DOI:10.11721/cqnuj20140114

有界区域上 MHD 方程的正则性准则*

张　辉
(安庆师范学院 数学学院,安徽 安庆 246011)

摘要:在三维空间的有界区域上考虑不可压缩 MHD 方程弱解的正则性准则。利用能量估计的方法证明了一些新的涉及压力项商的正则性准则。具体地,证明了若 MHD 方程的弱解 (u,b) 满足 $\frac{p}{1+|w^+|+|w^-|}\in L^p(0,T;L^q(\Omega))$; $\frac{2}{p}+\frac{3}{q}\leqslant 1$; $3<q\leqslant\infty$,或者 $\frac{\nabla p}{1+|w^+|+|w^-|}\in L^p(0,T;L^q(\Omega))$; $\frac{2}{p}+\frac{3}{q}\leqslant 2$; $\frac{3}{2}<q\leqslant\infty$,则 (u,b) 是存在区间 $(0,T]$ 上唯一的强解,其中 $w^+=u+b$; $w^-=u-b$。

关键词:MHD 方程;正则性准则;弱解

中图分类号:O175.29　　**文献标志码:**A　　**文章编号:**1672-6693(2014)01-0067-04

1 研究背景

设 $\Omega\subset\mathbf{R}^3$ 是一个有界区域,且边界足够光滑。考虑如下不可压缩 MHD 方程组

$$\begin{cases}\partial_t u+u\cdot\nabla u=\Delta u-\nabla p+b\cdot\nabla b, x\in\Omega, t>0\\ \partial_t b+u\cdot\nabla b=\Delta b+b\cdot\nabla u, x\in\Omega, t>0\\ \nabla\cdot u=\nabla\cdot b=0, x\in\Omega, t>0\\ u(x,0)=u_0; b(x,0)=b_0, x\in\Omega\\ u(x,t)=b(x,t)=0, x\in\partial\Omega, t>0\end{cases}\tag{1}$$

这里 $u(x,t)$,$b(x,t)$ 分别表示未知的速度场与磁场;$p(x,t)$ 表示未知的压力,$u_0(x)$,$b_0(x)$ 表示给定的初始速度场和磁场且在分布意义下满足 $\nabla\cdot u_0=\nabla\cdot b_0=0$。

关于方程(1)的研究已经有很长的历史。1972 年 Duvaut 与 Lions[1] 对三维 MHD 方程构建了类似 Navier-Stokes 方程的 Leray-Hopf 弱解;在初始条件足够光滑的情形下,强解的局部存在唯一性也已经被证明,更详细的结果可以参考文献[2]。三维 MHD 方程与三维 Navier-Stokes 方程一样,弱解的唯一性与大初值强解的整体存在性依然是未被解决的问题。

1962 年,Serrin[3] 对 Navier-Stokes 方程给出了一个关于速度场的正则性准则,即给速度场附加一些条件后,弱解是存在区间上唯一的强解;Serrin 的结果后来被广泛的改进与发展[4-16]。受到 Navier-Stokes 方程弱解正则性准则研究的启发,吴家宏[4-5] 在 MHD 方程中推广了 Serrin 型的正则性准则,何成与辛周平[6] 对文献[4-5]的结果进行了进一步的发展。具体地,证明了方程弱解 (u,b) 是存在区间上唯一的强解,如果速度场满足

$$u(x,t)\in L^p(0,T;L^q(\mathbf{R}^3)); \frac{2}{p}+\frac{3}{q}\leqslant 1; 3<q\leqslant\infty\tag{2}$$

或者

$$u(x,t)\in L^p(0,T;L^q(\mathbf{R}^3)); \frac{2}{p}+\frac{3}{q}\leqslant 2; \frac{3}{2}<q\leqslant\infty\tag{3}$$

2012 年,Kyungkenun Kang 等人[8] 将条件(2)、(3)推广到了一般有界区域。

利用如下的不等式($1<p<\infty$)

$$\|p\|_{L^p(\mathbf{R}^3)}\leqslant C(\|u\|^2_{L^{2p}(\mathbf{R}^3)}+\|b\|^2_{L^{2p}(\mathbf{R}^3)})\tag{4}$$

$$\|\nabla p\|_{L^p(\mathbf{R}^3)}\leqslant C(\|u|\nabla u|\|^2_{L^p(\mathbf{R}^3)}+\|b|\nabla b|\|^2_{L^p(\mathbf{R}^3)})\tag{5}$$

* **收稿日期:**2012-09-03　**网络出版时间:**2013-12-07　**网络出版时间:**2014-01-16 08:16
作者简介:张辉,男,讲师,研究方向为非线性偏微分方程,E-mail: zhangxtu@126.com
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20140116.0816.011.html

周勇[9]证明了关于压力项的正则性准则。由于在一般有界区域上不等式(4)、(5)并不一定成立,所以文献[9]的结论不能直接推广到有界区域上。2000年,Beirao da Veiga[10]在有界区域上对 Navier-Stokes 方程给出了一类商形式的正则性准则

$$\frac{p}{1+|u|}\in L^p(0,T;L^q(\Omega));\frac{2}{p}+\frac{3}{q}=1;3<q\leqslant\infty \tag{6}$$

条件(6)涉及了压力场与速度场,被称为"自然的替代假设"(Alternative natural assumptions)。在 Beirao da Veiga 工作的基础上文献[11-12]做了进一步的改进。

本文的目的是给出一类关于 MHD 方程商形式的正则性准则,通过压力项与速度场以及磁场的共同作用来控制强解的奇性发展。为了更好的体现磁场与速度场的共同作用,首先对方程(1)进行适当的改写,通过简单的复合,可以得到方程(1)的对称形式

$$\begin{cases}\partial_t w^+ + w^-\cdot\nabla w^+ = \Delta w^+ - \nabla p, x\in\Omega, t>0\\ \partial_t w^- + w^+\cdot\nabla w^- = \Delta w^+ - \nabla p, x\in\Omega, t>0\\ \nabla\cdot w^+ = \nabla\cdot w^- = 0, x\in\Omega, t>0\\ w^+(x,0)=u_0+b_0; w^-(x,0)=u_0-b, x\in\Omega\\ w^+(x,t)=w^-(x,t)=0, x\in\partial\Omega, t>0\end{cases} \tag{7}$$

2008年,何成[13]首次在 Lorentz 空间中用 w^+ 作为估计量得到了 MHD 方程一个新的正则性准则

$$w^+(x,t)\in L^p(0,T;L^{q,\infty}(\mathbf{R}^3));\frac{2}{p}+\frac{3}{q}\leqslant 1,3<q\leqslant\infty$$

2010年,Sadek Gala[14]在乘子空间中进行了进一步的改进。

本文主要证明如下的结论。

定理1　假设(u,b)是方程(1)的弱解,且$(u_0,b_0)\in H_0^1(\Omega)$,若满足

$$\frac{p}{1+|w^+|+|w^-|}\in L^p(0,T;L^q(\Omega));\frac{2}{p}+\frac{3}{q}\leqslant 1;3<q\leqslant\infty \tag{8}$$

或者

$$\frac{\nabla p}{1+|w^+|+|w^-|}\in L^p(0,T;L^q(\Omega));\frac{2}{p}+\frac{3}{q}\leqslant 2;\frac{3}{2}<q\leqslant\infty \tag{9}$$

则(u,b)是存在区间$(0,T]$上唯一的强解。

注1　对方程(7)的前两个方程两边作散度,则有

$$\Delta p=-\nabla\cdot(w^-\cdot\nabla w^+)=-\nabla\cdot(w^+\cdot\nabla w^-) \tag{10}$$

在一般有界区域上算子$(-\Delta)^{-1}\nabla$是无界的。定理的意义在于揭示了压力项与磁场以及速度场在控制 MHD 方程解的奇异点发展中的相互作用;所以也可以认为是一种"自然的替代假设"。

注2　因为$|w^+|+|w^-|\geqslant|w^++w^-|=2|u|$,所以定理推广了 Beirao da Veiga[10] 的结果,并且对于 Navier-Stokes 方程还获得了如下的正则性准则$\frac{\nabla p}{1+|u|}\in L^p(0,T;L^q(\Omega));\frac{2}{p}+\frac{3}{q}\leqslant 2;\frac{3}{2}<q\leqslant\infty$。为了简便,在本文中函数的$L^p$范数用$\|\cdot\|_p$表示;$H^s$范数用$\|\cdot\|_{H^s}$表示,$C$表示常数,它可能涉及到某些已经假定的量,如初值等。

2 定理的证明

从文献[8]可知,为了证明定理1,只需要证明如下的引理。

引理1　假设(u,b)是方程(1)的弱解,且$(u_0,b_0)\in H_0^1(\Omega)$。若满足条件(8)、(9),则

$$\sup_{t\in(0,T]}(\|u(t)\|_4^4+\|b(t)\|_4^4)\leqslant C$$

证明　将(7)式第1、2个方程分别乘上$4w^+|w^+|^2$,$4w^-|w^-|^2$并在Ω上积分,通过分部积分并且叠加有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|w^+\|_4^4+\|w^-\|_4^4)+2(\|\nabla|w^+|^2\|_2^2+\|\nabla|w^-|^2\|_2^2)\leqslant H_1+H_2$$

此处$H_1=-4\int_\Omega\nabla p\cdot w^+|w^+|^2\mathrm{d}x$;$H_2=-4\int_\Omega\nabla p\cdot w^-|w^-|^2\mathrm{d}x$。

首先证明满足条件(8)的情形，由边值条件，通过分部积分有 $H_1+H_2\leqslant 4\int_\Omega p[w^+\nabla|w^+|^2+w^-\nabla|w^-|^2]\mathrm{d}x$，令 $J=\dfrac{p}{1+|w^+|+|w^-|}$，利用 Holder 不等式与 Young 不等式有

$$H_1+H_2\leqslant 4\int_\Omega J[w^+\nabla|w^+|^2+w^-\nabla|w^-|^2][1+|w^+|+|w^-|]\mathrm{d}x\leqslant$$

$$4\int_\Omega J[\nabla|w^+|^2+\nabla|w^-|^2][1+|w^+|+|w^-|]^2\mathrm{d}x\leqslant$$

$$C\|J\|_q\ \|\nabla|w^+|^2+\nabla|w^-|^2\|_2\ \|1+|w^+|^2+|w^-|^2\|_\beta\leqslant$$

$$C(|\Omega|)\|J\|_q\ \|\nabla|w^+|^2+\nabla|w^-|^2\|_2^{1+\theta}\ \|1+|w^+|^2+|w^-|^2\|_2^{1-\theta}\leqslant$$

$$C(|\Omega|)\|J\|_q^{\frac{2}{1-\theta}}(\|w^+\|_4^4+\|w^-\|_4^4)+\|\nabla|w^+|^2\|_2^2+\|\nabla|w^-|^2\|_2^2$$

这里 $|\Omega|$ 表示区域的测度。上面式子中的指标满足 $\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{1}{2}$；$\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{3-2\theta}{6}$。

如果满足条件(8)，则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|w^+\|_4^4+\|w^-\|_4^4)+(\|\nabla|w^+|^2\|_2^2+\|\nabla|w^-|^2\|_2^2)\leqslant$$

$$C(|\Omega|)\|J\|_q^{\frac{2}{1-\theta}}(\|w^+\|_4^4+\|w^-\|_4^4)\leqslant C(|\Omega|)\|J\|_p^q(\|w^+\|_4^4+\|w^-\|_4^4)$$

利用 Gronwall 不等式，可以得到 $\sup\limits_{t\in[0,T]}(\|w^+\|_4^4+\|w^-\|_4^4)\leqslant C(|\Omega|)\exp\left\{\int_0^T\|J\|_q^p\mathrm{d}t\right\}$。由 Minkowski 不等式可知 $\sup\limits_{t\in[0,T]}(\|u\|_4^4+\|b\|_4^4)\leqslant C$。

其次证明满足条件(9)时的情形，令 $K=\dfrac{\nabla p}{1+|w^+|+|w^-|}$，利用 Holder 不等式与 Young 不等式有

$$H_1+H_2\leqslant 4\int_\Omega K[w^+|w^+|^2+w^-|w^-|^2][1+|w^+|+|w^-|]\mathrm{d}x\leqslant$$

$$C(|\Omega|)\int_\Omega|K|(|w^+|^4+|w^-|^4)\mathrm{d}x\leqslant$$

$$C(|\Omega|)\|K\|_q(\||w^+|^2\|_\alpha^2+\||w^-|^2\|_\alpha^2)\leqslant$$

$$C(|\Omega|)\|K\|_q^{\frac{1}{1-\delta}}(\|w^+\|_4^4+\|w^-\|_4^4)+\|\nabla|w^+|^2\|_2^2+\|\nabla|w^-|^2\|_2^2$$

上面的式子中的指标满足 $\dfrac{1}{q}+\dfrac{2}{\alpha}=1$；$\dfrac{1}{\alpha}=\dfrac{3-2\delta}{6}$。如果满足条件(9)，则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|w^+\|_4^4+\|w^-\|_4^4)+(\|\nabla|w^+|^2\|_2^2+\|\nabla|w^-|^2\|_2^2)\leqslant$$

$$C(|\Omega|)\|K\|_q^{\frac{1}{1-\delta}}(\|w^+\|_4^4+\|w^-\|_4^4)\leqslant C(|\Omega|)\|K\|_q^p(\|w^+\|_4^4+\|w^-\|_4^4)$$

利用 Gronwall 不等式，可以得到 $\sup\limits_{t\in[0,T]}(\|w^+\|_4^4+\|w^-\|_4^4)\leqslant C(|\Omega|)\exp\left\{\int_0^T\|K\|_q^p\mathrm{d}t\right\}$。　　证毕

参考文献：

[1] Duvaut G, Lions J L. Inequations en thermoelasticiteet magneto-Hydrodynamique[J]. Arch Rational Mech Anal, 1972, 46(4): 241-279.

[2] Sermange M, Teman R. Some mathematical questions related to the MHD equations[J]. Comm Pure Appl Math, 1983, 36(5): 635-664.

[3] Serrin J. On the interior regularity of weak solutions of the Navier-Stokes equations[J]. Arch Rat Mech Anal, 1962, 9(1): 187-191.

[4] Wu J H. Bounds and new approaches for the 3D MHD equations[J]. Non-linear Sci, 2002, 12(4): 395-413.

[5] Wu J H. Regularity results for weak solutions of the 3D MHD equations[J]. Discrete Contin Dyn Syst, 2004, 10(1/2): 543-556.

[6] He C, Xin Z. On the regularity of solutions to the Magneto-hydrodynamic equations[J]. J Differential equations, 2005, 213(2): 235-254.

[7] Zhou Y. Remarks on regularities for the 3D MHD equations [J]. Discrete Contin Dyn Syst, 2005, 12(5): 881-886.

[8] Kang K, Kim J M. Regularity criteria of the magnetohydrodynamic equations in bounded domain or a half space[J]. J Differential Equations, 2012, 253(2): 764-794.

[9] Zhou Y. Regularity criteria for 3D MHD equations in terms of the pressure[J]. Internat J Non-linear Mech, 2006, 41

(10):1174-1180.

[10] Beirao da H V. A sufficient condition on the pressure for the regularity of weak solutions to the Navier-Stokes equations[J]. J Math Fluid Mech, 2000(2):99-106.

[11] Zhou Y. Regularity criteria in terms of pressure for the 3-D Navier-Stokes equations in a generic domain[J]. Math Ann, 2004, 328(1/2):173-192.

[12] Guo Z G, Gala S. Remarks on logarithmical regularity criteria for the Navier-Stokes equations[J]. J Math Phys, 2011, 52(6):063503.

[13] He C, Wang Y. Remark on the regularity for weak solutions to the MHD equations[J]. Math Methods Appl Sci, 2008, 31(14):1667-1684.

[14] Gala S. Extension criterion on regularity for weak solutions to the 3D MHD equations[J]. Math Methods Appl Sci, 2010, 33(12):1496-1503.

[15] 罗玉文.广义磁流体力学方程组的部分正则性[J].重庆师范大学学报:自然科学版,2010,27(4):41-43.

Luo Y W. Partial regularity of generalized MHD equations[J]. Journal of Chongqing Normal University: Natural Science, 2010, 27(4):41-43.

[16] 韩天勇,李树勇.时滞 2D-Navier-Stocks 方程的全局吸引子[J].四川师范大学学报:自然科学版,2006,29(3):257-261.

Han T Y, Li S Y. The global attractor of 2D-Navier-Stocks equations with delay[J]. Journal of Sichuan Normal University: Natural Science, 2006, 29(3):257-261.

Regularity Criteria to the MHD Equations in a Bounded Domain

ZHANG Hui

(School of Mathematics, Anqing Teacher's College, Anqing Anhui 246011, China)

Abstract: This paper considers the regularity criteria to the 3D MHD equations in a bounded domain. By energy method, we show some new regularity criteria in terms of pressure. It is proved that if $\frac{p}{1+|w^+|+|w^-|}\in L^p(0, T; L^q(\Omega))$; $\frac{2}{p}+\frac{3}{q}\leqslant 1$; $3<q\leqslant\infty$ or $\frac{\nabla p}{1+|w^+|+|w^-|}\in L^p(0, T; L^q(\Omega))$; $\frac{2}{p}+\frac{3}{q}\leqslant 2$; $\frac{3}{2}<q\leqslant\infty$. Then the weak solution (u, b) is the unique strong solution.

Key words: MHD equations; regularity criteria; weak solutions

(责任编辑 黄 颖)