运筹学与控制论

DOI:10.11721/cqnuj20140303

基于填充函数方法的 OD 矩阵估计*

李觉友

(重庆师范大学 数学学院,重庆 401331)

摘要:对现有关于求解 OD 矩阵估计的最小二乘模型所采用的逐次迭代算法的不足进行了分析,并引进了一种全局最优化算法即填充函数方法来找寻该模型的全局最优解。数值试验表明:所提出的填充函数算法有能力找到问题的全局最优解,且与初始值的选取无关,也有潜力解决较复杂网络的 OD 矩阵估计。通过数值结果发现,模型的权值选取对数值结果有明显影响。为此,引进了一种确定权值的评价指标 RMSE,它能反映估计量与真实值之间的接近程度。利用该指标,可以选取较合适的权值。

关键词:OD 矩阵估计;协方差矩阵;填充函数;全局最优解

中图分类号:O224 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-6693(2014)03-0012-04

OD 需求矩阵是描述交通网络中所有出行起点(Origin)与出行终点(Destination)之间在一定时间范围内交通出行量的表格,反映了某城市或区域的基本交通需求。OD 矩阵是交通运输规划研究的基础资料,是城市交通系统规划、控制与管理等工作的基础,它能揭示出城市交通症结的原因,交通需求与土地利用、经济活动等相互关系的规律。传统方法获取 OD 矩阵是采用大规模的人工抽样调查等。由于交通数据量十分庞大,消耗极大的人力、财力和时间资源,代价十分高昂,而且直接调查得到的 OD 矩阵存在抽样率低、抽样统计的精度不高、数据更新周期长等问题[1],所以在当前的科研和实际应用中很少采用。而一些利用路段观测交通量来推算 OD 矩阵的方法,以其省时、省力,省钱和时效性高等优点,越来越引起重视。目前 OD 矩阵估计方法有极大熵模型法、信息极小模型法、极大似然法、广义最小二乘法和贝叶斯统计法等[1-2]。近些年来,关于 OD 矩阵估计问题的研究也出现了一些新的进展。Hazelton 等[3-4]利用路段流量之间的二阶统计信息来估计 OD 矩阵,解决了 OD 矩阵估计的不确定性问题,并结合实例说明了模型的可行性和有效性。在泊松分布假设下,谭英嘉等[5]也考虑了类似的 OD 矩阵估计模型。文献[3-5]均是通过逐次迭代法求解该问题。但逐次迭代法很难求得问题的全局最优解(仅能得到问题的稳定点)。

因此,本文分析了文献[3-5]所采用的逐次迭代算法的不足,并引进了一种全局最优化算法即填充函数方法来求解 OD 矩阵估计模型。数值试验表明:所提出的填充函数算法有能力找到问题的全局最优解,且与初始值的选取无关,也有潜力解决较复杂网络的 OD 矩阵估计。通过数值结果发现,模型的权值选取对数值结果有明显影响。为此,本文引进了一种确定权值的评价指标 RMSE,它能反映估计量与真实值之间的接近程度。利用该指标可以选取较合适的权值。

1 模型的建立

1.1 模型的准备

对于一个交通路网,假设有 n 个节点,m 个路段,v 个 OD 对,其中 OD 对需求向量 $q=(q_1,q_2,\cdots,q_v)$。任何一对 OD 出行量在不同观测期都是不一样的,会随着某一值上下波动。假设调查的时间 K 天,$Q^{(k)}=(Q_1^{(k)},Q_2^{(k)},\cdots,Q_v^{(k)})$表示第 $k(k=1,2,\cdots,K)$天的 OD 对需求量。对于大多数 OD 对,出行者有不同的路径选择。I_i 表示 OD 对 i 的有效出行路径集合,$I=\bigcup_i I_i$ 表示路网的所有有效路径集合,其指标记为$|I|$。$F_r^{(k)}$ 表示 OD 对 i 中第 $r(r\in I_i)$条路径在第 k 天的出行量,f_r 表示第 r 条路径的平均出行量。P_{ir} 表示 OD 对 i 中第 r 条路径的选择概率,这里假设路径选择概率已知(可以由交通流分配方法求得)。$V_i^{(k)}$ 表示路段 $i(i=1,2,\cdots,m)$在 k 天的交通

* **收稿日期**:2013-03-21 **修回日期**:2013-05-21 **网络出版时间**:2014-5-8 14:38

资助项目:重庆市教委项目(No. KJ120616)

作者简介:李觉友,男,讲师,研究方向为最优化理论和算法及应用,E-mail: lijueyou@cqnu.edu.cn

网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20140508.1438.003.html

观测量。$A=(a_{i,j})$表示路段-路径相关矩阵，其中 $a_{i,j}=1$，如果路段 i 在路径 j 上，否则 $a_{i,j}=0$。

为了建立 OD 矩阵估计模型，假设：(I) 对于 $k=1,2,\cdots,K$，$Q_1^{(k)}$，$Q_2^{(k)}$，$\cdots$，$Q_v^{(k)}$ 是相互独立的随机变量；(II) $Q^{(1)}$，$Q^{(2)}$，$\cdots$，$Q^{(K)}$ 对是相互独立的，且和 Q 具有相同分布。另外 $E(Q)=q$；(III) 对任意 OD 对 $Q_i^{(k)}$，$F_r^{(k)}(r\in I_i)$ 服从二项分布 $F_r^{(k)}(Q_i,P_{ir})$。由假设(I)和(III)可以得到

$$f=E[F]=P^{\mathrm{T}}q \tag{1}$$

为了简便，这里均采用向量或矩阵的形式表示。如 F 表示路径向量，$P=(P_{ir})$表示路径选择概率矩阵，P^{T}表示 P 的转置。路径流量与路段流量之间的关系为

$$V=AF \tag{2}$$

由(1)、(2)式可得各路段流量的均值为

$$E[V]=E[AF]=AE[F]=AP^{\mathrm{T}}q \tag{3}$$

其协方差矩阵为

$$Var[V]=Var[AF]=AVar[F]A^{\mathrm{T}} \tag{4}$$

假设 $\overline{V}$ 为各路段流量调查得到的样本均值，$\overline{S}$ 为样本的协方差矩阵，分别计算如下

$$\overline{V}=K^{-1}\sum\nolimits_{k=1}^{K}V^{(k)} \tag{5}$$

$$\overline{S}=(K-1)^{-1}\sum\nolimits_{k=1}^{K}(V^{(k)}-\overline{V})(V^{(k)}-\overline{V})^{\mathrm{T}} \tag{6}$$

由(3)、(5)式可以提供 m 个独立方程，但不能唯一确定 OD 需求 q。如果充分利用路段流量之间的二阶统计信息，则由(4)、(6)式可以提供 $m(m+1)/2$ 个独立方程。这样综合利用(3)～(6)式就为确定唯一的 OD 需求 q 提供了可能。值得注意的是直接利用(3)～(6)式建立方程组来估计 q，很可能方程组无解(因为观测路段流量存在误差)。文献[3-4]引进了广义最小二乘 OD 估计模型，目的是要估计的均值和协方差尽量接近观测的均值和协方差。

1.2 广义最小二乘模型

为了求解简单，假设路径流量的方差和均值满足以下关系[3-4]

$$Var(F_r)=\tau E(F_r),\ r\in I \tag{7}$$

其中 $\tau>0$ 是分散参数，是需要被估计的。广义最小二乘模型如下

$$\min_{(q,\tau)}Z_\gamma=\|AP^{\mathrm{T}}q-\overline{V}\|_1^2+\gamma\ \|Adiag(\tau P^{\mathrm{T}}q)A^{\mathrm{T}}-\overline{S}\|_2^2 \tag{8}$$

这里 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 分别表示向量和矩阵的欧几里得范数，$diag$ 是对角矩阵符号。任意给定的权参数 $\gamma>0$ 表示均值误差和协方差误差的相对重要性。

2 模型的求解

目标函数 Z_γ 是关于 q 和 τ 的函数。如果点(q,τ)满足以下方程组

$$\begin{cases}\partial Z_\gamma/\partial q=0\\ \partial Z_\gamma/\partial\tau=0\end{cases} \tag{9}$$

则称点(q,τ)为问题(8)的稳定点。设置初始参数 τ_0，Hazelton 等[3-4]通过逐次迭代方程组(9)，将得到的结果作为问题(8)的解(简记逐次迭代法为 SIM)。由于目标函数(8)是非凸函数，所以通过逐次迭代法来求解非凸问题(8)很难找到全局极小值点，后面的数值试验也说明了这个事实。对于交通规划研究者来说，找到问题的全局最优解是非常有意义的。本文引进了一种全局最优化算法即填充函数法来求解非凸问题(8)（简记填充函数法为 FM)。填充函数方法是寻求优化问题全局最优解的一类重要的确定性方法，它的基本思想是首先求得目标函数的任一局部最优解，然后构造辅助函数，即填充函数，帮助目标函数从当前的局部最优解搜索到下一个更优的局部最优解。根据文献[6]，构造如下的填充函数

$$F_{w,r,c,x_{q,\tau}^*}(x_{q,\tau})=w\left(\exp\left(-\frac{\|x_{q,\tau}-x_{q,\tau}^*\|^2}{w}\right)g_{r,c}(Z_\gamma(x_{q,\tau})-Z_\gamma(x_{q,\tau}^*))+h_{r,c}(Z_\gamma(x_{q,\tau})-Z_\gamma(x_{q,\tau}^*))\right) \tag{10}$$

其中 $g_{r,c}(t)=\begin{cases}c,t\geqslant 0\\ -\dfrac{2c}{r^3}t^3-\dfrac{3c}{r^2}t^2+c,-r<t\leqslant 0\\ 0,t\leqslant -r\end{cases}$，$h_{r,c}(t)=\begin{cases}t+r,t\leqslant -r\\ \dfrac{r-2}{r^3}t^3+\dfrac{r-3}{r^2}t^2+1,-r<t\leqslant 0\\ 1,0<t\leqslant 0\\ -\dfrac{4c-2}{r^3}t^3+\dfrac{(6c-3)(r+2)}{r^3}t^2-\dfrac{(6c-3)(2r+2)}{r^3}t+\\ \qquad\dfrac{4c-2+(6c-3)r}{r^3}+1,1\leqslant t\leqslant 1+r\\ 2c,t>1+r\end{cases}$。这里 $x_{q,\tau}^*$ 是通过局部搜索得到的当前局部极小值点，w,r,c 是填充函数的参数[6]。

具体填充函数算法如下：步 1，设置 $k:=1$，$\delta:=1/2$，$S=\{e_1,e_2,\cdots,e_{2n}\}$，$n=v+1$，$e_i$，$i=1,2,\cdots,2n$ 为坐标轴的正反方向。设置参数 w,r,c，这里取 $w=10^3$，$r=10^{-3}$，$c=10$；步 2，取 $\bar{x}_{q,\tau}=x^*_{q,\tau}+\delta e_k$；步 3，如果 $Z_\gamma(\bar{x}_{q,\tau})<Z_\gamma(x^*_{q,\tau})$，则算法终止；如果 $Z_\gamma(\bar{x}_{q,\tau})\geqslant Z_\gamma(x^*_{q,\tau})+1$，取 $\delta:=\delta/2$，转步 2；如果 $Z_\gamma(x^*_{q,\tau})<Z_\gamma(\bar{x}_{q,\tau})<Z_\gamma(x^*_{q,\tau})+1$，转步 4；步 4，以 $\bar{x}_{q,\tau}$ 为初始点，用局部极小化方法极小化填充函数(10)，得极小值点 $\bar{x}_{w,r,c,x^*_{q,\tau}}$，取 $x^*_{q,\tau}=\bar{x}_{w,r,c,x^*_{q,\tau}}$，$k=k+1$。如果 $k>2n$，转步 5，否则，转步 2；步 5，终止，输出 $x^*_{q,\tau}$ 作为问题(8)的解。

注　步 3 中要求满足 $Z_\lambda(\bar{x}_{q,\tau})<Z_\lambda(x^*_{q,\tau})+1$ 是为了限制作为填充函数初始点 $\bar{x}_{q,\tau}$ 不会远离当前局部极小值点。步 4 所提到的局部极小化方法可以直接使用 Matlab 优化工具箱中的“fmincon”命令。

3 实例分析

例 1　为了算法对比，这里选取文献[3]中的简单路网，如图 1。该路网有 2 个路段，3 个 OD 对，分别是：1～(1,2)，2～(1,3)，3～(2,3)，每个 OD 对只有一条路径。

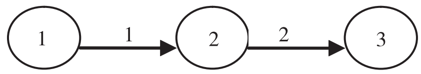

图 1　简单路网

Fig. 1　A simple road network for example 1

通过数据仿真，假设路径流 $f^{(1)}$，$f^{(2)}$，$\cdots$，$f^{(K)}$ $(K=25)$ 服从分散泊松分布[3-4]，其均值为 $q=f=(80,20,80)^{\mathrm{T}}$，分散参数 $\tau=2$，这样得到观测路段 1,2 的均值和协方差矩阵数据为[3] $\bar{V}=(101.20,95.72)^{\mathrm{T}}$，$\bar{S}=\begin{pmatrix}289.90 & 65.60\\ 65.60 & 238.50\end{pmatrix}$。根据模型(8)，对应路段 1,2 的均值和协方差矩阵为 $E[V]=(q_1+q_2,q_2+q_3)^{\mathrm{T}}$，$Var[V]=\tau\begin{pmatrix}q_1+q_2 & q_2\\ q_2 & q_2+q_3\end{pmatrix}$。为了算法对比，初始值取 $q_0=(60,15,60)$，$\tau_0=1$，误差设为 10^{-3}。计算结果见表 1，其中 $(q_1,q_2,q_3,\tau)_{\mathrm{SIM}}$ 表示用逐次迭代法得到的解，$(q_1,q_2,q_3,\tau)_{\mathrm{FM}}$ 表示用本文提出的填充函数法得到的解，Z_γ^{SIM}，Z_γ^{FM} 为对应的目标函数值。

从表 1 知道，不同权值对计算结果有影响。SIM 算法结果依赖权值，随着权值的增大其目标函数值也明显增大，其解也不稳定。当权值 γ 大于 10^{-1} 时，从目标函数值来看，FM 的结果均优于 SIM 结果，说明 SIM 算法能找到问题的全局最优解，而 FM 算法仅能找到问题的稳定点。从实际计算来看，FM 算法与初始值有关，而 SIM 算法与初始值无关。当权值 γ 大于 10^2 时，FM 算法得到目标函数值和解均很稳定，此时误差主要来自于路段观测均值，而 SIM 算法结果变化很大，其原因是没能找到问题的全局极小解。正如文献[5]指出，如果网络较复杂，用 SIM 算法求方程组(9)比较困难，且计算量大。而本文提出的填充函数算法可以有效解决这个问题。

表 1　算法 SIM 和 FM 的结果对比(取不同权值)

Tab. 1　Results for algorithms SIM and FM with different weights γ

γ	$(q_1,q_2,q_3,\tau)_{\mathrm{SIM}}$	Z_γ^{SIM}	$(q_1,q_2,q_3,\tau)_{\mathrm{FM}}$	Z_γ^{FM}
10^{-2}	(77.25,24.39,70.85,2.68)	6.273 9	(77.25,24.39,70.85,2.68)	6.273 9
10^{-1}	(79.54,24.35,68.34,2.69)	39.017 0	(79.54,24.35,68.34,2.69)	39.016 9
1	(82.36,24.30,64.95,2.69)	81.465 3	(82.33,24.29,64.93,2.69)	81.461 7
10^1	(83.06,24.31,64.19,2.69)	91.416 9	(82.95,24.28,64.10,2.70)	91.378 8
10^2	(83.39,24.39,64.29,2.68)	92.887 4	(83.02,24.28,64.01,2.70)	92.504 3
10^3	(84.18,24.62,64.89,2.66)	96.383 2	(83.03,24.28,64.00,2.70)	92.618 4
10^4	(86.59,25.32,66.75,2.59)	128.223 5	(83.03,24.28,64.00,2.70)	92.629 9

从前面分析知道权值 γ 对模型的结果有明显影响，那么选取怎样的权值比较合适？Hazelton 等并没有指明如何确定权值，他们在文献[3]中指出权值取 $\gamma=10^{-2}$ 较合适，但在文献[4]中却使用 $\gamma=10^{-1}$，而文献[5]使用 $\gamma=10^2$。这里引进一个确定权值的评价指标[7] RMSE(Root mean squared error)：$RMSE=\sqrt{\dfrac{1}{v}\sum_{i=1}^{v}(q_i-q_i^+)^2}$，其中 q_i 是由模型(8)估计得到的量，q_i^+ 是 OD 需求真实值，这里取 $q^+=(80,20,80)^{\mathrm{T}}$。RMSE 反映了估计量与真实值的接近程度，其值越小越好。注意这里取的 q_i 是由算法 FM 得到的结果。从表 2 可看出，取 $\gamma=10^{-2}$ 较合适，表明应该对观测路段均值信息给予充分信任。即抽样均值的波动变化应该小于其协方差的变化。

例 2　为了进一步验证算法 FM 的有效性,这里选取文献[8]的一个交通路网,见图 2。路网信息见表 3。

假设网络中每个路段的自由出行时间设置为 $t_1^0=9.0$;$t_2^0=12.0$;$t_3^0=2.0$;$t_4^0=6.0$;$t_5^0=3.0$;$t_6^0=3.0$;$t_7^0=4.0$。在这个例子中,路径选择采用 Logit 模型[8],参数 $\theta=1.0$。假定路段 3,5,6,7 为观测路段。

表 2　不同权值 γ 对应的 *RMSE*

Tab. 2　Values of *RMSE* with different weights γ

γ	10^{-2}	10^{-1}	1	10	10^2	10^3	10^4
RMSE	10.12	11.98	15.24	16.10	16.19	16.20	16.20

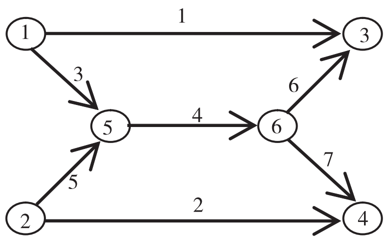

图 2　例 2 的路网

Fig. 2　Road network for example 2

表 3　例 2 的路网信息

Tab. 3　Road network information for example 2

OD 对	路径	路径上的路段	真实 OD 值
1 (1→3)	1	1	500
	2	3,4,6	
2 (1→4)	3	3,4,7	100
3 (2→3)	4	5,4,6	80
4 (2→4)	5	2	400
	6	5,4,7	

通过数据仿真,假设路径流 $f^{(1)}$,$f^{(2)}$,…,$f^{(K)}$($K=50$)服从分散泊松分布,部分路径均值为$(f_2, f_3, f_4, f_6)=(60\ 100\ 80\ 108)^{\mathrm{T}}$,分散参数 $\tau=2$,这样得到观测路段 3,5,6,7 的均值和协方差矩阵数据如下

$$\bar{V}=(\bar{V}_3\quad \bar{V}_5\quad \bar{V}_6\quad \bar{V}_7)=(157.88\quad 190.28\quad 138.76\quad 209.40)$$

$$\bar{S}=\begin{bmatrix}256.13 & -5.48 & 107.08 & 143.56\\ -5.48 & 374.45 & 180.70 & 188.26\\ 107.08 & 180.70 & 261.59 & 26.19\\ 143.56 & 188.26 & 26.19 & 305.63\end{bmatrix}$$

初始值取 $q_0=(400\ 120\ 100\ 300)$,$\tau_0=1$,误差设为 10^{-3}。计算结果见表 4。从表 4 知道:SIM 算法有能力找到问题的全局最优解。根据评价指标 RSME,选取较小的权值比较合适,且能使目标函数值较小,这与例 1 的权值的选取是一致的。

表 4　算法 FM 的结果(取不同权值)

Tab. 4　Results of algorithm FM with different weights γ

γ	$(q_1, q_2, q_3, q_4, \tau)_{\mathrm{FM}}$	*RMSE*
10^{-2}	(477.03, 99.69, 82.85, 401.91, 1.72)	11.61
10^{-1}	(484.10, 93.26, 89.36, 399.46, 1.73)	12.82
1	(492.11, 83.14, 98.72, 393.55, 1.74)	13.58
10^1	(493.58, 80.45, 101.04, 391.61, 1.74)	15.29
10^2	(493.74, 80.14, 101.31, 391.38, 1.74)	15.50
10^3	(493.75, 80.11, 101.34, 391.35, 1.74)	15.50
10^4	(493.76, 80.11, 101.34, 391.36, 1.74)	15.50

4 结语

本文引进了一种求解 OD 矩阵估计模型的全局最优化算法,即填充函数方法。通过数值结果对比,分析了文献[3-5]提出的逐次迭代算法存在的不足:SIM 法很难找到问题全局最优解,且依赖权值和初始值;对较复杂网络难处理。数值结果表明,本文提出的 FM 算法有能力找到问题的全局最优解,其解不依赖初始值,也有潜力解决较复杂网络的 OD 矩阵估计。由于该最小二乘模型依赖于权值的选取,本文提出了一种合理选取权值的办法,即引进一种刻画随机变量特性的评价指标 RMSE。

本文介绍的广义最小二乘 OD 矩阵估计模型,虽借助于路段流量的二阶统计信息能有效克服 OD 矩阵估计的不确定性问题。但也存在不足:如权值的最优选取值得进一步考虑;该模型没考虑网络的拥挤性,即路径选择概率固定且已知等。

参考文献:

[1] 周晶. 城市交通系统分析与优化[M]. 南京:东南大学出版社,2001.

Zhou J. The urban traffic system analysis ans optimization [M]. Nanjing: Southeast University Press, 2001.

[2] Cascetta E. Estimation of trip matrices from traffic counts and survey data: A generalized least squares estimator[J]. Transportation Research Part B, 1984, 18(4/5): 289-299.

[3] Hazelton M L. Some comments on origin-destination matrix estimation[J]. Transportation Research Part A, 2003, 37(10): 811-822.

[4] Hazelton M L, Gordon A. Estimation of origin-destination trip matrices from link counts[R/CD]. London: Proceedings of the 2002 European Transport Conference, 2002.

[5] 谭英嘉,靳文舟,郭莉. 基于路段流量二阶统计量的 OD 矩阵估计[J]. 交通与计算机, 2008, 26(1): 121-123.
Tan Y J, Jin W Z, Guo L. OD matrix estimation based on second order statistics of road flow[J]. Computer and Communications, 2008, 26(1): 121-123.

[6] Wu Z Y, Lee H W J, Zhang L S, et al. A novel filled function method and quasi-filled function method for global optimization[J]. Journal of Computational Optimization and Applications, 2005, 34(2): 249-272.

[7] Yang H, Sasaki T, Iida Y, et al. Estimation of origin-destination matrices from link traffic counts on congested networks[J]. Transportation Research Part B, 1992, 26(6): 417-434.

[8] 邵虎,林兴强,孟强,等. 基于出行时间可靠性的交通配流问题[J]. 管理科学学报, 2009, 12(5): 27-35.
Shao H, Lin X Q, Meng Q, et al. Travel time reliability-based traffic assignment problem[J]. Journal of Management Sciences in China, 2009, 12(5): 27-35.

Operations Research and Cybernetics

OD Matrix Estimation Based on Filled Function Method

LI Jue-you

(College of Mathematics, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: Origin-destination (OD) traffic demand matrix is one of the necessary and basic data for transportation modeling and planning purposes. This paper points out some existing shortcomings of successive iterative method for estimating OD trip matrix from the literature [3-5]. To overcome these shortcomings, the filled function method is firstly introduced. Then numerical experiments show that the proposed filled function methos has the potential to find the global solution for the generalized least square model of OD matrix estimation under consideration and do not depend on the choice the initial point. Furthermore, we find that the choice of the weight parameter of the OD matrix estimate model has effect on the numerical results. Finally, an evaluation index as the statistical measure of estimators called the root mean squared error is also presented to show how to choose the weighting parameter appropriately.

Key words: OD trip matrix estimation; covariance matrix; filled function method; global optimization solution

(责任编辑 黄 颖)