DOI:10.11721/cqnuj20140116

h-正则函数的一类 Hilbert 边值问题*

司 中 伟
(乐山师范学院 数学与信息科学学院, 四川 乐山 614004)

摘要:设 $\mathbf{R}_{0,n}$ 是由 n 维实线性空间的基 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 生成的实 Clifford 代数,其中 $e_i^2=-1, e_ie_j+e_je_i=-2\delta_{ij}, \delta_{ij}$ 为通常的 Kronecker δ 函数, $i,j=1,2,\cdots,n$。e_0 是单位元。基于实 Clifford 代数 $\mathbf{R}_{0,n}$ 可以分解为 $\mathbf{R}_{0,n}=\mathbf{R}e_0+(\mathbf{R}_{0,n}-\mathbf{R}e_0)$ 形式的唯一性,通过附加 2^{n-1} 个边值条件,最后得到了上半平面内 h-正则函数的一类 Hilbert 边值问题的唯一解,其中 $h=\sum_{i=0}^{n} h_ie_i$。首先给出了 h-正则函数在 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中的基本解。通过作对称函数扩张的方法,得到了下半平面内的一类 h^*-函数,这里 $h^*=\sum_{i=0}^{n-1} h_ie_i-h_ne_n$。通过把 Hilbert 边值问题转化为 Riemann 边值问题的思想,并借助于 h-正则函数的刘维尔型定理及延拓定理,给出了上半平面内 h-正则函数的 Hilbert 边值问题的解的具体表达式。

关键词:h-正则函数; $\hat{H}^u$ 函数; Hilbert 边值问题
中图分类号:O175　　**文献标志码:**A　　**文章编号:**1672-6693(2014)01-0076-04

众所周知,Helmholtz 方程在物理工程应用等方面有重要的作用。有学者研究了一类 Helmholtz 方程及其 Riemann 边值问题[1-2]。本文所要研究的 h-正则函数与 Helmholtz 方程有密切的关系。所谓 h-正则函数,即在开集 Ω 中满足方程 $D_xu(x)+\hat{u}(x)h=0$ 的一类函数,其中 $D_x=\sum_{i=0}^{n} e_i\partial_{x_i}, \hat{u}(x)=\sum_{A}(-1)^{\# A}u_A(x)e_A$, $\# A$ 表示 A 中元素的个数, $h=\sum_{i=0}^{n} h_ie_i$ 是多向量常数。若 $\varphi(x)$ 是 Helmholtz 方程 $\Delta\varphi-|h|^2\varphi=0$ 在 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中的任意解,则 $\overline{D}_x\varphi-\hat{\varphi}h$ 是一类 h-正则函数。

本文主要讨论了 h-正则函数在上半平面内的 Hilbert 边值问题,并得到了唯一解。此外本文只考虑 $n=2m$ 的情形。

1 预备知识

设 $\mathbf{R}_{0,n}$ 是由实线性空间的基 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 生成的实 Clifford 代数,其中 $e_i^2=-1, e_ie_j+e_je_i=-2\delta_{ij}, \delta_{ij}$ 为通常的 Kronecker δ 函数, $i,j=1,2,\cdots,n$。e_0 是单位元。任意的 $b\in\mathbf{R}_{0,n}$,则 b 具有形式 $b=\sum_{\beta} b_\beta e_\beta$, 其中 $b_\beta\in\mathbf{R}$, $e_\beta=e_{\beta_1}e_{\beta_2}\cdots e_{\beta_h}$, $1\leqslant\beta_1<\beta_2<\cdots<\beta_h\leqslant n$。$b$ 的共轭表示为 $\bar{b}=\sum_{\beta} b_\beta\bar{e}_\beta$, $\bar{e}_\beta=\bar{e}_{\beta_h}\cdots\bar{e}_{\beta_2}\bar{e}_{\beta_1}$, $\bar{e}_0=e_0, \bar{e}_j=-e_j$, $j=1,2,\cdots,n$。$b\in\mathbf{R}_{0,n}$, 其中 e_0 的系数 b_0 称为 b 的实部。若 $x\in\mathbf{R}^{n+1}$,即 $x=\sum_{j=0}^{n} e_jx_j$ 称为 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中的多向量形式,或表示为 $x=Z_x+e_nx_n$ 或 $x=(Z_x, x_n)$, 其中 $Z_x=\sum_{j=0}^{n-1} x_je_j$。对于 $b=\sum_{\beta} b_\beta e_\beta$,可以将 b 分解成形式 $b=b_0e_0+\sum_{\beta\neq e_0} b_\beta e_\beta$,易证这种分解形式是唯一的。规定 $\mathrm{Re}\, b=b_0$, $\mathrm{Im}\, b=\sum_{\beta\neq e_0} b_\beta e_\beta$。特别的,有 $\mathrm{Re}\, x=x_0$, $\mathrm{Im}\, x=\sum_{i=0}^{n} x_ie_i$。显然这种分解形式是经典复分析中复数分解为实部与虚部形式的推广。

* 收稿日期:2012-12-25　修回日期:2013-12-04　网络出版时间:2014-01-16 08:16
资助项目:乐山师范学院科研项目(No. Z1265);国家自然科学基金(No. 11171260);教育部博士点专项基金(No. 20100141110054)
作者简介:司中伟,男,讲师,博士,研究方向为复分析及其边值问题,E-mail: zhongweisi@126.com
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20140116.0816.020.html

规定 $\mathbf{R}_{+}^{n+1}=\{x \mid x_n>0\}$,$\mathbf{R}_{-}^{n+1}=\{x \mid x_n<0\}$,$\mathbf{R}_{0}^{n+1}=\{x \mid x_n=0\}$,$\overline{\mathbf{R}}_{+}^{n+1}=\mathbf{R}_{+}^{n+1}\cup R_{0}^{n+1}$,$\overline{\mathbf{R}}_{-}^{n+1}=\mathbf{R}_{-}^{n+1}\cup \mathbf{R}_{0}^{n+1}$。

Clifford 代数中[3-6] 的模定义为 $|b|=\sqrt{(b,b)}=(\sum_{\beta} b_{\beta}^{2})^{\frac{1}{2}}$。定义 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中的 Dirac 算子为 $D_x=\sum_{i=0}^{n} e_i \partial_{x_i}$。

定义 1[7]　设 Ω 为 $\mathbf{R}^{n+1}$ 的开集。$u(x)$ 称为 h- 正则函数,若在 Ω 中,$u(x)$ 满足 $D_x u(x)+\hat{u}(x)h=0$,其中 h 为多向量常数。

引理 1[8]　h-正则函数在 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中的基本解为 $g^{A}(r)=[\overline{D}_x G_{n+1}(r)]e_A-G_{n+1}(r)\hat{e}_A h$,对所有的 $A:0\leqslant\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_k\leqslant n$,其中 $G_{n+1}(r)=(\frac{1}{1-n}\frac{1}{r^{n-1}}+b_{n-2}\frac{1}{r^{n-2}}+\cdots+b_m\frac{1}{r^m})e^{-|h|r}$,$r=|x|$。

本文假定∞点是 $\mathbf{R}_{0}^{n+1}$ 中的点。

定义 2[9]　设 f 是定义在 $\mathbf{R}_{0}^{n+1}$ 上的 $\mathbf{R}_{0,n-1}$-值的连续函数。f 称为 $\mathbf{R}_{0,n-1}$-值的指数为 $\mu(0<\mu<1)$ 的 $\hat{H}^{\mu}(\mathbf{R}_{0}^{n+1})$ 函数,若 f 满足下列条件

$$|f(x)-f(y)|\leqslant C_1\ |x-y|^{\mu},x,y\in B(O;R)\subset\mathbf{R}_{0}^{n+1}$$

$$|f(x)-f(y)|\leqslant C_2\ |x^{-1}-y^{-1}|^{\mu},x,y\in(\mathbf{R}_{0}^{n+1}\backslash(B(O;R))\cup\partial B(O;R))$$

这里 $R>0$ 是任意的常数,$B(O;R)=\{t\in\mathbf{R}_{0}^{n+1}:|t|\leqslant R\}$是 $\mathbf{R}_{0}^{n+1}$ 中半径为 R 的球,C_1,C_2 是依赖于 R 和 f 的常数,$\partial B(O;R)$是 $B(O;R)$的球面。

引理 2[8]　设 $u(x)$ 是上半平面 $\mathbf{R}_{+}^{n+1}$ 内的 h- 正则函数。定义 $u_{*}(x)=\sum_{n\notin A}[u_A(x^{*})e_A-u_{An}(x^{*})e_{An}]$,则 $u_{*}(x)$ 是 $\mathbf{R}_{-}^{n+1}$ 内的 h^{*}- 正则函数,其中 $x^{*}=Z_x-x_n e_n$,$h^{*}=\sum_{k=0}^{n-1}h_k e_k-h_n e_n$。

定义 3　设 f 是 $\mathbf{R}_{0,n-1}$-值的 $\hat{H}^{\mu}(\mathbf{R}_{0}^{n+1})$函数。定义

$$F(x)=\frac{1}{\omega_{n+1}}\int_{\mathbf{R}_{0}^{n+1}}[\overline{D}_y G_{n+1}(r)n(y)f(y)+G_{n+1}(r)\overline{n}(y)\hat{f}(y)h]\mathrm{d}s(y)\overset{\Delta}{=}$$

$$\lim_{\mathbf{R}\to+\infty}\frac{1}{\omega_{n+1}}\int_{|y|\leqslant\mathbf{R}}[\overline{D}_y G_{n+1}(r)n(y)f(y)+G_{n+1}(r)\overline{n}(y)\hat{f}(y)h]\mathrm{d}s(y)$$

这里 $x=Z_x+x_n e_n\in\mathbf{R}_{\pm}^{n+1}$,$\omega_{n+1}$是 $\mathbf{R}^{n+1}$中单位球的表面积,$n(y)$是 $\mathbf{R}_{0}^{n+1}$ 中指向 $\mathbf{R}_{-}^{n+1}$方向的单位法向量,$\mathrm{d}s(y)$是 $\mathbf{R}_{0}^{n+1}$ 上关于积分变量 y 的测度。

定义 4　设 f 是 $\mathbf{R}_{0,n-1}$-值的 $\hat{H}^{\mu}(\mathbf{R}_{0}^{n+1})$函数。定义

$$(Sf)(t)=\frac{1}{\omega_{n+1}}\int_{\mathbf{R}_{0}^{n+1}}[\overline{D}_y G_{n+1}(\tau)n(y)f(y)+G_{n+1}(\tau)\overline{n}(y)\hat{f}(y)h]\mathrm{d}s(y)\overset{\Delta}{=}$$

$$\lim_{\substack{\mathbf{R}\to+\infty\\ \varepsilon\to0^{+}}}\frac{1}{\omega_{n+1}}\int_{\substack{|y|\leqslant\mathbf{R}\\ |y-t|\geqslant\varepsilon}}[\overline{D}_y G_{n+1}(\tau)n(y)f(y)+G_{n+1}(\tau)\overline{n}(y)\hat{f}(y)h]\mathrm{d}s(y)$$

其中 $\tau=|y-t|$,$t\in\mathbf{R}_{0}^{n+1}$。

引理 3[8,10]　$F(\infty)=\lim_{\substack{x\to\infty\\ x\in\mathbf{R}_{0}^{n+1}}}F(x)=0$。

2 h-正则函数的 Hilbert 边值问题

引理 4[8,11-12]　(Riemann 边值问题)求一个函数 $u(x)$使其满足下列方程

$$\begin{cases}D_x u(x)+\hat{u}(x)h=0,x\in\mathbf{R}_{+}^{n+1}\\ D_x u(x)+\hat{u}(x)h'=0,x\in\mathbf{R}_{-}^{n+1}\end{cases}\tag{1}$$

使其在无穷远处取值为零且满足边界条件 $u^{+}(t)=u^{-}(t)G+g(t)$,$t\in\mathbf{R}_{0}^{n+1}$,其中 $h'=\hat{G}hG^{-1}$,G^{-1} 存在,$h=\sum_{k=0}^{n}h_k e_k$ 为多向量常数,$g(t)$ 为 $\mathbf{R}_{0,n-1}$- 值的 $\hat{H}^{\mu}(\mathbf{R}_{0}^{n+1})$ 函数。则满足边值条件(1)的解是唯一的,且其解具有形式

$$u(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\omega_{n+1}}\displaystyle\int_{\mathbf{R}_0^{n+1}}[\overline{D}_yG_{n+1}(r)n(y)g(y)+G_{n+1}(r)\overline{n}(y)\hat{g}(y)h]\mathrm{d}s(y),x\in\mathbf{R}_+^{n+1}\\ \dfrac{1}{\omega_{n+1}}\displaystyle\int_{\mathbf{R}_0^{n+1}}[\overline{D}_yG_{n+1}(r)n(y)g(y)+G_{n+1}(r)\overline{n}(y)\hat{g}(y)h]\mathrm{d}s(y)G^{-1},x\in\mathbf{R}_-^{n+1}\end{cases}$$

定理 1 寻求在 $\mathbf{R}_+^{n+1}$ 内的 $\mathbf{R}_{0,n}$-值的 h-正则函数 $u(x)$,使其连续延拓到 $\mathbf{R}_0^{n+1}$,且满足正边值条件

$$\mathrm{Re}(u^+(t)\lambda e_A)=f_A(t),t\in\mathbf{R}_0^{n+1}\tag{2}$$

要求 $u(x)$在无穷远处取值为零,其中 $e_A:\{e_n,e_{1n},\cdots,e_{n-1}e_n,\cdots,e_{123\cdots n}\}$,$A$ 取$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k\}$ 中 2^{n-1} 个所有不同的组合,$(0\leqslant\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_k\leqslant n)$,$f_A\in\hat{H}^\mu(\mathbf{R}_0^{n+1})$ 为实值函数,$\lambda=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\lambda_ke_k$,$h=\sum\limits_{k=0}^{n-1}h_ke_k$ 是任意给定的多向量常数,则该 Hilbert 边值问题是唯一可解的,且其解具有形式

$$u(x)=\frac{2}{\omega_{n+1}}\int_{\mathbf{R}_0^{n+1}}[\overline{D}_yG_{n+1}(r)n(y)(\sum_{n\notin A}v_{An}(y)e_{An})+G_{n+1}(r)\overline{n}(y)(\sum_{n\notin A}\hat{v}_{An}(y)e_{An})h']\mathrm{d}s(y)\lambda^{-1}$$

其中 $v_A(x)=(-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}f_A(x)$,$k$ 为 A 中元素的个数,$h'=\hat{\lambda}^{-1}h\lambda$。

证明 考虑函数 $v(x)=u(x)\lambda,x\in\mathbf{R}_+^{n+1}$。注意到在 $\mathbf{R}_+^{n+1}$ 内 $v(x)$ 满足方程 $D_xv(x)+\hat{v}(x)h'=0$,其中 $h'=\hat{\lambda}^{-1}h\lambda=\sum\limits_{k=0}^{n-1}h'_ke_k$ 。

定义 $W(x)=\begin{cases}v(x)=\sum\limits_{A}v_A(x)e_A,x\in\mathbf{R}_+^{n+1}\\ \sum\limits_{n\notin A}[v_A(x^*)e_A-v_{An}(x^*)e_{An}],x\in\mathbf{R}_-^{n+1}\end{cases}$,$W(x)$ 是 $\mathbf{R}_+^{n+1}$ 内的 h'- 正则函数。由引理 2 知,$W(x)$ 为 $\mathbf{R}_-^{n+1}$ 内的 h'^*- 正则函数。由于 $h'^*=h'$,故 $W(x)$ 为 $\mathbf{R}_+^{n+1}\cup\mathbf{R}_-^{n+1}$ 内的 h'- 正则函数。

边界条件(2)可以改写为 $\mathrm{Re}(W^+(t)e_A)=(-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}v_A(t)=f_A(t)$,$k$ 为A 中元素的个数。$W(x)$ 满足边值条件 $W^+(t)-W^-(t)=2\sum\limits_{n\notin A}v_{An}(t)e_{An},t\in\mathbf{R}_0^{n+1}$。由引理 4,有

$$W(x)=\frac{2}{\omega_{n+1}}\int_{\mathbf{R}_0^{n+1}}[\overline{D}_yG_{n+1}(r)n(y)(\sum_{n\notin A}v_{An}(y)e_{An})+G_{n+1}(r)\overline{n}(y)(\sum_{n\notin A}\hat{v}_{An}(y)e_{An})h']\mathrm{d}s(y),x\in\mathbf{R}_+^{n+1}$$

因此有

$$u(x)=W(x)\lambda^{-1}=\frac{2}{\omega_{n+1}}\int_{\mathbf{R}_0^{n+1}}[\overline{D}_yG_{n+1}(r)n(y)(\sum_{n\notin A}v_{An}(y)e_{An})+G_{n+1}(r)\overline{n}(y)(\sum_{n\notin A}\hat{v}_{An}(y)e_{An})h']\mathrm{d}s(y)\lambda^{-1}$$

其中 $v_A(x)=(-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}f_A(x)$,$k$ 为 A 中元素的个数,$h'=\hat{\lambda}^{-1}h\lambda$ 。 证毕

对于 e_A 不包含 e_n 的情形,有以下定理。

定理 2 寻求一个在 $\mathbf{R}_+^{n+1}$ 内的 $\mathbf{R}_{0,n}$- 值的 h- 正则函数 $u(x)$,使其连续延拓到 $\mathbf{R}_0^{n+1}$,满足正边值条件 $\mathrm{Re}(u^+(t)\lambda e_A)=f_A(t),t\in\mathbf{R}_0^{n+1}$,且要求 $u(x)$ 在无穷远处取值为零,其中 $e_A:\{e_1,e_2,\cdots,e_{n-1},\cdots,e_{123\cdots n-1}\}$,$A$ 取$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k\}$ 中 2^{n-1} 个所有不同的组合,$(0\leqslant\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_k\leqslant n-1)$,$f_A\in\hat{H}^\mu(\mathbf{R}_0^{n+1})$ 为实值函数,$\lambda=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\lambda_ke_k$,$h=\sum\limits_{k=0}^{n-1}h_ke_k$ 是任意给定的 Clifford 多向量常数,则该问题是唯一可解的,其解具有形式

$$u(x)=\frac{2}{\omega_{n+1}}\int_{\mathbf{R}_0^{n+1}}[\overline{D}_yG_{n+1}(r)n(y)(\sum_{n\notin A}v_A(y)e_A)+G_{n+1}(r)\overline{n}(y)(\sum_{n\notin A}\hat{v}_A(y)e_A)h']\mathrm{d}s(y)\lambda^{-1}$$

其中 $v_A(x)=(-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}f_A(x)$,$k$ 为 A 中元素的个数,$h'=\hat{\lambda}^{-1}h\lambda$ 。

参考文献:

[1] Xu Z Y. Helmholtz equations and boundary value problems. Partial differential equations with complex analysis[J]. Pitman Res Notes Math Ser,1992,262:204-214.

[2] 李丹,杨丕文. $\mathbf{R}^2$ 中变形 Helmholtz 方程的 Riemann 边值问题[J]. 四川师范大学学报:自然科学版,2013,36(4):494-499.
Li D,Yang P W. Riemann boundary Value problems for the modified Helmhdtz equations in $\mathbf{R}^2$[J]. Journal of Sichuan Normal University:Natural Science,2013,36(4):494-499.

[3] Brackx F,Delanghe R,Sommen F. Clifford analysis[M]. Boston:Pitman Publishers,1982.

[4] Gilbert J E, Murray M. Clifford algebra and Dirac operators in Harmonic analysis[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1991.

[5] Delanghe R, Sommen F, Souček V. Clifford algebra and spinor valued functions: a function theory for the dirac operator [M]. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1992.

[6] 李觉有. Clifford 分析中的 k 正则函数的性质及 Riemann 边值问题[J]. 四川师范大学学报:自然科学版, 2007, 30(4): 430-433.

Li J Y. The properties of k-regular funcitons in Clifford analysis and some Riemann boundary values problems[J]. Journal of Sichuan Normal University: Nature Science, 2007, 30(4): 430-433.

[7] Obolashvili E. Partial differential equations in Clifford analysis[M]. Florida USA: CRC Press, 1999.

[8] Si Z W, Du J Y, Duan P. The left Hilbert BVP for h-regular functions in Clifford analysis[J]. Advances in Applied Clifford Algebras, 2013, 23(2): 519-533.

[9] Gong Y F, Du J Y. A kind of Riemann and Hilbert boundary value problem for left monogenic functions in $\mathbf{R}^m$ ($m\geqslant 2$)[J]. Complex Variables, 2004, 49(5): 303-318.

[10] Ji X H, Qian T, Ryan J. Fourier theory under Möbius transformations[J]. Clifford Algebras and their Applications in Mathematical Physics, 2000, 19(2): 57-80.

[11] Delanghe R. On regular points and Liouville's theorem for functions with values in a Clifford algebra[J]. Simon Stevin, 1970, 44: 55-66.

[12] Bernstein S. On the left linear Riemann problem in Clifford analysis[J]. Bull Belg Math Soc, 1996, 3(5): 557-576.

Some Hilbert Boundary Value Problem for h-Regular Functions

SI Zhong-wei

(School of Mathematics and Information Science, Leshan Normal University, Leshan Sichuan 614004, China)

Abstract: Let $\mathbf{R}_{0,n}$ be the real Clifford algebra generated by vectors e_1, e_2, $\cdots$, e_n, where $e_i^2=-1$, $e_ie_j+e_je_i=-2\delta_{ij}$. e_0 is the unit element. Based on the unique decomposition of $\mathbf{R}_{0,n}=\mathbf{R}e_0+(\mathbf{R}_{0,n}-\mathbf{R}e_0)$, the authors restrict 2^{n-1} boundary conditions, at last the unique solution of Hilbert boundary value problem for h-regular functions in the above half space is obtained, where $h=\sum_{i=0}^{n}h_ie_i$. We first give the fundamental solution for h-regular functions in $\mathbf{R}^{n+1}$. Then by expansion of symmetric function, we get a h^*-regular function in the below half space, where $h^*=\sum_{i=0}^{n-1}h_ie_i-h_ne_n$. With the help of Liouville type theorem and extension theorem, we translate the Hilbert boundary value problem into Riemann boundary value problem and the representation of the solution for the Hilbert boundary value problem of h-regular functions is obtained.

Key words: h- regular function; $\hat{H}^\mu$ function; Hilbert boundary value problem

(责任编辑 黄 颖)