2014 年 1 月 重庆师范大学学报(自然科学版) Jan. 2014
第 31 卷 第 1 期 Journal of Chongqing Normal University (Natural Science) Vol. 31 No. 1

DOI:10.11721/cqnuj20140111

弱 S-拟正规嵌入子群与有限群的 p-超可解性*

杨立英[1]，钟 国[1]，韦华全[1,2]，马儇龙[1]
(1. 广西师范学院 数学科学学院，南宁 530023；2. 广西大学 数学与信息科学学院，南宁 530004)

摘要:群 G 的一个子群 H 称为在 G 中 S-拟正规嵌入,如果对于任意的素数 $p \Big| |H|$,H 的 Sylow p-子群也是 G 的某个 S-拟正规子群的 Sylow p-子群。称群 G 的子群 H 在 G 中弱 S-拟正规嵌入,如果存在群 G 的正规子群 T,使得 $HT \trianglelefteq G$ 且 $H \cap T$ 在 G 中是 S-拟正规嵌入的,本文利用弱 S-拟正规嵌入子群的概念,研究了超可解群的构造,得出了一些新结果:设群 G 是 p-可解群,p 是整除 $|G|$ 的素因子。1)如果 $F_p(G)$ 的每一个包含 $O_{p'}(G)$ 的极大子群在 G 中弱 S-拟正规嵌入,则 G 是 p-超可解群;2)如果 $F_p(G)$ 的非循环的 Sylow p-子群的任意极大子群在 G 中是弱 S-拟正规嵌入的,则 G 是 p-超可解群。

关键词:p-超可解群;弱 S-拟正规嵌入子群;有限群

中图分类号:O152.1 **文献标志码**:A **文章编号**:16472-6693(2014)-0054-04

利用广义正规子群研究群的结构是群论研究者们感兴趣的课题之一。如果 $HK=KH$,则群 G 的子群 H 与 K 称为可置换的。若 H 与 G 的每个子群可置换,则称 H 是 G 的拟正规子群。在 1939 年,Ore[1] 证明了有限群的每个拟正规子群都是次正规的。1962 年,Ito[2] 证明了对有限群 G 的每个拟正规子群 H,H/H_G 是幂零群。后来,Kegel[3] 又给出了 S-拟正规子群的定义:群 G 的子群 H 称为在 G 中 S-拟正规,若 H 与 G 的每个 Sylow 子群可置换。进一步地,Ballester-Boinches[4] 从嵌入子群的角度引入了 S-拟正规嵌入子群的概念:称群 G 的子群 H 在 G 中 S-拟正规嵌入,如果对于 $|H|$ 的每个素因子 p,H 的 Sylow p-子群也是 G 的某个 S-拟正规子群的 Sylow p-子群。利用子群的 S-拟正规嵌入性,群论研究者们已经得到了有限群的许多重要结果[5-12]。2011 年,徐满红[5] 引入了弱 S-拟正规嵌入子群的概念,分别统一推广了正规子群、拟正规子群、S-拟正规子群、S-拟正规嵌入子群、c-正规子群等,从而统一推广了若干熟知的重要结果。本文通过对弱 S-拟正规嵌入子群的考察,利用子群弱 S-拟正规嵌入性,推广了最近一些结论。文中 G 总表示一个有限群,符号和术语都是规范的。

1 预备知识

定义 1[5] 设 H 是 G 的子群。称 H 在 G 中弱 S-拟正规嵌入,如果存在群 G 的正规子群 T,使得 $HT \trianglelefteq G$ 且 $H \cap T$ 在 G 中是 S-拟正规嵌入的。

明显正规子群、拟正规子群、S-拟正规子群、S-拟正规嵌入子群、c-正规子群和 c^*-正规子群[10] 都是弱 S-拟正规嵌入子群。但是,反之不然[5]。

引理 1[6-7] 1) S-拟正规子群是次正规子群;2) 设 P 是 G 的 p-子群,其中 $p \in \pi(G)$,则 P 在 G 中 S-拟正规当且仅当 $N_G(P) \geqslant O^p(G)$;3) 设 H 在 G 中 S-拟正规,$P \in Syl_p(H)$,p 为素数。如果 $P \leqslant O_p(G)$ 或 $H_G=1$,则 P 在 G 中 S-拟正规;4) 设 H_{sG} 是包含在 H 中的 G 的所有 S-拟正规子群生成的子群,则 H_{sG} 是唯一包含在 H 中最大的 G 的 S-拟正规子群,特别地,$N_G(H) \leqslant N_G(H_{sG})$。

引理 2[5] 设 G 是群,$N \trianglelefteq G$,H 为 G 的弱 S-拟正规嵌入子群,则 1) $H \leqslant M \leqslant G$,$H$ 在 M 中弱 S-拟正规嵌入;

* **收稿日期**:2012-12-25 **修回日期**:2013-12-04 **网络出版时间**:2014-01-16 08:16

资助项目:国家自然科学基金(No. 10961007;No. 11161006);广西自然科学基金(No. 0991101;No. 0991102);广西教育厅科研基金-2011年广西高校人才资助计划(No. 5070)

作者简介:杨立英,女,副教授,研究方向为有限群理论,E-mail:yangliying030@163.com

网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20140116.0816.008.html

2）$H\leqslant G$ 且 $N\leqslant H$，则 H/N 在 G/N 中弱 S-拟正规嵌入；3）设 π 是一素数集合，若 H 是 G 的 π-子群，而 N 为 π'-子群，则 HN/N 在 G/N 中弱 S-拟正规嵌入。

引理 3[8]　设 $N(N\neq 1)$ 是 G 的可解正规子群，如果 $N\cap\Phi(G)=1$，则 N 的 Fitting 子群 $F(N)$ 是包含在 N 中的 G 的极小正规子群的直积。

引理 4[8]　设 G 是 p-可解群，p 是整除 $|G|$ 的素因子，则 $C_G(F_p(G))\leqslant F_p(G)$。

引理 5[9]　设 $G=AB$。A 和 B 都是 G 的子群。令 A_p,B_p 分别是 A,B 的 Sylow p-子群，则 A_pB_p 是 G 的 Sylow p-子群当且仅当 $A_pB_p=B_pA_p$。

2 主要结果

定理 1　设群 G 是 p-可解群，p 是整除 $|G|$ 的素因子。如果 $F_p(G)$ 的每一个包含 $O_{p'}(G)$ 的极大子群在 G 中弱 S-拟正规嵌入，则 G 是 p-超可解群。

证明　假设结论不真。设 G 为极小阶反例。1）$O_{p'}(G)=1$。

若 $N=O_{p'}(G)\neq 1$，先考虑商群 G/N，明显 $F_p\left(G/N\right)=F_p(G)/N$。设 M/N 是 $F_p\left(G/N\right)$ 的极大子群，则 M 是 $F_p(G)$ 中包含 N 的极大子群。由于 M 在 G 中弱 S-拟正规嵌入，所以利用引理 2，M/N 在 G/N 中是弱 S-拟正规嵌入的，由此得 M/N 满足定理的条件。由 G 的极小性可知道 G/N 是 p-超可解的，从而 G 也是 p-超可解的，矛盾于 G 的选择。

2）$\Phi(G)=1$ 且 $F_p(G)=F(G)=O_p(G)$。

若 $T=\Phi(G)\neq 1$，因为 $O_{p'}(G)=1$，可知 $F_p(G)=F(G)=O_p(G)$，即得 $F_p\left(G/T\right)=O_p\left(G/T\right)=O_p(G)/T=F_p(G)/T$。若 P_1/T 是 $F_p\left(G/T\right)$ 的极大子群，则 P_1 是 $F(G)$ 的极大子群。因 P_1 在 G 中是弱 S-拟正规嵌入的，由引理 2 可得 P_1/T 在 G/T 中是弱 S-拟正规嵌入的，所以 G/T 满足定理的条件。由 G 的极小阶选择可得 G/T 是 p-超可解群，且因为所有 p-超可解群构成的群类是饱和群系，故 G 也是 p-超可解的，这矛盾于极小阶反例。

3）$F_p(G)=F(G)=N_1\times\cdots\times N_t$，其中 $N_i(i=1,\cdots,t)$ 是群 G 的包含在 $F(G)$ 中的极小正规子群，并且 $|N_i|=p$。

由引理 3 和情形 2）可得 $F(G)$ 是群 G 的包含在 $F(G)$ 中的极小正规子群的直积。由于 G 是 p-可解的且 $O_{p'}(G)=1$，可以知道 $F(G)$ 是非平凡的初等交换 p-群，所以由引理 4 有 $C_G(F(G))=F(G)$。现在令 $F(G)=P=N_1\times\cdots\times N_t$，其中 $N_i(i=1,\cdots,t)$ 是群 G 的包含在 P 中的极小正规子群。由于 $\Phi(G)=1$，对于群 G 的包含在 P 中的每一个极小正规子群 N，都存在 G 的一个极大子群 M，使得 $G=NM=PM$ 且有 $N\cap M=1$。令 M_p 为 M 的 Sylow p-子群，则 $P=P\cap G=P\cap MN=N(P\cap M)=(P\cap M)\times N$，并且由引理 5 可得，$G_p=PM_p$。令 P_1 是 G_p 中包含 M_p 的极大子群，记为 $P_2=P_1\cap P$。显然 $P_1=P_2M_p$ 且 $P_2=(P\cap M)\times(P_1\cap N)$。因为 $P_2\cap M_p=P\cap M_p$，有 $p=|G_p:P_1|=|PM_p:P_2M_p|=|P:P_2|$，从而 P_2 是 P 的极大子群。类似地可得，$N^*=P_1\cap N$ 是 N 的极大子群。因为 $P_2=P_1\cap P\lhd G_p$，再由引理 1 可知 $G_p\leqslant N_G(P_1)\leqslant N_G((P_1)_{sG})$。进一步有 $(P_2)_{sG}$ 被 $O^p(G)G_p=G$ 正规化，所以易知 $(P_2)_{sG}=(P_2)_G=P\cap M$。又因为 P_2 在 G 中是弱 S-拟正规嵌入的，所以存在群 G 的正规子群 K，使得 $P_2K\lhd G$ 且 $P_2\cap K$ 在 G 中是 S-拟正规嵌入的。注意到 $P_2\cap K\leqslant O_p(G)$，由引理 1，$P_2\cap K$ 在 G 中 S-拟正规，从而 $P_2\cap K\leqslant(P_2)_{sG}$。令 $(P_2)_GK=K_1$，则 $K_1\lhd G$ 且 $P_2K=N^*K_1$。由 $P_2K\lhd G$，得 $N^*K_1\lhd G$。进而 $N^*\cap K_1=1$。否则，若 $N^*\cap K_1\neq 1$，$N^*\cap K_1=N^*\cap K_1\cap N=N^*\cap N=N^*$，则 $N^*\leqslant K_1$，矛盾。如果 $N\cap K_1=1$，则 $N\cap N^*K_1=N^*(N\cap K_1)=N^*$，因此 $N^*=1$，故 $|N|=p$。若 $N\cap K_1=N$，则 $N^*\cap K_1=N^*$，矛盾。综上可知 $|N_i|=p,i=1,2,\cdots,t$。

4）最后的矛盾。

对于任意的 i,商群 $G/C_G(N_i)$ 同构于 $Aut(N_i)$ 的子群,其中 $Aut(N_i)$ 是阶为 $p-1$ 的循环群。由于所有的 p-超可解群构成的群类是饱和群系,故 $G/\bigcap_{i=1}^{t}(C_G(N_i))$ 是 p-超可解的,再由 $\bigcap_{i=1}^{t}(C_G(N_i))=C_G(F(G))$ 可知 $G/C_G(F(G))=G/F(G)$ 是 p-超可解群,于是 G 是 p-超可解的,矛盾。 证毕

定理 2 设群 G 是 p-可解群,p 是整除 $|G|$ 的素因子。如果 $F_p(G)$ 的非循环的 Sylow p-子群的任意极大子群在 G 中是弱 S-拟正规嵌入的,则 G 是 p-超可解群。

证明 假设结论不真。设 G 为极小阶反例。

令 P 为 $F_p(G)$ 的一个非循环的 Sylow p-子群,则 $O_{p'}(G)\neq 1$。若 $L=O_{p'}(G)\neq 1$,仍是先考虑 G/L。因为 $F_p\left(G/L\right)=F_p(G)/L=O_p\left(G/L\right)$,故 $F_p\left(G/L\right)$ 是一个 p-群,对于 $F_p(G)/L$ 的极大子群 H/L,存在 P 的极大子群 P_1,使得 $H=P_1T$。由于 P_1 在 G 中是弱 S-拟正规嵌入的,可由引理 2 知道 $P_1(L)/L$ 在 G/L 中是弱 S-拟正规嵌入的,所以 G/L 满足定理的条件。由 G 之极小性选择可知 G/L 是 p-超可解的,因此 G 也是 p-超可解的,这与 G 是极小阶反例矛盾。

下证 $\Phi(G)=1$。

如果 $T=\Phi(G)\neq 1$,因为 G 是 p-可解的,所以 G/T 是 p-可解群,又由于 $O_{p'}(G)=1$,故 $F_p(G)=F(G)=O_p(G)$,并且 $F_p\left(G/T\right)=F\left(G/T\right)=F_p(G)/T$。对于 $F_p\left(G/T\right)$ 的极大子群 P_1/T,可知道 P_1 是 P 的极大子群。又由引理 2 知 P_1/T 在 G/T 中是弱 S-拟正规嵌入的,因此 G/T 满足定理条件。由 G 的极小阶选择可知 G/T 是 p-超可解的,由于所有的 p-超可解群构成的群类是饱和群系,所以 G 也是 p-超可解的,这与 G 的极小阶反例矛盾。

利用以上证明以及引理 3 可知,$F(G)$ 是群 G 的包含在 $F(G)$ 中的极小正规子群的直积。因为 G 是 p-可解的且 $O_{p'}(G)=1$,得到 $F(G)$ 是非平凡初等交换 p-群,由引理 4 知 $C_G(F(G))=F(G)$。令 $F(G)=P=N_1\times\cdots\times N_t$,其中 $N_i(i=1,\cdots,t)$ 是群 G 的包含在 $F(G)$ 中的极小正规子群。因为 $\Phi(G)=1$,对群 G 的包含在 P 中的每一个极小正规子群 N,都存在 G 的一个极大子群 M 使得 $G=MN$ 并且 $N\cap M=1$。令 M_p 是 M 的 Sylow p-子群,$P=P\cap G=(P\cap M)\times N$,则 $G_p=PM_p$。令 P_1 是 G_p 中包含 M_p 的极大子群,记 $P_2=P_1\cap P$,则 $P_1=P_2M_p$,所以 $P_2\cap M_p=P\cap M_p$,因此 $p=|G_p:P_1|=|PM_p:P_2M_p|=|P:P_2|$,故 P_2 是 P 的极大子群。同理可得 $N^*=P_1\cap P$ 是 N 的极大子群。由于 P_2 在 G 中是弱 S-拟正规嵌入的,则存在群 G 的正规子群 K,使得 $P_2K\lhd G$ 且 $P_2\cap K$ 在 G 中 S-拟正规嵌入。由引理 1,$P_2\cap K$ 在 G 中 S-拟正规,从而有 $P_2\cap K\leqslant(P_2)_{sG}$。设 $(P\cap M)K=K_1$,则 $K_1\lhd G$ 且 $P_2K=N^*K_1$,这与定理 1 中情形 3)的证明类似,可以得 $N^*=1$,进一步得 $|N|=p$。

对任意的 i,商群 $G/C_G(N_i)$ 同构于 $Aut(N_i)$ 的子群,其中 $Aut(N_i)$ 是阶为 $p-1$ 的循环群。因为所有的 p-超可解群构成的群类是饱和群系,再由 $G/\bigcap_{i=1}^{t}(C_G(N_i))=G/C_G(F(G))$ 可得 G 是 p-超可解群,矛盾。 证毕

定理 3 设群 G 是 p-可解的,p 是整除 $|G|$ 的素因子且 $(|G|,p-1)=1$。如果 $F_p(G)$ 的非循环的 Sylow p-子群的任意极大子群在 G 中是弱 S-拟正规嵌入的,则 G 是 p-幂零的。

证明 假设结论不真。设 G 为极小阶反例。设 P 为 $F_p(G)$ 的一个非循环的 Sylow p-子群,类似于上面定理的论证,可得 1) $O_{p'}(G)=1$;2) $\Phi(G)=1$ 且 $F_p(G)=F(G)=O_p(G)$;3) $F(G)=P=N_1\times\cdots\times N_t$,其中 $N_i(i=1,\cdots,t)$ 是群 G 包含在 $F(G)$ 中的极小正规子群且是 p 阶循环群;4) 对于每个极小正规子群 N_i,$G/(C_G(N_i))$ 是 $p-1$ 阶循环群,因为 $(|G|,p-1)=1$,又有 $G=C_G(N_i)$,这导致 $G=C_G(F(G))=F(G)=O_p(G)$,矛盾。 证毕

参考文献:

[1] Ore O. Contributions in the theory of groups of finite groups[J]. J Duke Math, 1939(5): 431-460.

[2] Dekins W E. On qusinormal subgroups of finite groups[J]. Math Z, 1963, 82(2): 125-132.

[3] Kegel O H. Sylow-gruppen und subnormalteiler endlicher gruppen[J]. Math Z, 1962, 78(1): 205-221.

[4] Ballester-Bolinches A, Pedraza M C. Sufficient conditions for supersolvable of finite groups[J]. J Pure Appl Algebra, 1998, 127(2): 113-118.

[5] 徐满红, 郭文彬, 黄建红. 有限群的弱 S-拟正规嵌入子群[J]. 数学年刊 A 辑, 2011, 32(3): 229-306.
Xu M H, Guo W B, Huang J H. Finite groups with weakly S-quasinormally embedded subgroups[J]. Chinese Annals of Mathmatics Series A, 2011, 32(3): 229-306.

[6] 韦华全. 子群的特性与有限群的结构[D]. 广东中山: 中山大学, 2006.
Wei H Q. Some characteristics of subgroups and the structure of fine groups[D]. Zhongshan Guangdong: Sun Yat-Sen University, 2006.

[7] Miao L. On weakly s-permutable subgroups of finite groups [J]. Bull Braz Math Soc, 2010, 41(2): 223-235.

[8] Guo W. The theory of classes of groups[M]. NewYork: Science Press-Kluwer Academic Publisher, 2000.

[9] Miao L, Qian G H. A condition for the solvability of finite groups[J]. Siberian Math J, 2009, 50(4): 687-691.

[10] Wei H, Wang Y. On C^*-normality and its properties[J]. J Group Theory, 2007, 10(2): 211-223.

[11] 刘熠, 钟纯真, 王坤仁, 等. 关于优先群的 π-拟正规入子群[J]. 重庆师范大学学报: 自然科学版, 2009, 26(1): 57-60.
Liu Y, Zhong C Z, Wang K R, et al. On π-quasinormally embedelds subgroups of a finite group[J]. Journal of Chongqing Normal University: Natural Science, 2009, 26 (1): 57-60.

[12] 刘熠, 曾意, 王坤仁. S-拟正规子群对优先群结构的影响[J]. 四川师范大学学报: 自然科学版, 2009, 32(1): 39-42.
Liu Y. Zeng Y, Wang K R. The influence of S-qiasinormal subgroups on the structure of finite groups[J]. Journal of Sichuan Normal University: Natural Science, 2009, 32(1): 39-42.

Weakly S-Quasinormally Embedded Subgroups and p-Supersolvability of Finite Groups

YANG Li-ying[1], ZHONG Guo[1], WEI Hua-quan[1,2], MA Xuan-long[1]

(1. School of Mathematical Science, Guangxi Teachers Education University, Nanning 530023;
2. College of Mathematics and Information Science, Guangxi University, Nanning 530004, China)

Abstract: A subgroup H of a finite group G is called S-quasinormally embedded in G if for each prime $p \,\Big|\, |H|$, a Sylow p-subgroup of H is also a Sylow p- subgroup of some S-quasinormal subgroup of G. A subgroup H of G is called weakly S-quasinormally embedded in G if there exists a normal subgroup T of G such that $HT \lhd G$ and $H \cap T$ is S-quasinormally embedded in G. Using this concept, we investigate the structure of p-supersolvable groups and obtain some new results about the weakly S-quasinormally embedded subgroups as follows. Let G be a p-solvable group and p a prime divisor of $|G|$. 1) If every maximal subgroup of $F_p(G)$ containing $O_{p'}(G)$ is weakly S-quasinormally embedded in G, then G is p-supersolvable; 2) If every maximal subgroup of noncyclic Sylow p-subgroup of $F_P(G)$ is weakly S-quasinormally embedded in G, then G is p-supersolvable.

Key words: p-supersolvable groups; weakly S-quasinormally embedded subgroups; finite groups

(责任编辑 黄 颖)