2014 年 1 月 重庆师范大学学报(自然科学版) Jan. 2014
第 31 卷 第 1 期 Journal of Chongqing Normal University (Natural Science) Vol. 31 No. 1

DOI:10.11721/cqnuj20140112

求解 Laplace 方程的 Signorini 问题的边界元投影迭代法*

张守贵
(重庆师范大学 数学学院,重庆 401331)

摘要:对一类边界条件是非线性的 Laplace 方程的 Signorini 问题,提出了基于投影不动点方程的边界元迭代算法。由于 Signorini 边界条件 $u\geqslant h$、$\frac{\partial u}{\partial n}\geqslant 0$ 且 $(u-h)\frac{\partial u}{\partial n}=0$ 等价于的不动点问题 $\frac{\partial u}{\partial n}-\left[\frac{\partial u}{\partial n}-c(u-h)\right]_{+}=0$,因此可以通过投影迭代格式 $\frac{\partial u^{(k+1)}}{\partial n}=\left[\frac{\partial u^{(k)}}{\partial n}-c(u^{(k+1)}-h)\right]_{+}$ $(k=0,1,2,\cdots)$ 来满足 Signorini 边界条件,从而每一次迭代只需要求解一个标准的椭圆型混合边值问题。由于该算法是在 Signorini 边界上进行迭代,因此边界元方法很适合用于数值求解。然后利用投影性质和 Green 公式证明了算法的收敛性。最后,算例的数值结果表明了该算法的可行性和有效性。

关键词:Signorini 问题;Laplace 方程;不动点;投影迭代;边界元法

中图分类号:O241.82 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-6693(2014)01-0058-05

Signorini 问题是一类重要的非线性问题,具有广泛的应用背景。目前,大多数研究方法都基于变分不等式,然后结合其他数值方法,如有限元法、边界元法等进行数值求解。但是这些方法一般都要将问题化归为极小值问题,因此在具体的数值计算中还需要使用一些复杂的算法求出极小点,即 Signorini 问题的数值解。由于求解一般互补问题的投影算法收敛性需要较强的假设条件,因此实际应用于求解 Signoroni 问题难度较大。本文提出基于投影不动点方程的边界元迭代算法求解 Laplace 方程的 Signoroni 问题,计算非常方便。

1 Laplace 方程的 Signorini 问题的投影法

一般 Laplace 方程的 Signorini 问题的微分模型如下:假定 Ω 是 $\mathbf{R}^2$ 中的一有界开区域,其边界 $\Gamma=\Gamma_D\cup\Gamma_N\cup\Gamma_S$ 且 $\Gamma_S\neq\varnothing$,寻找函数 u 满足

$$\begin{cases}\Delta u=0,\text{在 }\Omega\text{ 内}\\ u=g,\text{在 }\Gamma_D\text{ 上}\\ \dfrac{\partial u}{\partial n}=q,\text{在 }\Gamma_N\text{ 上}\end{cases}\tag{1}$$

和 Signorini 边界条件

$$u\geqslant h,\frac{\partial u}{\partial n}\geqslant 0,(u-h)\frac{\partial u}{\partial n}=0,\text{在 }\Gamma_S\text{ 上}\tag{2}$$

其中 $h\in H^{1/2}(\Gamma_D)$, $g\in H^{1/2}(\Gamma_S)$ 和 $q\in H^{-1/2}(\Gamma_N)$ 均为已知函数。由文献[1]知,如果 $\Gamma_D\neq\varnothing$ 或者 $\int_{\Gamma_N}q\,\mathrm{d}x\leqslant 0$,则问题(1)和(2)有唯一解。为了便于在 $L^2(\Gamma)$ 空间中建立投影迭代方法并证明边界量迭代的收敛性,需要将边界函数包含于 $L^2(\Gamma)$ 空间中。为此将边界通量 $\frac{\partial u}{\partial n}\in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ 提高到 $\frac{\partial u}{\partial n}\in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\subset L^2(\Gamma)$,则边界量 $u|_{\Gamma}\in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)\subset L^2(\Gamma)$,这样所有的边界量都包含于 $L^2(\Gamma)$ 空间中[1-2]。由于上述 Signorini 问题的互补边界条件(2)是定义在区域边界上的,所以自边界元方法问世以来逐渐成为求解 Signorini 问题的重要数值方法[3-6]。

由于互补问题与不动点问题及数学规划等有着密切联系,文献[6]研究了 Signorini 边界互补条件(2)的一个等价的投影不动点形式和相应的迭代算法。本文考虑 Signorini 边界互补条件(2)的另一个等价形式。对任意的

* **收稿日期**:2012-12-05 **修回日期**:2013-12-06 **网络出版时间**:2014-01-16 08:16
资助项目:国家自然科学基金(No. 11101454);重师市科技项目(No. cstc2013jcyjA30001);重庆师范大学科研项目(No. 13XL010)
作者简介:张守贵,男,副教授,博士,研究方向为微分方程数值解,E-mail:shgzhang926@sina.com
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20140116.0816.009.html

实数 $a\in\mathbf{R}$,引入投影算子$[a]_+:=\max(a,0)$。利用投影算子的性质,则 Signorini 边界互补条件(2)可表示为等价的不动点问题[3-5]

$$\frac{\partial u}{\partial n}-\left[\frac{\partial u}{\partial n}-c(u-h)\right]_+=0,\text{在 }\Gamma_S\text{ 上}\tag{3}$$

其中 c 是任意正常数。从而把 Signorini 边界上的互补条件(2)转化为投影不动点方程(3),而其他边界条件不变。因此得到和 Laplace 方程的 Signorini 问题(1)和(2)等价的边值问题

$$\begin{cases}\Delta u=f,\text{在 }\Omega\text{ 内}\\ u=g,\text{在 }\Gamma_D\text{ 上}\\ \dfrac{\partial u}{\partial n}=q,\text{在 }\Gamma_N\text{ 上}\\ \dfrac{\partial u}{\partial n}-\left[\dfrac{\partial u}{\partial n}-c(u-h)\right]_+=0,\text{在 }\Gamma_S\text{ 上}\end{cases}\tag{4}$$

2 投影迭代格式及收敛性分析

利用不动点方程(3),提出投影迭代格式

$$\frac{\partial u^{(k+1)}}{\partial n}=\left[\frac{\partial u^{(k)}}{\partial n}-c(u^{(k+1)}-h)\right]_+,\text{在 }\Gamma_S\text{ 上}(k=0,1,2,\cdots)\tag{5}$$

在 Signorini 边界 Γ_S 上任意选取满足 $u^{(0)}\geqslant h$ 的初始值和正常数 $c>0$,把迭代格式(5)运用于(4)式得求解 Laplace 方程的 Signorini 问题(1)和(2)的投影迭代格式

$$\begin{cases}\Delta u^{(k+1)}=f,\text{在 }\Omega\text{ 内}\\ u^{(k+1)}=g,\text{在 }\Gamma_D\text{ 上}\\ \dfrac{\partial u^{(k+1)}}{\partial n}=q,\text{在 }\Gamma_N\text{ 上}\\ \dfrac{\partial u^{(k+1)}}{\partial n}=\left[\dfrac{\partial u^{(k)}}{\partial n}-c(u^{(k+1)}-h)\right]_+,\text{在 }\Gamma_S\text{ 上}\end{cases}\quad(k=0,1,2,\cdots)\tag{6}$$

下面证明由迭代格式(6)产生的序列$\{u^{(k)}\}$收敛于 Laplace 方程的 Signorini 问题(1)和(2)的唯一解[6-8]。用记号$\langle\cdot,\cdot\rangle_\Gamma$表示 $L^2(\Gamma)$内积,且范数 $\|u\|_\Gamma=\sqrt{\langle u,u\rangle_\Gamma}$。为证明算法收敛性,先证明一个关于序列$\{u^{(k)}\}$的不等式。

定理 1　若 u^* 是 Laplace 方程的 Signorini 问题(1)和(2)的解, $\{u^{(k)}\}$是由投影迭代格式(6)产生的序列,则该序列满足不等式

$$\left\langle u^{(k+1)}-h,\frac{\partial u^{(k)}}{\partial n}-\frac{\partial u^*}{\partial n}\right\rangle_{\Gamma_S}\geqslant\left\langle u^{(k+1)}-h,\frac{\partial u^{(k)}}{\partial n}-\frac{\partial u^{(k+1)}}{\partial n}\right\rangle_{\Gamma_S}(k=0,1,2,\cdots)\tag{7}$$

证明　由于 u^* 是 Signorini 问题(1)和(2)的解,则有 $u^*\geqslant h,\dfrac{\partial u^*}{\partial n}\geqslant0$ 且$(u^*-h)\dfrac{\partial u^*}{\partial n}=0$,在 Γ_S 上。

考虑 Signorini 边界 Γ_S 上由投影迭代格式(5)产生的迭代函数 $u^{(k+1)}$,可得

$$\left\langle u^*-h,\frac{\partial u^{(k+1)}}{\partial n}-\frac{\partial u^*}{\partial n}\right\rangle_{\Gamma_S}=\left\langle u^*-h,\frac{\partial u^{(k+1)}}{\partial n}\right\rangle_{\Gamma_S}-\left\langle u^*-h,\frac{\partial u^*}{\partial n}\right\rangle_{\Gamma_S}=\left\langle u^*-h,\frac{\partial u^{(k+1)}}{\partial n}\right\rangle_{\Gamma_S}\geqslant0$$

利用 Green 公式,则有

$$|\nabla(u^{(k+1)}-u^*)|^2_{L^2(\Omega)}=\left\langle u^{(k+1)}-u^*,\frac{\partial(u^{(k+1)}-u^*)}{\partial n}\right\rangle_{\Gamma_S}=$$

$$\left\langle u^{(k+1)}-h,\frac{\partial u^{(k+1)}}{\partial n}-\frac{\partial u^*}{\partial n}\right\rangle_{\Gamma_S}-\left\langle u^*-h,\frac{\partial u^{(k+1)}}{\partial n}-\frac{\partial u^*}{\partial n}\right\rangle_{\Gamma_S}\geqslant0$$

所以有$\left\langle u^{(k+1)}-h,\dfrac{\partial u^{(k+1)}}{\partial n}-\dfrac{\partial u^*}{\partial n}\right\rangle_{\Gamma_S}\geqslant\left\langle u^*-h,\dfrac{\partial u^{(k+1)}}{\partial n}-\dfrac{\partial u^*}{\partial n}\right\rangle_{\Gamma_S}\geqslant0$。从而得

$$\left\langle u^{(k+1)}-h,\frac{\partial u^{(k)}}{\partial n}-\frac{\partial u^*}{\partial n}\right\rangle_{\Gamma_S}=\left\langle u^{(k+1)}-h,\frac{\partial u^{(k)}}{\partial n}-\frac{\partial u^{(k+1)}}{\partial n}\right\rangle_{\Gamma_S}+$$

$$\left\langle u^{(k+1)}-h,\frac{\partial u^{(k+1)}}{\partial n}-\frac{\partial u^{*}}{\partial n}\right\rangle_{\Gamma_S}\geqslant\left\langle u^{(k+1)}-h,\frac{\partial u^{(k)}}{\partial n}-\frac{\partial u^{(k+1)}}{\partial n}\right\rangle_{\Gamma_S}$$ 证毕

定理 2 若$\{u^{(k)}\}$是由投影迭代格式(6)产生的序列,则当$k\to\infty$时,序列$\{u^{(k)}\}$收敛于 Laplace 方程的 Signorini 问题(1)和(2)的唯一解u^{*},即$\lim\limits_{k\to\infty}u^{(k)}=u^{*}$。

证明 由投影基本性质[8],对任意的$\frac{\partial u}{\partial n}\in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_S)$有$\left\|\left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]_{+}-\frac{\partial u^{*}}{\partial n}\right\|_{\Gamma_S}^{2}\leqslant\left\|\frac{\partial u}{\partial n}-\frac{\partial u^{*}}{\partial n}\right\|_{\Gamma_S}^{2}-\left\|\left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]_{+}-\frac{\partial u}{\partial n}\right\|_{\Gamma_S}^{2}$。取$\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{\partial u^{(k)}}{\partial n}-c(u^{(k+1)}-h)$代入上式,并由迭代格式(5)得

$$\left\|\frac{\partial u^{(k+1)}}{\partial n}-\frac{\partial u^{*}}{\partial n}\right\|_{\Gamma_S}^{2}\leqslant\left\|\frac{\partial u^{(k)}}{\partial n}-c(u^{(k+1)}-h)-\frac{\partial u^{*}}{\partial n}\right\|_{\Gamma_S}^{2}-\left\|\frac{\partial u^{(k+1)}}{\partial n}-\frac{\partial u^{(k)}}{\partial n}+c(u^{(k+1)}-h)\right\|_{\Gamma_S}^{2}(k=0,1,2,\cdots)\quad(8)$$

则由(7)、(8)式有

$$\left\|\frac{\partial u^{(k+1)}}{\partial n}-\frac{\partial u^{*}}{\partial n}\right\|_{\Gamma_S}^{2}\leqslant\left\|\frac{\partial u^{(k)}}{\partial n}-\frac{\partial u^{*}}{\partial n}\right\|_{\Gamma_S}^{2}-2c\left\langle u^{(k+1)}-h,\frac{\partial u^{(k)}}{\partial n}-\frac{\partial u^{*}}{\partial n}\right\rangle_{\Gamma_S}+2c\left\langle u^{(k+1)}-h,\frac{\partial u^{(k)}}{\partial n}-\frac{\partial u^{(k+1)}}{\partial n}\right\rangle_{\Gamma_S}-$$

$$\left\|\frac{\partial u^{(k+1)}}{\partial n}-\frac{\partial u^{(k)}}{\partial n}\right\|_{\Gamma_S}^{2}\leqslant\left\|\frac{\partial u^{(k)}}{\partial n}-\frac{\partial u^{*}}{\partial n}\right\|_{\Gamma_S}^{2}-2c\left\langle u^{(k+1)}-h,\frac{\partial u^{(k)}}{\partial n}-\frac{\partial u^{(k+1)}}{\partial n}\right\rangle_{\Gamma_S}+$$

$$2c\left\langle u^{(k+1)}-h,\frac{\partial u^{(k)}}{\partial n}-\frac{\partial u^{(k+1)}}{\partial n}\right\rangle_{\Gamma_S}-\left\|\frac{\partial u^{(k+1)}}{\partial n}-\frac{\partial u^{(k)}}{\partial n}\right\|_{\Gamma_S}^{2}$$

从而得$\left\|\frac{\partial u^{(k+1)}}{\partial n}-\frac{\partial u^{*}}{\partial n}\right\|_{\Gamma_S}^{2}\leqslant\left\|\frac{\partial u^{(k)}}{\partial n}-\frac{\partial u^{*}}{\partial n}\right\|_{\Gamma_S}^{2}-\left\|\frac{\partial u^{(k+1)}}{\partial n}-\frac{\partial u^{(k)}}{\partial n}\right\|_{\Gamma_S}^{2}$。显然序列$\left\{\frac{\partial u^{(k)}}{\partial n}\right\}$是有界的,并且有

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left\|\frac{\partial u^{(k+1)}}{\partial n}-\frac{\partial u^{(k)}}{\partial n}\right\|_{\Gamma_S}^{2}\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}\left(\left\|\frac{\partial u^{(k)}}{\partial n}-\frac{\partial u^{*}}{\partial n}\right\|_{\Gamma_S}^{2}-\left\|\frac{\partial u^{(k+1)}}{\partial n}-\frac{\partial u^{*}}{\partial n}\right\|_{\Gamma_S}^{2}\right)<+\infty$$

这表明$\left\{\frac{\partial u^{(k)}}{\partial n}\right\}$是柯西序列,因而它必收敛到 Laplace 方程的 Signorini 问题(1)和(2)的边界通量$\frac{\partial u^{*}}{\partial n}$,即$\lim\limits_{k\to\infty}\frac{\partial u^{(k)}}{\partial n}=\frac{\partial u^{*}}{\partial n}$。又因为 Signorini 问题(1)和(2)是可逆的,所以$\lim\limits_{k\to\infty}u^{(k)}=u^{*}$。 证毕

3 Laplace 方程的 Signorini 问题的投影迭代算法过程

利用投影迭代格式(6)数值求解 Signorini 问题(1)和(2),算法过程可以分成4步来完成,具体如下[2-3,6]。

第1步,假定在Γ_S上的初始条件为$u=h$,求解由(1)和(9)组成的混合边值问题,于是得到 Signorini 边界Γ_S上的法向导数并记为$\frac{\partial u^{(0)}}{\partial n}$。选取一个正常数$c>0$和误差限$\tau>0$,置$k=0$。

第2步,根据以下原则确定Γ_S上的边界条件[2,6]。把 Signorini 边界Γ_S上满足以下不等式的边界记为$\Gamma_{SD}^{(k)}$,$(u^{(k)}-h)-c\frac{\partial u^{(k)}}{\partial n}<0$,在$\Gamma_{SD}^{(k)}$上假定满足 Dirichlet 边界条件$u^{(k+1)}=h$,并把 Signorini 边界$\Gamma_S$余下的边界记为$\Gamma_{SR}^{(k)}$,假定在$\Gamma_{SR}^{(k)}$上满足条件$u^{(k+1)}=u^{(k)}-c\frac{\partial u^{(k+1)}}{\partial n}$。

第3步,求解椭圆边值问题$\begin{cases}\Delta u^{(k+1)}=f,\text{在 }\Omega\text{ 内}\\ u^{(k+1)}=g,\text{在 }\Gamma_D\text{ 上}\\ \frac{\partial u^{(k+1)}}{\partial n}=q,\text{在 }\Gamma_N\text{ 上}\\ u^{(k+1)}=h,\text{在 }\Gamma_{SD}^{(k)}\text{ 上}\\ \frac{\partial u^{(k+1)}}{\partial n}=\frac{1}{c}(u^{(k)}-u^{(k+1)}),\text{在 }\Gamma_{SR}^{(k)}\text{ 上}\end{cases}$。于是得到 Signorini 边界$\Gamma_S$上的函数$u^{(k+1)}$及其法向导数$\frac{\partial u^{(k+1)}}{\partial n}$。

第4步,如果$\|u^{(k+1)}-u^{(k)}\|_{\Gamma_S}\leqslant\tau\|u^{(k+1)}\|_{\Gamma_S}$,则迭代停止。否则,置$k:=k+1$并返回第2步。

由于上述算法过程是在区域边界上进行迭代,因此边界元方法非常适合以上算法数值求解 Laplace 方程的

Signorini 问题[6,9-10]。边界元法不仅将维数降低一维,而且便于更新 Signorini 边界上的数据。

4 数值例算[1]

考虑一个在圆环区域 $\Omega=\{x\in\mathbf{R}^2:a<|x|<b\}$ 上的 Laplace 方程的 Signorini 问题,在 $\Gamma_D=\{x\in\mathbf{R}^2:|x|=b\}$ 上为 Dirichlet 边界条件,在 $\Gamma_S=\{x\in\mathbf{R}^2:|x|=a\}$ 上为 Signorini 边界条件。这个问题的解析解可以通过如下的复值函数得到 $u(x_1,x_2)=\mathrm{Im}\ w\ (x_1+\mathrm{i}x_2)^3$,其中

$$w(x_1+\mathrm{i}x_2)=\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{x_1^2-x_2^2}{r^2}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{r^2}{a^2}-\frac{a^2}{r^2}\right)^2}+\frac{1}{4}\frac{x_1^2-x_2^2}{r^2}\left(\frac{r^2}{a^2}+\frac{a^2}{r^2}\right)}\ \mathrm{sign}\ x_1+$$

$$\mathrm{i}\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{x_1^2-x_2^2}{r^2}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{r^2}{a^2}-\frac{a^2}{r^2}\right)^2}-\frac{1}{4}\frac{x_1^2-x_2^2}{r^2}\left(\frac{r^2}{a^2}+\frac{a^2}{r^2}\right)}\ \mathrm{sign}\ x_2$$

其中 $r=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$, $|x_1|\geqslant a$。因此由解析解表达式很容易得到所有的边界条件。在 Γ_S 上的 Signorini 边界条件为 $u\geqslant h$, $\frac{\partial u}{\partial n}\geqslant\varphi$, $(u-h)(\frac{\partial u}{\partial n}-\varphi)=0$,其中

$$h(x_1,x_2)=\min(0,u(x_1,x_2)),\varphi(x_1,x_2)=\begin{cases}-\frac{6}{a}(x_2>0)\\ -\frac{6}{a^5}({x_1}^2-{x_2}^2)^2(x_2\leqslant 0,x_2\geqslant -|x_1|)\\ 0\ (x_2<-|x_1|)\end{cases}$$

在 Signorini 边界 Γ_S 上的解析解为 $u(x_1,x_2)=-\sqrt{\max\left(0,\frac{x_2^2-x_1^2}{a^2}\right)^3}\ \mathrm{sign}\ x_2$。

本文方法取 $a=0.1$ 和 $b=0.25$,并引入边界的参数表示形式 $t\to(a\cos 2\pi t,-a\sin 2\pi t)$ 和 $t\to(b\cos 2\pi t,b\sin 2\pi t)$。对参数 t 做均匀网格剖分,当在 Γ_S 和 Γ_D 上的单元数目分别为 32(即总的边界单元数为 64)时,取参数 $c=10\ 000$ 和误差限 $\tau=10^{-6}$,用常单元边界元方法进行测试,Signorini 边界上所得到位势的解析解和数值解如图 1 所示。结果表明,数值解结果和解析解是吻合的。

为了研究算法的收敛性,在边界 Γ 取不同的单元数 $N=16$、32、64、128 和 256,对不同节点 $t=\frac{1}{8}$、$\frac{2}{8}$、$\frac{4}{8}$ 和 $\frac{6}{8}$ 的数值结果进行了测试,在表 1 中给出了当 $c=10\ 000$ 的数值解。结果表明,当边界单元剖分加密时,数值解结果是收敛的。

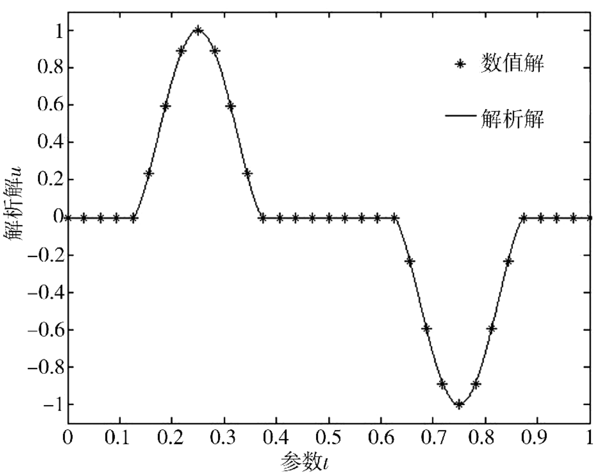

图 1　Γ_S 上位势的解析解和数值解结果

表 1　在 Γ_S 上部分节点位势的收敛情况

t	数值解					解析解
	$N=16$	$N=32$	$N=64$	$N=128$	$N=256$	
$\frac{1}{8}$	−0.182 9	−0.079 5	−0.033 4	−0.013 7	−0.005 6	0
$\frac{2}{8}$	0.940 0	0.977 8	0.991 9	0.997 1	0.999 0	1
$\frac{4}{8}$	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0
$\frac{6}{8}$	−0.940 0	−0.977 8	−0.991 9	−0.997 1	−0.999 0	−1

参考文献:

[1] SpannW. On the boundary element method for the Signorini problem of the Laplacian[J]. Numer Math,1993,65(1):

337-356.

[2] Raleigh I K, Kunisch K G. Semi-smooth Newton methods for the Signorini problem[J]. Appl Math, 2008, 53(5): 455-456.

[3] Aitchison J M, Poole M W. A numerical algorithm for the solution of Signorini problems[J]. J Comput Appl Math, 1998, 94(1): 55-67.

[4] 张凯，祝家麟，张洁. 椭圆单侧问题的边界元计算方法[J]. 重庆大学学报：自然科学版，2003，26(10)：27-30.
Zhang K, Zhu J L, Zhang J. The BEM for elliptic unilateral problems[J]. Journal of Chongqing University: Science Edition, 2003, 26(10): 27-30.

[5] 林鑫，李小林，张玲玲，等. Signorini 问题的虚边界元算法分析[J]. 重庆大学学报：自然科学版，2007，30(10)：101-107.
Lin X, Li X L, Zhang L L, et al. VBEM analysis for Signorini problem[J]. Journal of Chongqing University: Natural Science Edition, 2007, 30(10): 101-103.

[6] Zhang S G, Zhu J L. A projection iterative algorithm of boundary element method for the Signorini problem[J]. Eng Anal Bound Elem, 2013, 37(1): 176-181.

[7] Noor M A. Some developments in general variational inequalities[J]. Appl Math Comput, 2004, 152(1): 199-277.

[8] 韩继业，修乃华，戚厚铎. 非线性互补理论与算法[M]. 上海：上海科学技术出版社，2006.
Han J Y, Xiu N H, Qi H D. The theory and algorithm for nonlinear complementarity problem[M]. Shanghai: Shanghai Scientific and Technical Publishers, 2006.

[9] 祝家麟，袁政强. 边界元分析[M]. 北京：科学出版社，2009.
Zhu J L, Yuang Z Q. Analysis of the boundary elemet[M]. Beijing: Science Press, 2009.

[10] Brebbia C A. The boundary element for engineers[M]. London: Pentech Press, 1978.

A Projection Iterative Algorithm of Boundary Element Method for the Signorini Problem of Laplacian

ZHANG Shou-gui

(College of Mathematics Science, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: A boundary element projection iterative algorithm based on a fixed point equation is proposed for solving Signorini problems for the Laplacian equation, which contain the nonlinear boundary conditions. Since the Signorini boundary conditions $u \geqslant h$、$\frac{\partial u}{\partial n} \geqslant 0$ and $(u-h)\ \frac{\partial u}{\partial n}=0$ are equivalent to the fixed point problem $(u-h)-\left[(u-h)-c\frac{\partial u}{\partial n}\right]_+=0$, so that the satisfaction of the Signorini boundary conditions can be verified in a projection iterative scheme $\frac{\partial u^{(k+1)}}{\partial n}=\left[\frac{\partial u^{(k)}}{\partial n}-c\ (u^{(k+1)}-h)\right]_+$ $(k=0, 1, 2, \cdots)$. At each iterative step, we need solve only a standard elliptic mixed boundary value problem. As the iteration process is given on the boundary, the boundary element methods are more appropriate for the algorithm. We prove the convergence of the algorithm by the property of projection and Green's formula. Finally, the numerical results show the feasibility and effectiveness of the algorithm.

Key words: Signorini problem; Laplace equation; fixed point; projection iterative; boundary element method

(责任编辑 黄 颖)