运筹学与控制论

DOI:10.11721/cqnuj20140304

带有二次约束的一类特殊三次规划问题的全局最优性充分条件*

叶　敏，李国权
(重庆师范大学 数学学院，重庆 401331)

摘要:利用拉格朗日函数和 L-次微分的方法,研究了带有二次约束的一类特殊三次规划问题的全局最优性条件。首先刻画出该类三次规划问题的拉格朗日函数的抽象次微分,从而得到了带有二次约束的三次规划问题的全局最优性充分条件。最后举例说明如何利用本文所给出的全局最优性充分条件来判定当前可行解就是全局最优解。

关键词:三次规划;二次约束;拉格朗日函数;L-次微分;全局最优性充分条件

中图分类号:O221.1　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2014)-03-0017-04

1 预备知识

全局最优化领域的基本理论研究之一是怎样刻画一个全局优化问题的解,全局最优性充分条件是用来说明一个解是全局最优解的一个重要理论依据。三次规划问题在金融、农业、证券投资组合等方面都有非常重要的应用[1-3]。Jeyakumar 等给出了带箱子约束的非凸二次规划问题的全局最优性充分条件[4];Jeyakumar 等给出了带二次约束的非凸二次规划问题的全局最优性充分条件[5];Wu 等得到了带不等式约束的二元非凸二次规划问题的全局最优性充分条件[6];在 2010 年,Wang 等[7]给出了带箱子或二元约束的三次极小化问题的全局最优性条件;Zhang 等得到了带箱子或二元约束的一类特殊三次极小化问题的全局最优性充分条件[8]。

受文献[4-6,8]的启发,本文利用拉格朗日函数和 L-次微分的方法,给出了带二次不等式和二次等式约束的特殊三次极小化问题的全局最优性充分条件，所得结果改进和推广了文献[4,8]中的相应结果。同时通过例子说明给出的最优性条件能有效地用于确定给定的非凸三次极小化问题的全局极小值。

下面首先给出本文中所要用到的一些基本的定义与记号:$\mathbf{R}$ 表示实线性空间，$\mathbf{R}^n$ 表示 n 维欧氏空间。对于向量 $x,y\in\mathbf{R}^n$,$x\geqslant y\Leftrightarrow x_i\geqslant y_i$,$i=1,2,\cdots,n$，记号 $\boldsymbol{A}\geqslant\boldsymbol{B}\Leftrightarrow\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 是半正定矩阵。用 $diag(q_1,\cdots,q_n)$表示对角元素为 $q_1,\cdots,q_n$ 的对角矩阵，设 L 为定义在 $\mathbf{R}^n$ 上的一些实值函数的集合。

定义 1[4]　(L-次微分)设 $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 且 $x_0\in\mathbf{R}^n$,$l\in L$,若 $f(x)\geqslant f(x_0)+l(x)-l(x_0)$,$\forall x\in\mathbf{R}^n$,则称 l 为 f 在 x_0 处的 L-次梯度。f 在 x_0 的所有 L-次梯度的集合$\partial_L f(x_0)$称为 f 在 x_0 的 L-次微分。

注 1　若 L 是所有线性函数所成的集合,f 是一个下半连续的凸函数,则$\partial_L f(x)=\partial f(x)$,这里$\partial f(x)$指一般凸分析意义上的凸函数的次梯度。

2 主要结果

考虑如下的三次规划问题(BCP)。

$$\min\quad f(x)=b^{\mathrm{T}}x^3+\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_0x+a_0^{\mathrm{T}}x$$

$$\text{s.t.}\quad g_i(x)=\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_jx+a_j^{\mathrm{T}}x+c_j\leqslant 0,j\in \boldsymbol{I};g_j(x)=\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_jx+a_j^{\mathrm{T}}x+c_j=0,j\in J$$

$$x\in D=\prod_{i=1}^{n}[u_i,v_i]$$

* **收稿日期**:2013-05-02　**修回日期**:2013-07-03　**网络出版时间**:2014-5-8　14:38
资助项目:重庆师范大学校级项目(No.12XLB038);重庆市自然科学基金(No.cstc2013jcyjA00021)
作者简介:叶敏,女,研究方向为全局最优化理论与算法,E-mail:yemincq@126.com;**通讯作者**:李国权,Email:gqli2@163.com
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20140508.1438.004.html

其中,$u_i,v_i\in\mathbf{R},u_i<v_i,i=1,\cdots,n,b=(b_1,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n,a_j\in\mathbf{R}^n,c_j\in\mathbf{R},\boldsymbol{A}_j\in S^n,j=1,2,\cdots,m+p$,$S^n$ 是所有 $n\times n$ 对称矩阵的集合,$a_0\in\mathbf{R}^n$,$x^3=(x_1^3,\cdots,x_n^3)^{\mathrm{T}}$。记问题(BCP)可行集为 C,为了方便讨论不妨令 $I=\{1,2,\cdots,m\}$,$J=\{m+1,\cdots,m+p\}$,对给定的 $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_m)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}_+^m$,$\mu=(\mu_1,\cdots,\mu_p)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^p$,令 $\boldsymbol{H}_{\lambda,\mu}=\boldsymbol{A}_0+\sum\limits_{j\in I}\lambda_j\boldsymbol{A}_j+\sum\limits_{j\in J}\mu_j\boldsymbol{A}_j$,$b_{\lambda,\mu}=a_0+\sum\limits_{j\in I}\lambda_ja_j+\sum\limits_{j\in J}\mu_ja_j$,$F_{\lambda,\mu}(x)=b^{\mathrm{T}}x^3+\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_{\lambda,\mu}x+b_{\lambda,\mu}^{\mathrm{T}}x+\sum\limits_{j\in I}\lambda_jc_j+\sum\limits_{j\in J}\mu_jc_j$。

令 L 为一些特殊的三次函数作成的集合 $L=\left\{b^{\mathrm{T}}x^3+\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}x+\beta^{\mathrm{T}}x\mid\boldsymbol{Q}=diag(q_1,\cdots,q_n),q_i\in\mathbf{R},\beta\in\mathbf{R}^n\right\}$。

命题1 设 $F_{\lambda,\mu}(x)=b^{\mathrm{T}}x^3+\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_{\lambda,\mu}x+b_{\lambda,\mu}^{\mathrm{T}}x+\sum\limits_{j\in I}\lambda_jc_j+\sum\limits_{j\in J}\mu_jc_j$,$\bar{x}=(\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n,\lambda\in\mathbf{R}_+^m,\mu\in\mathbf{R}^p$,则 $\partial_LF_{\lambda,\mu}(\bar{x})=\left\{b^{\mathrm{T}}x^3+\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}x+\beta^{\mathrm{T}}x\mid\boldsymbol{H}_{\lambda,\mu}-\boldsymbol{Q}\geqslant0,\boldsymbol{Q}=diag(q_1,\cdots,q_n),\beta=(\boldsymbol{H}_{\lambda,\mu}-\boldsymbol{Q})\bar{x}+b_{\lambda,\mu},q_i\in\mathbf{R}\right\}$。

证明 由次微分的定义,$l\in\partial_LF_{\lambda,\mu}(\bar{x})$ 当且仅当

$$F_{\lambda,\mu}(x)\geqslant F_{\lambda,\mu}(\bar{x})+l(x)-l(\bar{x}),\ \forall x\in\mathbf{R}^n\tag{1}$$

令 $l(x)=b^{\mathrm{T}}x^3+\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}x+\beta^{\mathrm{T}}x$,$\varphi(x)=F_{\lambda,\mu}(x)-l(x)$,其中 $\boldsymbol{Q}=diag(q_1,\cdots,q_n),q_i\in\mathbf{R},\beta\in\mathbf{R}^n$,则

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{H}_{\lambda,\mu}-\boldsymbol{Q})x+x^{\mathrm{T}}(b_{\lambda,\mu}-\beta)+\sum_{j\in I}\lambda_jc_j+\sum_{j\in J}\mu_jc_j$$

由(1)式知 $l\in\partial_LF_{\lambda,\mu}(\bar{x})$ 当且仅当对任意的 $x\in\mathbf{R}^n$,$\varphi(x)\geqslant\varphi(\bar{x})$,即 $\varphi(x)$ 有下界,且在 $\bar{x}$ 处达到极小值,其等价于 $\boldsymbol{H}_{\lambda,\mu}-\boldsymbol{Q}\geqslant0$,即 $\varphi(x)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的凸函数,而且 $\nabla\varphi(\bar{x})=0$,则 $(\boldsymbol{H}_{\lambda,\mu}-\boldsymbol{Q})\bar{x}+(b_{\lambda,\mu}-\beta)=0$,因此 $\beta=(\boldsymbol{H}_{\lambda,\mu}-\boldsymbol{Q})\bar{x}+b_{\lambda,\mu}$。

对于问题(BCP),$\bar{x}=(\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_n)^{\mathrm{T}}\in D$,$\boldsymbol{Q}=diag(q_1,\cdots,q_n),q_i\in\mathbf{R},i=1,\cdots,n$,定义

$$\tilde{x}_i=\begin{cases}-1,\bar{x}_i=u_i\\1,\bar{x}_i=v_i\\(\boldsymbol{H}\lambda,\mu\bar{x}+b_{\lambda,\mu})_i,\bar{x}_i\in(u_i,v_i)\end{cases},\tilde{\boldsymbol{X}}=diag(\tilde{x}_1,\cdots,\tilde{x}_n),\tilde{q}_i=\min\{0,q_i\}=\begin{cases}0,q_i\geqslant0\\q_i,q_i\leqslant0\end{cases},\tilde{\boldsymbol{Q}}=diag(\tilde{q}_1,\cdots,\tilde{q}_n)$$

由命题1可以得到下面关于问题(BCP)的全局最优性充分条件。 证毕

定理1 设 $\bar{x}=(\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_n)^{\mathrm{T}}\in C$,若存在 $\lambda\in\mathbf{R}_+^m,\mu\in\mathbf{R}^p$,以及对角矩阵 $\boldsymbol{Q}=diag(q_1,\cdots,q_n),q_i\in\mathbf{R},i=1,\cdots,n$,满足 $\lambda_jg_j(\bar{x})=0,j\in I,\boldsymbol{H}_{\lambda,\mu}-\boldsymbol{Q}\geqslant0$。对任意的 $x\in C$,若 $b_i(x_i-\bar{x}_i)\geqslant0,i=1,\cdots,n$,且

$$\tilde{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{H}_{\lambda,\mu}\bar{x}+b_{\lambda,\mu})-\frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{Q}}(v-u)\leqslant0\tag{2}$$

则 $\bar{x}$ 是问题(BCP)的一个全局极小值点。

证明 设 $l(x)=b^{\mathrm{T}}x^3+\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}x+\beta^{\mathrm{T}}x$,$\beta=(\boldsymbol{H}_{\lambda,\mu}-\boldsymbol{Q})\bar{x}+b_{\lambda,\mu}$,由 L-次微分的定义,$l(x)\in\partial_LF(\bar{x})$,可得 $F(x)\geqslant F(\bar{x})+l(x)-l(\bar{x}),\forall x\in\mathbf{R}^n$。显然当 $l(x)-l(\bar{x})\geqslant0,\forall x\in C$ 时,$\bar{x}$ 是问题(BCP)的一个全局极小值点。

由 $l(x)$ 的定义有 $l(x)-l(\bar{x})=b^{\mathrm{T}}(x^3-\bar{x}^3)+\sum\limits_{i=1}^n\frac{q_i}{2}(x_i-\bar{x}_i)^2+(\boldsymbol{H}_{\lambda,\mu}\bar{x}+b_{\lambda,\mu})(x-\bar{x})$,则 $l(x)-l(\bar{x})\geqslant0$ 当且仅当 $\frac{q_i}{2}(x_i-\bar{x}_i)^2+(\boldsymbol{H}_{\lambda,\mu}\bar{x}+b_{\lambda,\mu})_i(x_i-\bar{x}_i)+b_i(x_i^3-\bar{x}_i^3)\geqslant0,i=1,\cdots,n$。

当条件(2)成立时,有 $\tilde{x}_i(\boldsymbol{H}_{\lambda,\mu}\bar{x}+b_{\lambda,\mu})_i-\frac{\tilde{q}_i}{2}(v_i-u_i)\leqslant0$,事实上,$\tilde{q}_i\leqslant0$,则对任意的 $x_i\in[u_i,v_i],i=1,\cdots,n$,有

$$\begin{cases}\tilde{x}_i(\boldsymbol{H}_{\lambda,\mu}\bar{x}+b_{\lambda,\mu})_i-\frac{\tilde{q}_i}{2}(x_i-u_i)\leqslant0\\\tilde{x}_i(\boldsymbol{H}_{\lambda,\mu}\bar{x}+b_{\lambda,\mu})_i-\frac{\tilde{q}_i}{2}(v_i-x_i)\leqslant0\end{cases}\tag{3}$$

下面对 $\bar{x}_i=u_i,\bar{x}_i=v_i,\bar{x}_i\in(u_i,v_i)$ 这3种情况分别讨论。

i) 若 $\bar{x}_i=u_i$,则 $\tilde{x}_i=-1$,$(\boldsymbol{H}_{\lambda,\mu}\bar{x}+b_{\lambda,\mu})_i+\frac{\tilde{q}_i}{2}(x_i-u_i)\geqslant0$,且

$$\frac{q_i}{2}(x_i-\bar{x}_i)^2+(\boldsymbol{H}_{\lambda,\mu}\bar{x}+b_{\lambda,\mu})_i(x_i-\bar{x}_i)+b_i(x_i^3-\bar{x}_i^3)\geqslant\frac{\tilde{q}_i}{2}(x_i-u_i)^2+(\boldsymbol{H}_{\lambda,\mu}\bar{x}+b_{\lambda,\mu})_i(x_i-u_i)+b_i(x_i^3-\bar{x}_i^3)=$$

$$\left\{(\boldsymbol{H}_{\lambda,\mu}\bar{x}+b_{\lambda,\mu})_i+\frac{\tilde{q}_i}{2}(x_i-u_i)\right\}(x_i-u_i)+b_i(x_i^3-u_i^3)\geqslant 0$$

ii) 若 $\bar{x}_i=v_i$，则 $\tilde{x}_i=1$，$(\boldsymbol{H}_{\lambda,\mu}\bar{x}+b_{\lambda,\mu})_i+\frac{\tilde{q}_i}{2}(x_i-v_i)\leqslant 0$，且

$$\frac{q_i}{2}(x_i-\bar{x}_i)^2+(\boldsymbol{H}_{\lambda,\mu}\bar{x}+b_{\lambda,\mu})_i(x_i-\bar{x}_i)+b_i(x_i^3-\bar{x}_i^3)\geqslant\frac{\tilde{q}_i}{2}(x_i-v_i)^2+(\boldsymbol{H}_{\lambda,\mu}\bar{x}+b_{\lambda,\mu})_i(x_i-v_i)+b_i(x_i^3-\bar{x}_i^3)=$$

$$\left\{(\boldsymbol{H}_{\lambda,\mu}\bar{x}+b_{\lambda,\mu})_i+\frac{\tilde{q}_i}{2}(x_i-v_i)\right\}(x_i-v_i)+b_i(x_i^3-v_i^3)\geqslant 0$$

iii) 若 $\bar{x}_i\in(u_i,v_i)$，则 $\tilde{x}_i=(\boldsymbol{H}_{\lambda,\mu}\tilde{x}+b_{\lambda,\mu})_i$，

$$\tilde{x}_i\,(\boldsymbol{H}_{\lambda,\mu}\bar{x}+b_{\lambda,\mu})_i-\frac{\tilde{q}_i}{2}(x_i-u_i)\leqslant 0 \tag{4}$$

由于$-\frac{\tilde{q}_i}{2}(x_i-u_i)\geqslant 0$，则 $\tilde{x}_i\,(\boldsymbol{H}_{\lambda,\mu}\bar{x}+b_{\lambda,\mu})_i\leqslant 0$。又由 $\tilde{x}_i=(\boldsymbol{H}_{\lambda,\mu}\bar{x}+b_{\lambda,\mu})_i$，有$(\boldsymbol{H}_{\lambda,\mu}\bar{x}+b_{\lambda,\mu})_i=0$。从而由(4)式可得$-\frac{\tilde{q}_i}{2}(x_i-u_i)\leqslant 0$，故 $\tilde{q}_i=0$。因此

$$\frac{q_i}{2}(x_i-\bar{x}_i)^2+(\boldsymbol{H}_{\lambda,\mu}\bar{x}+b_{\lambda,\mu})_i(x_i-\bar{x}_i)+b_i(x_i^3-\bar{x}_i^3)\geqslant\frac{\tilde{q}_i}{2}(x_i-\bar{x}_i)^2+b_i(x_i^3-\bar{x}_i^3)=b_i(x_i^3-\bar{x}_i^3)\geqslant 0$$

综上可得，当条件(2)成立时，有 $l(x)-l(\bar{x})\geqslant 0$，因此 $\bar{x}$ 是问题(BCP)的一个全局极小值点。 证毕

注 2 在定理 1 中得到了带有二次等式和不等式约束的一类特殊三次规划问题的最优性充分条件。下面通过例子来验证定理 1 所得结论的可行性和有效性。

例 1 $\min\quad f(x)=\frac{1}{3}x_1^3+x_2^3+x_3^3+\frac{1}{2}x_1^2+x_1x_3+x_2^2+x_2x_3+\frac{1}{2}x_3^2+2x_1+5x_2+3x_3$

$\text{s.t.}\quad g(x)=\frac{1}{2}x_1^2+\frac{3}{2}x_2^2-\frac{1}{2}x_3^2-x_1-3x_2+2x_3\leqslant 0, x\in D=\prod_{i=1}^{3}[1,2]$

解 由题可知 $\boldsymbol{A}_0=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&1\\1&1&1\end{bmatrix}$，$a_0=\begin{bmatrix}2\\5\\3\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$，$a_1=\begin{bmatrix}-1\\-3\\2\end{bmatrix}$。取 $\lambda=0$，$\bar{x}=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，则对任意的 $x_i\in[1,2]$，$b_i(x_i-\bar{x}_i)\geqslant 0$，$i=1,2,3$，$\boldsymbol{Q}=diag(-1,2,-1)$，则有 $\boldsymbol{H}_\lambda=\boldsymbol{A}_0+\lambda\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&1\\1&1&1\end{bmatrix}$，$b_\lambda=a_0+\lambda a_1=\begin{bmatrix}2\\5\\3\end{bmatrix}$。于是有 $\boldsymbol{H}_\lambda\bar{x}+b_\lambda=\begin{bmatrix}4\\8\\6\end{bmatrix}$，又 $\tilde{\boldsymbol{X}}=diag(-1,-1,-1)$，$\tilde{\boldsymbol{Q}}=diag(-1,0,-1)$，因此

$$\tilde{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{H}_\lambda\bar{x}+b_\lambda)=(-4,-8,-6)^{\mathrm{T}},\ \frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{Q}}(v-u)=\left(-\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{T}}$$

故 $\tilde{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{H}_\lambda\bar{x}+b_\lambda)-\frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{Q}}(v-u)\leqslant 0$ 成立，即 $\bar{x}=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 是全局最优解。

注 3 Zhang 等得到了带箱子约束的一类特殊三次规划问题的全局最优性充分条件[8]。对于问题(BCP)，当 $I=J=\varnothing$ 时，定理 1 所得结论与文献[8]中相应结论是一致的。于是可得如下推论。

推论 1 设 $I=J=\varnothing$，$\bar{x}=(\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_n)^{\mathrm{T}}\in D$，$u=(u_1,\cdots,u_n)^{\mathrm{T}}$，$v=(v_1,\cdots,v_n)^{\mathrm{T}}$，如果存在对角矩阵 $\boldsymbol{Q}=diag(q_1,\cdots,q_n)$，$q_i\in\mathbf{R}$，$i=1,\cdots,n$，满足 $\boldsymbol{A}_0-\boldsymbol{Q}\geqslant 0$，对任意的 $x\in D$，$b_i(x_i-\bar{x}_i)\geqslant 0$，$i=1,\cdots,n$，若 $\tilde{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{A}_0\bar{x}+a)-\frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{Q}}(v-u)\leqslant 0$，则 $\bar{x}$ 是问题(BCP)的一个全局极小值点。

注 4 Jeyakumar 等给出了带箱子约束的二次规划问题的全局最优性充分条件[4]。而对于问题(BCP)，

当 $I=J=\varnothing$，$b=0$ 时，所得结论与文献[4]中相应结论是一致的。于是可得如下推论。

推论 2 当 $I=J=\varnothing$ 时，$b=0$ 时，设 $\bar{x}=(\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_n)^{\mathrm{T}}\in D$，$u=(u_1,\cdots,u_n)^{\mathrm{T}}$，$v=(v_1,\cdots,v_n)^{\mathrm{T}}$，若存在对角矩阵 $\boldsymbol{Q}=diag(q_1,\cdots,q_n)$，$q_i\in\mathbf{R}$，$i=1,\cdots,n$，满足 $\boldsymbol{A}_0-\boldsymbol{Q}\geqslant 0$，对任意的 $x\in D$，若 $\widetilde{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{A}_0\bar{x}+a)-\frac{1}{2}\widetilde{\boldsymbol{Q}}(v-u)\leqslant 0$，则 $\bar{x}$ 是问题(BCP)的一个全局极小值点。

参考文献：

[1] Henin C, Doutriaux J. A specialization of the convex simplex method to cubic programming[J]. Decis Econ Finance, 1980(3): 61-72.

[2] Hanoch G, Levy H. Efficient portfolio selection with quadratic and cubic utility[J]. J Bus, 1970(43): 181-189.

[3] Levy H, Sarnat M. Investment and portfolio analysis[M]. New York: Wiley, 1972.

[4] Jeyakumar V, Rubinov A M, Wu Z Y. Sufficient global optimality conditions for non-convex quadratic minimization problems with box constraints[J]. J Glob Optim, 2006, 36(3): 471-481.

[5] Jeyakumar V, Rubinov A M, Wu Z Y. Non-convex quadratic minimization problems with quadratic constraints: global optimality conditions[J]. Math Program, 2007, 110(3): 521-541.

[6] Wu Z Y, Jeyakumar V, Rubinov A M. Sufficient conditions for global optimality of bivalent nonconvex quadratic programs with inequality constraints[J]. J Optim Theory Appl, 2007, 133(1): 123-130.

[7] Wang Y J, Liang Z A. Global optimality conditions for cubic minimization problem with box or binary constraints[J]. J Glob Optim, 2010, 47(4): 583-595.

[8] Zhang X M, Wang Y J, Ma W M. Global sufficient optimality conditions for a special cubic minimization problem[EB/OL]. [2013-05-02]. http://dx.doi.org/10.1155//2012/871741.

[9] Wu Z Y, Quan J, Li G Q, et al. Necessary optimality conditions and new optimization methods for cubic polynomial optimization problems with mixed variables[J]. J Optim Theory Appl, 2012, 153(2): 408-435.

[10] 祈云峰，吴至友. 混合整数二次规划的全局充分性最优条件[J]. 重庆师范大学学报：自然科学版，2010，27(5)：1-4.
Qi Y F, Wu Z Y. Sufficient global optimality conditions for mixed-integer quadratic minimization problem with inequality constraints[J]. Journal of Chongqing Normal University: Natural Science, 2010, 27(5); 1-4.

[11] 李国权，吴至友. 带有二次约束的一些非凸二次规划问题的全局最优性条件[J]. 重庆师范大学学报：自然科学版，2008，25(3)：1-4.
Li G Q, Wu Z Y. Sufficient global optimality conditions for some nonconvex quadratic program problems with quadraints[J]. Journal of Chongqing Normal University: Natural Science, 2008, 25(3): 1-4.

[12] Wu Z Y. Sufficient global optimality conditions for weakly convex minimization problems[J]. J Glob Optim, 2007, 39(3): 427-440.

Operations Research and Cybernetics

Sufficient Global Optimality Conditions for a Special Cubic Minimization Problem with Quadratic Constrains

YE Min, LI Guo-quan

(School of Mathematics, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: By employing Lagrangian function and L-subdifferential approach, we study the global optimality conditions for a class of cubic programming problem involving quadratic constrains. Firstly, we explicitly calculate the abstract subdifferential for Lagrangian function of the class of cubic programming problems. Then some sufficient global optimality conditions for cubic programming problem with quadratic constrains are obtained. Lastly, we also provide numerical examples to illustrate our optimality conditions.

Key words: cubic program; quadratic constraints; lagrangian function; L-subdifferential ; sufficient global optimality conditions

（责任编辑 黄 颖）