions in Operational Research, 2005, 12: 355-366.

[4] Cheng T C E, Wang G. Single machine scheduling with learning effect considerations [J]. Annals of Operations Research, 2000, 98: 273-290.

[5] Wang J B, Guo Q. A due-date assignment problem with

learning effect and deteriorating jobs [J]. Applied Mathematical Modeling, 2010, 34:309-313.

[6] Shabtay D, Steiner G. A survey of scheduling with controllable processing times [J]. Discrete Applied Mathematics, 2007, 155:1643-1666.

[7] Wang D, Wang M Z, Wang J B. Single-machine scheduling with learning effect and resource-dependent processing times [J]. Computers and Industrial Engineering, 2010, 59:458-462.

[8] Yin N, Wang X Y. Single-machine scheduling with controllable processing times and learning effect [J]. International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2011, 54: 743-748.

[9] Lu Y Y, Li G, Wu Y B, et al. Optimal due-date assignment problem with learning effect and resource-dependent processing times [J/OL]. Optimization Letters, 2012-03-22, DOI:10.1007/s 11590-012-0467-7.

[10] Wei C M, Wang J B, Ji P. Single-machine scheduling with time-and-resource-dependent processing times [J]. Applied Mathematical Modelling, 2012, 36:792-798.

[11] Panwalkar S S, Smith M L, Seidmann A. Common due-date assignment to minimize total penalty for the one machine scheduling problem [J]. Operations Research, 1982, 30:391-399.

[12] Liman S D, Panwalkar S S, Thongmee S. Common due window size and location determination in a single machine scheduling problem [J]. Journal of the Operational Research Society, 1998, 49:1007-1010.

[13] Graham R L, Lawler E L, Lenstra J K, et al. Optimization and approximation in deterministic sequencing and scheduling: a survey [J]. Annals of Discrete Mathematics, 1979, 5:287-326.

[14] 郭玲，赵传立. 带有公共交货期窗口和加工时间可控的单机排序问题[J]. 重庆师范大学学报：自然科学版，2012，29(6)：9-14.

Guo L, Zhao C L. Single machine scheduling problem with common due-window assignment and controllable processing times[J]. J of Chongqing Normal University: Natural Science, 2012, 29(6):9-14.

[15] 郭晓娇，罗成新. 带有线性退化工件和退化维护时间的单机窗口排序 [J]. 沈阳师范大学学报：自然科学版，2012(1)：7-11.

Guo X J, Luo C X. Single-machine due-window assignment and scheduling with linear deteriorating jobs and deteriorating maintenance[J]. J of Shenyang Normal University: Natural Science, 2012(1):7-11.

Operations Research and Cybernetics

A Due-window Assignment Problem with Learning and Deteriorating Effect and Resource Allocation on a Single Machine

ZHAO Sheng-hua, LUO Cheng-xin

(School of Mathematics and Systems Science, Shenyang Normal University, Shenyang 110034, China)

Abstract: In this paper we consider a due-window assignment problem with learning and deteriorating effect and resource allocation on a single machine. All jobs have a common due-window. If jobs completed within the window incur no penalties, other jobs completed before or after the due-window incur either earliness or tardiness penalties. Job processing times are defined by functions of their starting times, positions in the sequence and resource allocation. The objective is to determine the optimal due-window location, due-window size, the optimal sequence and the optimal resource allocation to minimize a total costs based on earliness, tardiness, due-window size, due-window location and resource consumption. We show that a due-window assignment problem with learning and deteriorating effect and resource allocation remains polynomial time solvable, and we provide an optimization algorithm.

Key words: scheduling; learning effect; deteriorating effect; resource allocation; due window

（责任编辑 李若溪）