DOI:10.11721/cqnuj20140115

# 耗散 SRLW 方程的拟紧致平均隐式守恒差分格式*

郑茂波

(成都工业学院 信息与计算科学系，成都 611730)

**摘要:** 对具有耗散项的对称正则长波(SRLW)方程的一类初边值问题进行了数值研究。利用紧致差分格式的构造思想，在数值离散时，引入拟紧致项$\frac{h^2}{12}(u_j^n)_{x\bar{x}\hat{t}}$，从而对耗散 SRLW 方程的初边值问题提出了一个新的三层守恒差分格式，其截断误差为$O(\tau^2+h^2)$；分析了新格式的离散守恒律，并合理地模拟了初边值问题本身的两个守恒量；该格式是一个线性差分格式，数值求解时不需要迭代，计算时间比较节约；得到了差分解的先验估计，并用离散泛函分析方法证明了该格式二阶收敛性与无条件稳定性。最后通过数值试验与已有的二阶格式进行了比较，结果表明新格式不仅保持了线性格式计算量小的特点，而且数值精度有了显著地提高，同时数值结果也验证了新格式的二阶精度和守恒性质。

**关键词:** 耗散；对称正则长波方程；差分格式；守恒；收敛性；稳定性

**中图分类号:** O241.82 **文献标志码:** A **文章编号:** 1672-6693(2014)01-0071-05

在研究弱非线性离子声波和空间带电波的传播时，文献[1]提出了对称正则长波(SRLW)方程

$$u_{xxt}-u_t=\rho_x+uu_x \quad (1) \qquad \rho_t+u_x=0 \quad (2)$$

并给出了方程(1)、(2)的双曲正割平方形式的孤立波解和 4 个不变量及一些数值结果。关于 SRLW 方程(1)、(2)的定解问题的适定性及数值方法的研究也引起了广泛关注[2-5]。本文考虑如下一类具有耗散项的对称正则长波(SRLW)方程的初边值问题

$$u_{xxt}-u_t+\upsilon u_{xx}=\rho_x+uu_x \quad (3) \qquad \rho_t+u_x=0 \quad (4)$$

$$u(x,0)=u_0(x),\rho(x,0)=\rho_0(x),x\in[x_L,x_R] \quad (5)$$

$$u(x_L,t)=u(x_R,t)=0,\rho(x_L,t)=\rho(x_R,t)=0,t\in[0,T] \quad (6)$$

其中$\upsilon>0$是耗散系数。不难证明，该问题具有如下守恒律

$$Q_1(t)=\int_{x_L}^{x_R}u(x,t)\mathrm{d}x=\int_{x_L}^{x_R}u_0(x)\mathrm{d}x=Q_1(0) \quad (7) \qquad Q_2(t)=\int_{x_L}^{x_R}\rho(x,t)\mathrm{d}x=\int_{x_L}^{x_R}\rho_0(x)\mathrm{d}x=Q_2(0) \quad (8)$$

由于在实际问题中粘性耗散是不可避免的，而且与色散一样起着十分重要的作用，因此在考虑耗散时，方程(3)、(4)式是反映非线性离子声波运动本质现象的合理模型[6]。文献[6-10]分别讨论了方程(3)、(4)式的解的适定性和整体存在唯一性以及解的长时间性态等，但其解析解很难求出，于是，研究其定解问题的数值解就很有价值。文献[11-12]对问题(3)～(6)分别提出了一个具有二阶精度的两层的非线性差分格式和三层线性差分格式，文献[13-15]进一步对带有阻尼项的耗散 SRLW 方程进行了数值研究，但都没有考虑问题的守恒律，本文运用文献[5]的处理技巧，在保持二阶理论精度的情况下，构造了问题(3)～(6)的一个三层拟紧致差分格式，格式保持了线性格式计算较快的特点，并合理地模拟了守恒量(7)、(8)式，从而适合长时间计算。数值算例表明，相对于一般的二阶格式[12]，该格式的精度有了明显的提高。

## 1 差分解的估计和守恒律

对区域$[x_L,x_R]\times[0,T]$作网格剖分，取空间步长$h=\frac{x_R-x_L}{J}$，时间步长为$\tau$，$x_j=x_L+jh$，$j=0,1,2,\cdots,J$，$t_n=n\tau$，$n=0,1,2,\cdots,N$，$N=\left[\frac{T}{\tau}\right]$。在本文中，记$u_j^n\approx u(x_j,t_n)$和$\rho_j^n\approx\rho(x_j,t_n)$，用$C$表示一般正常数(即在不

* **收稿日期:** 2012-12-19 **修回日期:** 2013-11-31 **网络出版时间:** 2014-01-16 08:16

**资助项目:** 四川省教育厅青年基金项目(No. 11ZB009)

**作者简介:** 郑茂波，男，讲师，研究方向为偏微分方程数值解法，E-mail: zmb1984@126.com

**网络出版地址:** http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20140116.0816.019.html

同地方可以有不同的取值),并定义如下记号:$(u_j^n)_x=\dfrac{u_{j+1}^n-u_j^n}{h}$,$(u_j^n)_{\bar{x}}=\dfrac{u_j^n-u_{j-1}^n}{h}$,$(u_j^n)_{\hat{x}}=\dfrac{u_{j+1}^n-u_{j-1}^n}{2h}$,$(u_j^n)_{\hat{t}}=\dfrac{u_j^{n+1}-u_j^{n-1}}{2\tau}$,$\bar{u}_j^n=\dfrac{u_j^{n+1}+u_j^{n-1}}{2}$,$\langle u^n,v^n\rangle=h\sum\limits_{j=0}^{J-1}u_j^nv_j^n$,$\|u^n\|^2=\langle u^n,u^n\rangle$,$\|u^n\|_\infty=\max\limits_{0\leqslant j\leqslant J-1}|u_j^n|$。

对初边值问题(3)~(6)考虑如下有限差分格式

$$(u_j^n)_{\hat{t}}-\left(1-\frac{h^2}{12}\right)(u_j^n)_{x\bar{x}\hat{t}}+(\bar{\rho}_j^n)_{\hat{x}}-\upsilon(\bar{u}_j^n)_{x\bar{x}}+\frac{1}{3}[u_j^n(\bar{u}_j^n)_{\hat{x}}+(u_j^n\bar{u}_j^n)_{\hat{x}}]=0 \tag{9}$$

$$(\rho_j^n)_{\hat{t}}+\frac{h^2}{6}(\rho_j^n)_{x\bar{x}\hat{t}}+(\bar{u}_j^n)_{\hat{x}}=0 \tag{10}$$

$$u_j^0=u_0(x_j),\rho_j^0=\rho_0(x_j),0\leqslant j\leqslant J \tag{11}$$
$$u_0^n=u_J^n=0,\rho_0^n=\rho_J^n=0,0\leqslant n\leqslant N \tag{12}$$

**定理1** 差分格式(9)~(12)关于以下离散能量守恒

$$Q_1^n=\frac{h}{2}\sum_{j=1}^{J-1}(u_j^{n+1}+u_j^n)+\frac{h}{6}\tau\sum_{j=1}^{J-1}u_j^n(u_j^{n+1})_{\hat{x}}=Q_1^{n-1}=\cdots=Q_1^0,Q_2^n=h\sum_{j=1}^{J-1}\frac{\rho_j^{n+1}+\rho_j^n}{2}=Q_2^{n-1}=\cdots=Q_2^0$$

**证明** (9)、(10)式两端乘以$h$后分别对$j$求和,考虑到边界条件(12)以及分部求和公式,得$h\sum\limits_{j=1}^{J-1}(u_j^n)_{\hat{t}}+\dfrac{h}{6}\sum\limits_{j=1}^{J-1}[u_j^n(u_j^{n+1})_{\hat{x}}-u_j^{n-1}(u_j^n)_{\hat{x}}]=0$,$h\sum\limits_{j=1}^{J-1}(\rho_j^n)_{\hat{t}}=0$,然后由$Q_1^n$和$Q_2^n$的定义,将上两式对$n$递推可得。 证毕

**定理2** 设$u_0\in H^1$,$\rho_0\in L_2$,则差分格式(9)~(12)的解满足$\|u^n\|\leqslant C$,$\|u_x^n\|\leqslant C$,$\|\rho^n\|\leqslant C$,$\|u^n\|_\infty\leqslant C$,$n=1,2,\cdots,N$。

**证明** (9)式与$2\bar{u}^n$作内积,由边界条件(12)和分部求和公式[3,11]得

$$\|u^n\|_{\hat{t}}^2+\left(1-\frac{h^2}{12}\right)\|u_x^n\|_{\hat{t}}^2+\langle\bar{\rho}_{\hat{x}}^n,2\bar{u}^n\rangle+2\upsilon\|\bar{u}_x^n\|^2+\langle P,2\bar{u}^n\rangle=0 \tag{13}$$

其中$P=\dfrac{1}{3}[u_j^n(\bar{u}_j^n)_{\hat{x}}+(u_j^n\bar{u}_j^n)_{\hat{x}}]$,又

$$\langle\bar{\rho}_{\hat{x}}^n,2\bar{u}^n\rangle=-\langle\bar{u}_{\hat{x}}^n,2\bar{\rho}^n\rangle \tag{14}$$

$$\langle P,2\bar{u}^n\rangle=\frac{1}{3}\sum_{j=0}^{J-1}[u_j^n(\bar{u}_{j+1}^n-\bar{u}_{j-1}^n)+u_{j+1}^n\bar{u}_{j+1}^n-u_{j-1}^n\bar{u}_{j-1}^n]\bar{u}_j^n=$$
$$\frac{1}{3}\sum_{j=0}^{J-1}(u_{j+1}^n\bar{u}_{j+1}^n\bar{u}_j^n+u_j^n\bar{u}_{j+1}^n\bar{u}_j^n)-\frac{1}{12}\sum_{j=0}^{J-1}(u_j^n\bar{u}_j^n\bar{u}_{j-1}^n+u_{j-1}^n\bar{u}_j^n\bar{u}_{j-1}^n)=0 \tag{15}$$

将(14)、(15)式代入(13)式,得

$$\|u^n\|_{\hat{t}}^2+\left(1-\frac{h^2}{12}\right)\|u_x^n\|_{\hat{t}}^2-\langle\bar{u}_{\hat{x}}^n,2\bar{\rho}^n\rangle+2\upsilon\|\bar{u}_x^n\|^2=0 \tag{16}$$

再将(10)式与$2\bar{\rho}^n$作内积后与(16)式相加,整理得

$$(\|u^n\|^2+\|\rho^n\|^2)_{\hat{t}}+\left(1-\frac{h^2}{12}\right)\|u_x^n\|_{\hat{t}}^2-\frac{h^2}{6}\|\rho_x^n\|_{\hat{t}}^2=-2\upsilon\|\bar{u}_x^n\|^2\leqslant 0 \tag{17}$$

将(17)式递推,可得

$$(\|u^{n+1}\|^2+\|u^n\|^2+\|\rho^{n+1}\|^2+\|\rho^n\|^2)+\left(1-\frac{h^2}{12}\right)(\|u_x^{n+1}\|^2+\|u_x^n\|^2)-\frac{h^2}{6}(\|\rho_x^{n+1}\|^2+\|\rho_x^n\|^2)\leqslant C \tag{18}$$

由$\|\rho_x^n\|^2=h\sum\limits_{j=1}^{J-1}\left(\dfrac{\rho_{j+1}^n-\rho_j^n}{h}\right)^2\leqslant\dfrac{4}{h^2}\|\rho^n\|^2$,有

$$\frac{h^2}{6}(\|\rho_x^{n+1}\|^2+\|\rho_x^n\|^2)\leqslant\frac{2}{3}(\|\rho^{n+1}\|^2+\|\rho^n\|^2) \tag{19}$$

取适当小的$h$,使$\left(1-\dfrac{h^2}{12}\right)>0$,由(18)、(19)式可得$\|u^n\|\leqslant C$,$\|u_x^n\|\leqslant C$,$\|\rho^n\|\leqslant C$,再由离散的Sobolev不等式[3]即得$\|u^n\|_\infty\leqslant C$。 证毕

## 2 差分格式的收敛性与稳定性

令问题(3)~(6)的解为$v(x,t)$和$\varphi(x,t)$,即$v_j^n=u(x_j,t_n)$,$\varphi_j^n=\rho(x_j,t_n)$,则差分格式(9)~(12)的截断误差

为
$$r_j^n=(v_j^n)_{\hat t}-\left(1-\frac{h^2}{12}\right)(v_j^n)_{x\bar x\hat t}+(\bar\varphi_j^n)_{\hat x}-\upsilon(\bar v_j^n)_{x\bar x}+\frac{1}{3}[v_j^n(\bar v_j^n)_{\hat x}+(v_j^n\bar v_j^n)_{\hat x}] \tag{20}$$
$$s_j^n=(\varphi_j^n)_{\hat t}+\frac{h^2}{6}(\varphi_j^n)_{x\bar x\hat t}+(\bar v_j^n)_{\hat x} \tag{21}$$
由 Taylor 展开，可知，当 $h,\tau\to 0$ 时，$|r_j^n|+|s_j^n|=O(\tau^2+h^2)$。

**定理 3**　设 $u_0\in H^1$，$\rho_0\in L_2$，则差分格式(9)～(12)的解 $u^n$ 以 $\|\cdot\|_\infty$，$\rho^n$ 以 $\|\cdot\|_{L^2}$ 收敛到初边值问题(3)、(6)的解，且收敛阶为 $O(\tau^2+h^2)$。

**证明**　将(20)式减去(9)式，(21)式减去(10)式，并记 $e_j^n=v_j^n-u_j^n$，$\eta_j^n=\varphi_j^n-\rho_j^n$，得
$$r_j^n=(e_j^n)_{\hat t}-\left(1-\frac{h^2}{12}\right)(e_j^n)_{x\bar x\hat t}+(\bar\eta_j^n)_{\hat x}-\upsilon(\bar e_j^n)_{x\bar x}+R_j \tag{22}$$
$$s_j^n=(\eta_j^n)_{\hat t}+\frac{h^2}{6}(\eta_j^n)_{x\bar x\hat t}+(\bar e_j^n)_{\hat x} \tag{23}$$
其中 $R_j=\frac{1}{3}[v_j^n(\bar v_j^n)_{\hat x}-u_j^n(\bar u_j^n)_{\hat x}]+\frac{1}{3}[(v_j^n\bar v_j^n)_{\hat x}-(u_j^n\bar u_j^n)_{\hat x}]$。将(22)式两端与 $2\bar e^n$ 作内积，并注意到 $\langle\bar\eta^n_{\hat x},2\bar e^n\rangle=-\langle\bar\eta^n,2\bar e^n_{\hat x}\rangle$，整理得
$$\|e^n\|_{\hat t}^2+(1-\frac{h^2}{12})\|e_x^n\|_{\hat t}^2-\langle\bar\eta^n,2\bar e^n_{\hat x}\rangle+2\upsilon\|\bar e_x^n\|^2=\langle r^n,2\bar e^n\rangle-\langle R,2\bar e^n\rangle \tag{24}$$
类似(15)式有 $h\sum_{j=0}^{J-1}[e_j^n(\bar e_j^n)_{\hat x}+(e_j^n\bar e_j^n)_{\hat x}]\bar e_j^n=0$，再由定理 2 及 Schwarz 不等式，得
$$\begin{aligned}-\langle R,2\bar e^n\rangle=&-\frac{2}{3}h\sum_{j=0}^{J-1}[e_j^n(\bar e_j^n)_{\hat x}+u_j^n(\bar e_j^n)_{\hat x}+e_j^n(\bar u_j^n)_{\hat x}]\bar e_j^n-\frac{2}{3}h\sum_{j=0}^{J-1}[e_j^n\bar e_j^n+e_j^n\bar u_j^n+u_j^n\bar e_j^n]_{\hat x}\bar e_j^n=\\&-\frac{2}{3}h\sum_{j=0}^{J-1}[u_j^n(\bar e_j^n)_{\hat x}+e_j^n(\bar u_j^n)_{\hat x}]\bar e_j^n+\frac{2}{3}h\sum_{j=0}^{J-1}[e_j^n\bar u_j^n+u_j^n\bar e_j^n](\bar e_j^n)_{\hat x}\leqslant\\&C[\|e^{n+1}\|^2+\|e^n\|^2+\|e^{n-1}\|^2+\|e_x^{n+1}\|^2+\|e_x^n\|^2+\|e_x^{n-1}\|^2]\end{aligned} \tag{25}$$
$$\langle r^n,2\bar e^n\rangle=\langle r^n,e^{n+1}+e^{n-1}\rangle\leqslant\|r^n\|^2+\frac{1}{2}[\|e^{n+1}\|^2+\|e^{n-1}\|^2] \tag{26}$$
再将(23)式两端与 $2\bar\eta^n$ 作内积，整理得
$$\|\eta^n\|_{\hat t}^2-\frac{h^2}{6}\|\eta_x^n\|_{\hat t}^2+\langle\bar e^n_{\hat x},2\bar\eta^n\rangle=\langle s^n,2\bar\eta^n\rangle\leqslant\|s^n\|^2+\frac{1}{2}[\|\eta^{n+1}\|^2+\|\eta^{n-1}\|^2] \tag{27}$$
将(24)式和(27)式相加，结合(25)、(26)式得　$(\|e^n\|^2+\|\eta^n\|^2)_{\hat t}+\left(1-\frac{h^2}{12}\right)\|e_x^n\|_{\hat t}^2-\frac{h^2}{6}\|\eta_x^n\|_{\hat t}^2\leqslant$
$$C[\|e^{n+1}\|^2+\|e^{n-1}\|^2+\|e^n\|^2+\|e_x^{n+1}\|^2+\|e_x^n\|^2+\|e_x^{n-1}\|^2+\|\eta^{n+1}\|^2+\|\eta^{n-1}\|^2]+\|r^n\|^2+\|s^n\|^2 \tag{28}$$
令 $B^n=(\|e^{n+1}\|^2+\|e^n\|^2)+(\|e_x^{n+1}\|^2+\|e_x^n\|^2)+(\|\eta^{n+1}\|^2+\|\eta^n\|^2)$，且类似(19)式，有 $\frac{h^2}{6}(\|\eta_x^{n+1}\|^2+\|\eta_x^n\|^2)\leqslant\frac{2}{3}(\|\eta^{n+1}\|^2+\|\eta^n\|^2)$。于是取适当小的 $h$ 使得 $1-\frac{h^2}{12}>0$，则(28)式可变为 $B^n-B^{n-1}\leqslant C\tau\|r^n\|^2+C\tau\|s^n\|^2+C\tau(B^n+B^{n-1})$，只要取足够小的 $\tau$，满足 $1-C\tau=\delta>0$，就有
$$B^n-B^{n-1}\leqslant C\tau\|r^n\|^2+C\tau\|s^n\|^2+C\tau B^{n-1} \tag{29}$$
对(29)式从 1 到 $n$ 求和得 $B^n\leqslant B^0+C\tau\sum_{l=1}^{n}\|r^l\|^2+C\tau\sum_{l=1}^{n}\|s^l\|^2+C\tau\sum_{l=0}^{n-1}B^l$。适当选择一个二阶方法(如 C-N 格式[11])先计算出 $u^1$ 和 $\rho^1$，使之满足 $B^0=O(\tau^2+h^2)^2$，又
$$\tau\sum_{l=1}^{n}\|r^l\|^2\leqslant n\tau\max_{1\leqslant l\leqslant n}\|r^l\|^2\leqslant T\cdot O(\tau^2+h^2)^2,\ \tau\sum_{l=1}^{n}\|s^l\|^2\leqslant n\tau\max_{1\leqslant l\leqslant n}\|s^l\|^2\leqslant T\cdot O(\tau^2+h^2)^2$$
于是有 $B^n\leqslant O(\tau^2+h^2)^2+C\tau\sum_{l=0}^{n-1}B^l$。由离散的 Gronwall 不等式[3,11]可得，$B^n\leqslant O(\tau^2+h^2)^2$，即 $\|e^n\|\leqslant O(\tau^2+h^2)$，$\|e_x^n\|\leqslant O(\tau^2+h^2)$，$\|\eta^n\|\leqslant O(\tau^2+h^2)$。再由离散的 Sobolev 不等式[3,11]有 $\|e^n\|_\infty\leqslant O(\tau^2+h^2)$。　证毕

与定理 3 类似，可以证明如下定理。

**定理 4**　在定理 3 的条件下，差分格式(9)～(12)的解 $u^n$ 以 $\|\cdot\|_\infty$，$\rho^n$ 以 $\|\cdot\|_{L^2}$ 稳定。

## 3 数值实验

在 $t=0$ 时,由于耗散还没有产生,所以在数值实验中,把问题(3)～(6)中的初值函数取为 SRLW 方程(1)、(2)的初值函数[11]($t=0$ 时),$u_0(x)=\frac{5}{2}\mathrm{sec}\,h^2\frac{\sqrt{5}}{6}x$,$\rho_0(x)=\frac{5}{3}\mathrm{sec}\,h^2\frac{\sqrt{5}}{6}x$,固定 $-x_L=x_R=20$,$T=1.0$,取 $\upsilon=1$。用类似文献[11]中的误差估计方法,将细网格($\tau=h=\frac{1}{160}$)上的数值解作为精确解来估计误差。为了便于比较,记本文的格式为格式1,记文献[12]中的格式为格式2。就 $\tau$ 和 $h$ 的不同取值对格式1和格式2进行了比较,数值解和孤波解在几个不同时刻的 $l_\infty$ 误差见表1,格式对守恒量的模拟见表2。

**表1　两种格式在不同时刻的 $l_\infty$ 误差比较**

| | | 格式1 | | | 格式2 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $\tau=h=0.1$ | $\tau=h=0.05$ | $\tau=h=0.025$ | $\tau=h=0.1$ | $\tau=h=0.05$ | $\tau=h=0.025$ |
| $u$ | $t=0.2$ | 7.989 33e−4 | 1.980 19e−4 | 4.715 44e−5 | 8.546 22e−4 | 2.119 60e−4 | 5.047 49e−5 |
| | $t=0.4$ | 1.509 24e−3 | 3.744 82e−4 | 8.919 89e−5 | 1.626 54e−3 | 4.032 73e−4 | 9.607 19e−5 |
| | $t=0.6$ | 2.143 87e−3 | 5.314 65e−4 | 1.266 56e−4 | 2.321 02e−3 | 5.759 32e−4 | 1.372 65e−4 |
| | $t=0.8$ | 2.697 06e−3 | 6.694 66e−4 | 1.595 86e−4 | 2.942 22e−3 | 7.297 40e−4 | 1.739 65e−4 |
| | $t=1.0$ | 3.177 96e−3 | 7.882 05e−4 | 1.878 96e−4 | 3.477 08e−3 | 8.636 22e−4 | 2.058 68e−4 |
| $\rho$ | $t=0.2$ | 8.726 65e−4 | 2.163 78e−4 | 5.154 27e−5 | 1.014 15e−3 | 2.516 50e−4 | 5.997 26e−5 |
| | $t=0.4$ | 1.595 25e−3 | 3.949 92e−4 | 9.402 68e−5 | 1.851 62e−3 | 4.592 64e−4 | 1.093 93e−4 |
| | $t=0.6$ | 2.159 87e−3 | 5.331 96e−4 | 1.268 66e−4 | 2.504 05e−3 | 6.196 79e−4 | 1.475 23e−4 |
| | $t=0.8$ | 2.565 39e−3 | 6.320 97e−4 | 1.502 21e−4 | 2.970 90e−3 | 7.334 94e−4 | 1.744 48e−4 |
| | $t=1.0$ | 2.824 85e−3 | 6.945 19e−4 | 1.649 00e−4 | 3.261 38e−3 | 8.035 93e−4 | 1.910 05e−4 |

**表2　格式1对守恒量的模拟**

| | $Q_1^n$ | | | $Q_2^n$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\tau=h=0.1$ | $\tau=h=0.05$ | $\tau=h=0.025$ | $\tau=h=0.1$ | $\tau=h=0.05$ | $\tau=h=0.025$ |
| $t=0$ | 13.416 397 75 | 13.416 398 34 | 13.416 398 60 | 8.944 265 918 | 8.944 265 908 | 8.944 265 906 |
| $t=0.2$ | 13.416 882 18 | 13.416 515 84 | 13.416 421 30 | 8.944 265 728 | 8.944 265 814 | 8.944 265 859 |
| $t=0.4$ | 13.417 304 11 | 13.416 617 65 | 13.416 440 53 | 8.944 265 691 | 8.944 265 797 | 8.944 265 851 |
| $t=0.6$ | 13.417 666 88 | 13.416 701 36 | 13.416 452 42 | 8.944 265 626 | 8.944 265 767 | 8.944 265 836 |
| $t=0.8$ | 13.417 976 76 | 13.416 767 61 | 13.416 456 13 | 8.944 265 521 | 8.944 265 718 | 8.944 265 812 |
| $t=1.0$ | 13.418 125 99 | 13.416 794 23 | 13.416 454 53 | 8.944 265 451 | 8.944 265 685 | 8.944 265 796 |

从表1和表2可以看出,格式1合理地模拟了问题(3)～(6)的两个守恒量,同时具有二阶精度,且格式1的精度明显优于格式2。另外,本文的格式是线性的,数值求解时不需要迭代,从而计算时间比较节省。所以本文对问题(3)～(6)所提出的差分格式(9)～(12)是可信的。

**参考文献:**


[1] Seyler C E, Fenstermacler D C. A Symmetric regularized long wave equation[J]. Phys Fluids, 1984, 27(1): 4-7.

[2] Guo B L. The spectral method for symmetric regularized wave equations [J]. J Comput Math, 1987, 5(4): 297-306.

[3] 柏琰,张鲁明. 对称正则长波方程的一个守恒差分格式[J]. 应用数学学报, 2007, 30(2): 248-255.
Bo Y, Zhang L M. A conservative finite difference scheme for Symmetric regularized long wave equations [J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 2007, 30(2): 248-255.

[4] Wang T C, Zhang L, Chen F Q. Conservative schemes for the symmetric regularized long wave equations[J]. Appl Math Comput, 2007, 190(2): 1063-1080.

[5] 王廷春,张鲁明. 对称正则长波方程的拟紧致守恒差分逼近[J]. 数学物理学报 A, 2006, 26(7), 1039-1046.
Wang T C, Zhang L M. Pseudo-compact conservative finite difference approximate solution for the symmetric regularized long wave equation[J]. Acta Mathematica Scientia A, 2006, 26(7): 1039-1046.

[6] Guo B L, Shang Y D. Approximate inertial manifolds to the generalized symmetric regularized long wave equations with damping term[J]. Acta Math Appl Sinica, 2003, 19(2): 191-204.

[7] Shang Y D, Guo B L, Fang S M. Long time behavior of the dissipative generalized symmetric regularized long wave equations[J]. J Partial Diff Eqs, 2002, 15(1): 35-45.

[8] 尚亚东,郭柏灵. 耗散的广义对称正则长波方程周期初值问题的整体吸引子[J]. 数学物理学报 A, 2003, 23(6): 745-757.
ShangY D, Guo B L. Global attractors for a periodic initial value problem for dissipative generalized symmetric regularized long wave equations[J]. Acta Mathematica Scientia A, 2003, 23(6): 745-757.

[9] 尚亚东,郭柏灵. 带有阻尼项的广义对称正则长波方程的指数吸引子[J]. 应用数学和力学, 2005, 26(3): 259-266.
ShangY D, Guo B L. Exponential attractor for the generalized symmetric regularized long wave equation with damping term[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2005, 26(3): 259-266.

[10] Fang S M, Guo B L, Qiu H. The existence of global attractors for a system of multi-dimensional symmetric regularized long wave equations[J]. Commun Nonlinear Sci Numer Simulat, 2009, 14(1): 61-68.

[11] 胡劲松,胡兵,徐友才. 耗散对称正则长波方程的有限差分逼近[J]. 计算数学, 2011, 33(2): 177-184.
Hu J S, Hu B, Xu Y C. Finite difference approximate solution for disssipative Symmetric regularized long wave equation[J]. Mathematica Numerica Sinica, 2011, 33(2): 177-184.

[12] 胡劲松,徐友才,胡兵. 耗散对称正则长波方程的平均隐式差分格式[J]. 高等学校计算数学学报, 2012, 34(4): 300-307.
Hu J S, Xu Y C, Hu B. Average implicit finite difference scheme for dissipative Symmetric regularized long wave equation[J]. Numerical Mathematica a Journal of Chinese Universities, 2012, 34(4): 300-307.

[13] Hu J S, Xu Y C, Hu B. A linear difference scheme for dissipative symmetric regularized long wave equations with damping term[EB/OL]. (2010-11-30)[2012-12-15]. http://www.boundaryvalueproblems.com/content/2010/1/781750/.

[14] Hu J S, Hu B, Xu Y C. C-N difference schemes for dissipative Symmetric regularized long wave equations with damping term[EB/OL]. (2011-02-25)[2012-12-15]. http://www.emis.de/journals/HOA/MPE/Volume2011/651642.pdf.

[15] Xu Y, Hu B, Xie X, et al. Mixed finite element analysis for dissipative SRLW equations with damping term[J]. Appl Math Comput, 2012, 218(9): 4788-4797.

## A Pseudo-compact Conservative Average Finite Difference Scheme for Dissipation SRLW Eqation

ZHENG Mao-bo

(College of Information and Computation Science, Chengdu Technological University, Chengdu 611730, China)

**Abstract**: We study the initial-boundary problem of the dissipative SRLWE by finite difference method. Using pseudo-compact difference scheme constructed thinking; a new three-level conservative average finite difference scheme containing the pseudo-compact items $\frac{h^2}{12}(u_j^n)_{x\bar{x}\hat{t}}$ is designed. Then we analyze the discrete conservation properties for the new scheme and simulate two conserved properties of the problem well. The scheme is linearized and does not require iteration, so it is expected to be more efficient. And the prior estimate of the solution is obtained. It is shown that the finite difference scheme is second-order convergence and unconditionally stable. Finally, the results of numerical experiments comparing with existing scheme show that the new scheme will not only maintain the characteristics of a small amount of calculation and also make calculations with higher precision. At the same time the second-order convergence and conservation properties of the scheme is verified.

**Key words**: dissipative; SRLW equation; difference scheme; conservative; convergence; stable

(责任编辑　黄　颖)