运筹学与控制论

DOI:10.11721/cqnuj20140301

半严格-(B,G)-半预不变凸函数的性质与应用研究*

彭再云[1]，赵　勇[2]，黄应全[3]

(1. 重庆交通大学 理学院，重庆 400074；2. 重庆师范大学 数学学院，重庆 401331；
3. 重庆工商大学 数学与统计学院，重庆 400067)

摘要: 主要研究了半严格-(B,G)-半预不变凸函数的性质与应用，首先通过举例子来说明半严格-(B,G)-半预不变凸函数的存在性且区别于半严格-G-半预不变凸函数、G-半预不变凸函数、半严格-G 预不变凸函数与严格-(B,G)-半预不变凸函数；然后给出了半严格-(B,G)-半预不变凸性的一些基本性质；最后分别在无约束与不等式约束下，获得了两类半严格-(B,G)-半预不变凸规划问题解的最优性结果。

关键词: 半不变凸集；半严格-(B,G)-半预不变凸函数；不等式约束；数学规划

中图分类号: O221.1　　　**文献标志码:** A　　　**文章编号:** 1672-6693(2014)03-0001-06

众所周知，凸性和广义凸性在数理经济学、工程、管理科学与最优化理论中起着非常重要的作用，有关凸性和广义凸性的研究是数学规划的一个重要方面。Hanson[1] 在 1981 年给出了一类广义凸函数—不变凸函数，它是凸函数的推广。之后，大量文献借助于这类函数给出了数学规划问题的一些最优性结果。Ben-Israel 和 Mond[2] 考虑了一类非可微函数，Weir 和 Jeyakumar[3] 将其称为预不变凸函数。1992 年，Yang 和 Chen[4] 提出了半预不变凸函数的概念，这类函数可看作预不变凸函数的真推广。Yang 和 Li[5] 在条件 C 下讨论了预不变凸函数的一些性质。Yang 和 Li[6] 给出了严格预不变凸函数、半严格预不变凸函数的概念，并给出了它们分别与预不变凸函数之间的关系。2002 年，Yang[7] 等讨论了半严格 B-预不变凸(或称显 B-预不变凸)函数的一些性质及重要刻画。Peng 和 Chang[8] 在已有文献基础上提出了 G-半预不变凸函数的概念，它统一了 G-预不变凸函数[9] 与半预不变凸函数[4]，并讨论了 G-半预不变凸性的性质与重要刻画。最近，Liu 和 Yuan[10] 给出了(严格/显)-(B,G)-半预不变凸函数的概念。彭再云和李永红[11] 讨论了半严格-G-半预不变凸性及其非线性规划问题中的应用。

在文献[4,7,10-11]的启发下，本文主要研究半严格-(B,G)-半预不变凸函数的性质与应用，首先通过举例子来说明半严格-(B,G)-半预不变凸函数的存在性且区别于半严格-G-半预不变凸函数[11]、G-半预不变凸函数[8]、半严格-G 预不变凸函数[13]、严格-(B,G)-半预不变凸函数；然后给出了半严格-(B,G)-半预不变凸函数一些基本性质；最后，分别在无约束与不等式约束下，得到了两类半严格-(B,G)-半预不变凸规划问题解的最优性结果，并通过例子说明了所得结论。文中所获得的结果推广了相应文献[6-7,11,13]的结果。

1 预备知识

在本文中，均假设 $\mathbf{R}^n$ 是 n 维欧式空间，X 为 $\mathbf{R}^n$ 中的一个子集，$b_1,b_2:X\times X\times[0,1]\to\mathbf{R}_+$，下面先给出在文中必要的一些概念。

定义 1[1-7]　设集合 $X\subset\mathbf{R}^n$，如果存在向量函数 $\eta:X\times X\to\mathbf{R}^n$，使得 $\forall x,y\in X,\lambda\in[0,1]$，有 $y+\lambda\eta(x,y)\in X$，则称集合 X 是关于 η 的不变凸集。

* **收稿日期:** 2013-07-26　　　**网络出版时间:** 2014-5-8　14:38

资助项目: 国家自然科学基金(No. 11271389)；国家青年基金(No. 11301571)；重庆市自然科学基金(No. CSTC2012jjA00016)；重庆市教委基金(No. KJ130428)

作者简介: 彭再云，男，副教授，博士，研究方向为最优化理论与应用，E-mail: pengzaiyun@126.com

网络出版地址: http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20140508.1438.001.html

定义 2[13] 设 X 是 $\mathbf{R}^n$ 上关于 $\eta: X\times X\to\mathbf{R}^n$ 的不变凸集。函数 $f: X\to\mathbf{R}$ 称为 X 上关于 η 的半严格 G-预不变凸函数，如果存在连续递增函数 $G: I_f(X)\to\mathbf{R}$,使得对任意的 $x,y\in X$, $f(x)\neq f(y)$, $\lambda\in(0,1)$满足

$$f(y+\lambda\eta(x,y))<G^{-1}(\lambda G(f(x))+(1-\lambda)G(f(y)))$$

定义 3[4] 设集合 $X\subset\mathbf{R}^n$ 称为半不变凸集，如果存在 $\eta: X\times X\times[0,1]\to\mathbf{R}^n$ 使得对任意的 $x,y\in X$, $\lambda\in[0,1]$，有 $y+\lambda\eta(x,y,\lambda)\in X$。

注 1 如果 X 是一个关于 η 的不变凸集,则 X 是关于 η 的半不变凸集。但反之不一定成立。

定义 4[12] 设 X 是 $\mathbf{R}^n$ 上关于 $\eta: X\times X\times[0,1]\to\mathbf{R}^n$ 的半不变凸集。称函数 $f: X\to\mathbf{R}$ 是 X 上关于 η, b_1, b_2 的(半严格)B-半预不变凸函数，如果对任意的 $x,y\in X$, $\lambda\in[0,1]$($f(x)\neq f(y)$, $\lambda\in(0,1)$)有

$$f(y+\lambda\eta(x,y,\lambda))\leqslant b_1(x,y,\lambda)f(x)+b_2(x,y,\lambda)f(y)(<)$$

$$b_1(x,y,1)=b_2(x,y,0)=1,\ b_1(x,y,\lambda)+b_2(x,y,\lambda)=1$$

其中 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\lambda\eta(x,y,\lambda)=0$。

定义 5[10] 设 X 是非空半不变凸集。称函数 $f: X\to\mathbf{R}$ 在 X 上是关于 η 的(半严格)(B,G)-半预不变凸函数，如果存在一个连续递增实值函数 $G: I_f(x)\to\mathbf{R}$，向量值函数 $\eta: X\times X\times[0,1]\to\mathbf{R}^n$ 和实值函数 $b_1, b_2: X\times X\times[0,1]\to\mathbf{R}_+$,使得对任意的 $x,y\in X$,($f(x)\neq f(y)$) 有

$$f(y+\lambda\eta(x,y,\lambda))\leqslant G^{-1}(b_1(x,y,\lambda)G(f(x))+b_2(x,y,\lambda)G(f(y)))(<)$$

$$b_1(x,y,1)=b_2(x,y,0)=1, b_1(x,y,\lambda)+b_2(x,y,\lambda)=1, \lambda\in(0,1)$$

其中 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\lambda\eta(x,y,\lambda)=0$。

注 2 如果将定义5中的假设 $f(x)\neq f(y)$ 改为 $x\neq y$,其他条件不变,若不等式("$<$")仍然成立,则称 f 是 X 上关于 η 的严格-(B,G)-半预不变凸函数。

半严格-(B,G)-半预不变凸函数是大量存在的,通过下面的例子对其存在进行说明。

例 1 设 $X_1=[-6,0)\subset\mathbf{R}$, $X_2=[0,6]\subset\mathbf{R}$ 和 $X=X_1\cup X_2$。定义函数 $f: X\to\mathbf{R}$ 为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{7}{2}, x=0\\ 2, x\in X\backslash\{0\}\end{cases}, \eta(x,y,\lambda)=\begin{cases}x-y, x,y\in X_2\\ x-y+\lambda, x,y\in X_1\\ -y, x\in X_2, y\in X_1\\ -y-\lambda, x\in X_1, y\in X_2\backslash\{0\}\\ \dfrac{1}{6}x, x\in X_1, y=0\end{cases}$$

由定义5可知 $f: X\to\mathbf{R}$ 是 X 上关于 η 的半严格-(B,G)-半预不变凸函数，其中 $G(a)=a(a\in\mathbf{R})$, $b_1(x,y,\lambda)=\lambda$, $b_2(x,y,\lambda)=1-\lambda$, $\lambda\in(0,1)$。

注 3 由定义显然有以下关系成立:i) 任意显-B-预不变凸函数[7]是关于同一 η 的半严格-(B,G)-半预不变凸函数,此时 $G(a)=a$, $\eta(x,y,\lambda)=\eta(x,y)$；ii) 任意半严格-$G$-半预不变凸函数[11]是关于同一 η 的半严格-(B,G)-半预不变凸函数，此时 $b_1(x,y,\lambda)=\lambda$，$b_2(x,y,\lambda)=1-\lambda$；iii) 任意半严格-$G$-预不变凸函数[13]是关于 η 的半严格-(B,G)-半预不变凸函数，此时 $b_1(x,y,\lambda)=\lambda$，$b_2(x,y,\lambda)=1-\lambda$, $\eta(x,y,\lambda)=\eta(x,y)$。下列说明反之不一定成立。

例 2 令 $X=\{(x_1,x_2)\mid 0<x_2<x_1^2, 0<x_1<2\}\cup\{(0,0)\}$，取 $x=(x_1,x_2)$，$y=(y_1,y_2)\in X$，定义 $\eta(x,y,\lambda)=\begin{cases}\left(x_1,\dfrac{3}{5}\lambda x_2\right), y=(0,0)\\ x^{\otimes}-y, y\neq(0,0)\end{cases}$,这里 $x^{\otimes}\in X$ 表示 y 和 x 连线上的一点,且有 $\cup(y,\|y-x^0\|)\subset X$。令 $f(x)=\ln\left(\dfrac{1}{2}x_1+x_2+\dfrac{5}{2}\right)$, $x=(x_1,x_2)\in X$; $b_1(x,u,\lambda)=\lambda$, $b_2(x,u,\lambda)=1-\lambda$, $\lambda\in(0,1)$; $G(a)=\mathrm{e}^a$, $a\in\mathbf{R}$。则显然 X 是关于 η 的半不变凸集及 f 是 X 上关于 η 的半严格-(B,G)-半预不变凸函数。

然而,f 不是关于 η 的半严格-G-半预不变凸函数[11]。事实上,取 $x=(x_1,x_2)=(0,1)$, $y=(0,0)$, $\lambda=\dfrac{1}{2}$,有

$f(y+\lambda\eta(x,y,\lambda))=f\left(0,\frac{3}{20}\right)=\ln\frac{53}{20}$，及

$$G^{-1}(\lambda G(f(x))+(1-\lambda)G(f(y)))=G^{-1}\left(\lambda G\left(\ln\left(\frac{1}{2}x_1+x_2+\frac{5}{2}\right)\right)+(1-\lambda)G\left(\ln\left(\frac{1}{2}\times 0+0+\frac{5}{2}\right)\right)\right)=$$

$$G^{-1}\left(\lambda G\left(\ln\frac{7}{2}\right)+(1-\lambda)G\left(\frac{5}{2}\right)\right)=\ln\frac{35}{16}$$

故而得 $f(y+\lambda\eta(x,y,\lambda))=\ln\frac{53}{20}>G^{-1}(\lambda G(f(x))+(1-\lambda)G(f(y)))=\ln\frac{35}{16}$。

所以 f 不是关于 η 的半严格-G-半预不变凸函数，显然它也不是关于 η 的 G-半预不变凸函数[8]，当然也不是 X 上的半严格-G 预不变凸函数[13]。

注 4　半严格-(B,G)-半预不变凸函数也可能不一定是关于相同 η,G,b^1 和 b^2 的严格-(B,G)-半预不变凸函数，下面用例 3 来说明此论断。

例 3　设 $X_1=[-6,0)\subset\mathbf{R}$，$X_2=[0,6]\subset\mathbf{R}$ 和 $X=X_1\cup X_2$。定义

$$f(x)=\begin{cases}2, x=0\\ 3, x\in X\setminus\{0\}\end{cases},\ \eta(x,y,\lambda)=\begin{cases}x-y, x,y\in X_2\\ x-y, x,y\in X_1\\ \frac{1}{6}x, x\in X_1, y=0\\ -y, x\in X_1, y\in X_2\setminus\{0\}\\ -y, x\in X_2, y\in X_1\end{cases}$$

$$G(a)=a, a\in\mathbf{R}, b_1(x,y,\lambda)=\lambda, b_2(x,y,\lambda)=1-\lambda, \lambda\in(0,1)$$

由定义 6，不难验证 f 在 X 上是关于 η 的半严格-(B,G)-半预不变凸函数，同时可验证 f 也是 X 上关于 η 的 (B,G)-半预不变凸函数。但 f 不是 X 上关于 η 的严格-(B,G)-半预不变凸函数。事实上，取 $x=3$，$y=1(x\neq y)$，$\lambda=\frac{1}{2}$，有

$$f(y+\lambda\eta(x,y,\lambda))=f\left(1+\frac{1}{2}\times(3-1)\right)=f(2)=3$$

$$G^{-1}(b_1(x,y,\lambda)G(f(x))+b_2(x,y,\lambda)G(f(y)))=$$

$$G^{-1}(\lambda G(f(x))+(1-\lambda)G(f(y)))=\frac{1}{2}\times f(3)+\left(1-\frac{1}{2}\right)\times f(1)=3$$

于是，有 $f(y+\lambda\eta(x,y,\lambda))=G^{-1}(b_1(x,y,\lambda)G(f(x))+b_2(x,y,\lambda)G(f(y)))$。

故 f 不是 X 上关于 η 的严格-(B,G)-半预不变凸函数。

注 5　由例 1～例 3 及注 2～注 4 可知，半严格-(B,G)-半预不变凸函数是大量存在的，且它不同于半严格-G-半预不变凸函数[11]、G-半预不变凸函数[8]、半严格-G 预不变凸函数[13]，也不同于严格-(B,G)-半预不变凸函数。

2 半严格-(B,G)-半预不变凸性的基本性质

这一部分将给出半严格-(B,G)-半预不变凸函数的一些基本性质。

说明 1　若一个实值函数 G 满足 $G(x+y)=G(x)+G(y)$，x,y 在该函数的定义域中，则称函数 G 满足可加性。

定理 1　设 X 是 $\mathbf{R}^n$ 上关于 $\eta: X\times X\times[0,1]\to\mathbf{R}^n$ 的半不变凸集，$f,g: X\to\mathbf{R}$ 是关于相同的 η,G,b_1 和 b_2 的半严格-(B,G)-半预不变凸函数。若 G^{-1} 和 G 满足可加性，则 $f+g$ 也是关于相同的 η,G,b_1 和 b_2 的半严格-(B,G)-半预不变凸函数。

证明　因为 f,g 是关于相同 η,G,b_1 和 b_2 的半严格-(B,G)-半预不变凸函数，则对于任意的 $x,y\in X$，$f(x)\neq f(y)$，$\lambda\in(0,1)$，下面两个不等式均成立

$$f(y+\lambda\eta(x,y,\lambda))<G^{-1}(b_1(x,y,\lambda)G(f(x))+b_2(x,y,\lambda)G(f(y))$$

$$g(y+\lambda\eta(x,y,\lambda))<G^{-1}(b_1(x,y,\lambda)G(g(x))+b_2(x,y,\lambda)G(g(y))$$

于是，有

$$(f+g)(y+\lambda\eta(x,y,\lambda))=f(y+\lambda\eta(x,y,\lambda))+g(y+\lambda\eta(x,y,\lambda))<$$

$$G^{-1}(b_1(x,y,\lambda)G(f(x))+b_2(x,y,\lambda)G(f(y))+G^{-1}(b_1(x,y,\lambda)G(g(x))+b_2(x,y,\lambda)G(g(y))=$$

$$G^{-1}(b_1(x,y,\lambda)G((f+g)(x))+b_2(x,y,\lambda)G((f+g)(y))$$

故 $f+g$ 也是关于相同 η,G,b_1 和 b_2 的半严格-(B,G)-半预不变凸函数。 证毕

说明 2 若一个实值函数 G 满足 $G(kx)=kG(x),k>0$,则称函数 G 满足正齐次性。

定理 2 设 X 是 $\mathbf{R}^n$ 上关于 $\eta:X\times X\times[0,1]\to\mathbf{R}^n$ 的半不变凸集,$f:X\to\mathbf{R}$ 是关于 η,G,b_1 和 b_2 的半严格-(B,G)-半预不变凸函数。若 $k>0$ 且 G^{-1} 和 G 满足正齐次性,则 kf 也是关于相同 η,G,b_1 和 b_2 的半严格-(B,G)-半预不变凸函数。

证明 因为 $f:X\to\mathbf{R}$ 是关于 η,G,b_1 和 b_2 的半严格-(B,G)-半预不变凸函数,即对于 $\forall x,y\in X$,$f(x)\neq f(y)$,$\forall\lambda\in(0,1)$,有

$$f(y+\lambda\eta(x,y,\lambda))<G^{-1}(b_1(x,y,\lambda)G(f(x))+b_2(x,y,\lambda)G(f(y))$$

由 $k>0$,G^{-1} 和 G 满足正齐次性,则

$$kf(y+\lambda\eta(x,y,\lambda))<kG^{-1}(b_1(x,y,\lambda)G(f(x))+b_2(x,y,\lambda)G(f(y))=$$

$$G^{-1}(b_1(x,y,\lambda)kG(f(x))+b_2(x,y,\lambda)kG(f(y))=G^{-1}(b_1(x,y,\lambda)G(kf(x))+b_2(x,y,\lambda)G(kf(y))$$

因此,kf 也是关于相同 η,G,b_1 和 b_2 的半严格-(B,G)-半预不变凸函数。 证毕

命题 1 设 X 是 $\mathbf{R}^n$ 上关于 $\eta:X\times X\times[0,1]\to\mathbf{R}^n$ 的半不变凸集,$f_i:X\to\mathbf{R}(i=1,2,\cdots,n)$ 是关于相同 η,G,b_1 和 b_2 的半严格-(B,G)-半预不变凸函数。若 $k_i>0(i=1,2,\cdots,n)$ 且 G^{-1} 和 G 满足可加性和正齐次性,则 $f=\sum\limits_{i=1}^{n}k_if_i$ 也是关于相同 η,G,b_1 和 b_2 的半严格-(B,G)-半预不变凸函数。

命题 1 根据定理 1 和定理 2 即可得到证明。

根据定义 4 与定义 5,显然可以得到半严格-(B,G)-半预不变凸性与半严格 B-半预不变凸性的如下关系。

命题 2 设集合 $X\subset\mathbf{R}^n$ 是关于 $\eta:X\times X\times[0,1]\to\mathbf{R}^n$ 的非空半不变凸集,函数 $f:X\to\mathbf{R}$,则 f 在 X 上是关于 η 的半严格-(B,G)-半预不变凸函数当且仅当 $G(f)$ 是 X 上关于 η 的半严格 B-半预不变凸函数。

3 半严格-(B,G)-半预不变凸性在非线性规划中的应用

首先考虑如下无约束非线性规划问题(P) $\min f(x)$, s.t. $x\in X$

定理 3 设集合 $X\subset\mathbf{R}^n$ 是关于 $\eta:X\times X\times[0,1]\to\mathbf{R}^n$ 的非空半不变凸集,函数 $f:X\to\mathbf{R}$ 是 X 上的半严格-(B,G)-半预不变凸函数。若 $\bar{x}$ 是问题(P)的局部最优点,那么 $\bar{x}$ 是问题(P)的全局最优点。

证明 若 $\bar{x}$ 是问题(P)的局部最优点,则存在 $\bar{x}$ 的邻域 $N_\varepsilon(\bar{x})$ 使得

$$f(\bar{x})\leqslant f(x),\forall x\in X\cap N_\varepsilon(\bar{x}) \tag{1}$$

假设 $\bar{x}$ 不是问题(P)的全局最优点,则存在 $\tilde{x}\in X$ 使得

$$f(\tilde{x})<f(\bar{x}) \tag{2}$$

由于 f 是 X 上的半严格-(B,G)-半预不变凸函数,故对任意的 $x,y\in X$ 且 $f(\tilde{x})\neq f(\bar{x})$,$\lambda\in(0,1)$,有

$$f(\bar{x}+\lambda\eta(\tilde{x},\bar{x},\lambda))<G^{-1}[b_1(\tilde{x},\bar{x},\lambda)G(f(\tilde{x}))+b_2(\tilde{x},\bar{x},\lambda)G(f(\bar{x}))]<$$

$$G^{-1}[b_1(\tilde{x},\bar{x},\lambda)G(f(\bar{x}))+b_2(\tilde{x},\bar{x},\lambda)G(f(\bar{x}))]=G^{-1}(G(f(\bar{x}))=f(\bar{x}) \tag{3}$$

当 $\lambda>0$ 充分小时,有 $\lim\limits_{\lambda\to0}\lambda\eta(\tilde{x},\bar{x},\lambda)=0$。因此 $\bar{x}+\lambda\eta(\tilde{x},\bar{x},\lambda)\in X\cap N_\varepsilon(\bar{x})$,这与(1)、(3)式矛盾。因此 $\bar{x}$ 是问题(P)的全局最优点。 证毕

例 4 令 $X=\{(x_1,x_2)\mid 0<x_2<x_1^2,0<x_1<2\}\cup\{(0,0)\}$,取 $x=(x_1,x_2)$,$y=(y_1,y_2)\in X$,定义 $\eta(x,y,\lambda)=\begin{cases}\left(x_1,\dfrac{3}{5}\lambda x_2\right),y=(0,0)\\ x^{\otimes}-y,y\neq(0,0)\end{cases}$。这里 $x^{\otimes}\in X$ 表示 y 和 x 连线上的一点,且有 $\cup(y,\|y-x^0\|)\subset X$。令 $f(x)=\ln\left(\dfrac{1}{2}x_1+x_2+\dfrac{5}{2}\right)$,$x=(x_1,x_2)\in X$;$b_1(x,u,\lambda)=\lambda$,$b_2(x,u,\lambda)=1-\lambda$,$\lambda\in(0,1)$;$G(a)=\mathrm{e}^a$,$a\in\mathbf{R}$。则由例 2 知 f 是 X 上关于 η 的半严格-(B,G)-半预不变凸函数。可验证定理 3 的假设条件均满足,且 $x=(0,0)$ 是问

题(P)的局部最优点。根据定理 3，$x=(0,0)$是问题(P)的全局最优点。

考虑如下带不等式约束的数学规划问题(VP)

$$\begin{aligned}&\min\quad f(x)\\&\text{s.t.}\quad g_i(x)\leqslant 0,\ i\in J=\{1,\cdots,m\},x\in X\end{aligned}$$

其中 X 是 $\mathbf{R}^n$ 的非空子集，$f,g_i:X\to\mathbf{R},i=1,2,\cdots,m$，$(\mathrm{P}_2)$的可行解集为 $D:=\{x\in X:g_i(x)\leqslant 0,i\in J\}$。

定理 4　设集合 $X\subset\mathbf{R}^n$ 是关于 $\eta:X\times X\times[0,1]\to\mathbf{R}^n$ 的非空半不变凸集，$f:X\to\mathbf{R}$ 是 D 上的半严格-(B,G)-半预不变凸函数，$g_i,i\in J$ 是 D 上的(B,G)-半预不变凸函数且 G^{-1} 是严格凸函数。若 $\bar{x}\in D$ 是问题(VP)的局部最优点，则 $\bar{x}$ 是问题(VP)的全局最优点。

证明　若 $\bar{x}$ 是问题(P)的局部最优点，则存在 $\bar{x}$ 的邻域 $N_\varepsilon(\bar{x})$使得

$$f(\bar{x})\leqslant f(x),\ \forall\, x\in X\cap N_\varepsilon(\bar{x})\tag{4}$$

假设 $\bar{x}$ 不是问题(VP)的全局最优点，则存在 $\tilde{x}\in D$ 使得

$$f(\tilde{x})<f(\bar{x})\tag{5}$$

因为 $g_i,i\in J$ 是 D 上的(B,G)-半预不变凸函数，故有

$$\begin{aligned}g(\bar{x}+\lambda\eta(\tilde{x},\bar{x},\lambda))&\leqslant G^{-1}\left[b_1(\tilde{x},\bar{x},\lambda)G(g(\tilde{x}))+b_2(\tilde{x},\bar{x},\lambda)G(g(\bar{x}))\right]\leqslant\\&G^{-1}\left[b_1(\tilde{x},\bar{x},\lambda)G(g(\bar{x}))+b_2(\tilde{x},\bar{x},\lambda)G(g(\bar{x}))\right]\leqslant G^{-1}(G(0))=0\end{aligned}$$

因此，有 $\bar{x}+\lambda\eta(\tilde{x},\bar{x},\lambda)\in D$。又 f 在 D 上是半严格-(B,G)-半预不变凸函数，则

$$\begin{aligned}f(\bar{x}+\lambda\eta(\tilde{x},\bar{x},\lambda))&<G^{-1}\left[b_1(\tilde{x},\bar{x},\lambda)G(f(\tilde{x}))+b_2(\tilde{x},\bar{x},\lambda)G(f(\bar{x}))\right]<\\&G^{-1}\left[b_1(\tilde{x},\bar{x},\lambda)G(f(\bar{x}))+b_2(\tilde{x},\bar{x},\lambda)G(f(\bar{x}))\right]=G^{-1}(G(f(\bar{x}))=f(\bar{x})\end{aligned}\tag{6}$$

当 $\lambda>0$ 充分小时，有 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\lambda\eta(\tilde{x},\bar{x},\lambda)=0$。于是，有 $\bar{x}+\lambda\eta(\tilde{x},\bar{x},\lambda)\in K\cap N_\varepsilon(\bar{x})$，这与(4)、(6)式矛盾，因此，$\bar{x}$ 是问题(VP)的全局最优点。　　证毕

例 5　对于例 3 中的 X,f,η 而言，取 $b_1(x,u,\lambda)=\lambda,b_2(x,u,\lambda)=1-\lambda,\lambda\in(0,1)$；$G(\alpha)=\mathrm{e}^\alpha,\alpha\in\mathbf{R}$，(VP)的约束为 $g_i(x)=\frac{5}{2}x-\frac{5}{16},i\in J=1,2,\cdots,m$。则可验证 X 为关于 η 的非空半连通集，该规划问题(VP)的可行解集为 $D:=\{x\in X:g_i(x)\leqslant 0,i\in J\}$，由约束 $g_i(x)=\frac{5}{2}x-\frac{5}{16},i\in J=1,2,\cdots,m$ 可得可行集为 $D:=\left\{x\in X:x\leqslant\frac{1}{8},i\in J\right\}$。目标函数最小值为 2，且 $x=0$ 为该非线性规划问题在可行域内的局部最优解，由定义 5，显然可验证 $f:X\to\mathbf{R}$ 是关于 η 的半严格-(B,G)-半预不变凸函数，$g_i,i\in J$ 是 D 上的(B,G)-半预不变凸函数。定理 4 的条件均满足，由定理 4，$x=0$ 是该非线性规划问题的一个全局最优解。

注 6　例 4、例 5 分别说明本文所得规划问题中的应用结果，即定理 3、定理 4 是成立的。

注 7　由例 1～例 5 及定理 3、定理 4 可知，半严格-(B,G)-半预不变凸函数是重要的一类函数，在数学规划问题中有较重要应用。那么，能否讨论进一步半严格-(B,G)-半预不变凸性与(B,G)-半预不变凸、严格-(B,G)-半预不变凸性之间的相互关系？值得后续研究！

参考文献：

[1] Hanson M A. On sufficiency of the Kuhn-Tucker conditions[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1981, 80(2): 545-550.

[2] Ben-Israel A, Mond B. What is invexity?[J]. Journal of the Australian Mathematical Society, 1986, 28(1): 1-9.

[3] Weir T, Jeyakumar V. A class of nonconvex functions and mathematical programming[J]. Bulletin of Australian Mathematical Society, 1998, 38(2): 177-189.

[4] Yang X Q, Chen G Y. A class of nonconvex functions and prevariational inequalities[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1992, 169(2): 359-373.

[5] Yang X M, Li D. On properties of preinvex functions[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2001, 256(1): 229-241.

[6] Yang X M, Li D. Semistrictly preinvex functions[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2001, 258

(1): 287-308.

[7] Yang X M, Yang X Q, Teo K L. Explicitly *B*-preinvex functions[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2002, 146(1): 25-36.

[8] Peng Z Y, Chang S S. Some Properties of Semi-*G*-preinvex functions[J]. Taiwanese Journal of Mathematics, 2013, 17 (3): 873-884.

[9] Antczak T. *G*-preinvex functions in mathematical programming [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2008, 217(1): 212-226.

[10] Liu X L, Yuan D H. On semi-(B, G)-preinvex functions [EB/OL]. [2013-07-01]. http://www.hindawi.com/journals/aaa/2012/530468/.

[11] 彭再云，李永红. 半严格-*G*-半预不变凸性与最优化[J]. 应用数学和力学，2013，34(8)：836-845.

Peng Z Y, Li Y H. Semistrict-*G*-semipreinvexity and optimization[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2013, 34(8): 836-845.

[12] Long X J, Peng J W. Semi-*B*-preinvex functions[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2006, 131 (2): 301-305.

[13] Peng Z Y, Lin Z, Li X B. Semistrict *G*-preinvexity and optimality in nonlinear programming[EB/OL]. [2013-07-10]. http://www.hindawi.com/journals/aaa/2013/103864/.

Operations Research and Cybernetics

Study of Characteristics and Applications on Semistrictly Semi-(B, G)-preinvex Function

PENG Zai-yun[1], ZHAO Yong[2], HUANG Ying-quan[3]

(1. Collegel of Science, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074;

2. School of Mathematics Science, Chongqing Normal University, Chongqing 401331;

3. College of Mathematics and Statistics, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China)

Abstract: In this paper, we mainly discuss Characteristics and Applications on semistrictly semi-(B, G)-preinvex function. Firstly, examples are given to show that the existence of semistrictly semi-(B, G)-preinvex function, and the difference with semistrictly semi-*G*-preinvex function, semi-*G*-preinvex function, semistrictly-*G*-preinvex function, strictly semi-(B, G)-preinvex function. Then, we obtain some basic properties of semistrictly semi-(B, G)-preinvexity. Finally, we obtain some some optimality results to semistrictly semi-(B, G)-preinvex programming problems without constraint and with inequality constraints, respectively, and give some examples to illustrate the results. Our results extend the the corresponding results.

Key words: semi-invex set; semistrictly semi-(B, G)-preinvex function; inequality constrains; mathematical programming

（责任编辑　黄　颖）