2014 年 5 月 重庆师范大学学报(自然科学版) May 2014
第 31 卷 第 3 期 Journal of Chongqing Normal University (Natural Science) Vol. 31 No. 3

DOI:10.11721/cqnuj20140312

Milloux 不等式在代数体函数中的推广*

张 进

(德宏师范高等专科学校 数学系,云南 潞西 678400)

摘要:Milloux 不等式是亚纯函数结合所论函数的导数的一个重要不等式,本文主要讨论了 Milloux 不等式在代数体函数中的推广问题。首先建立了关于 v 值代数体函数 $\omega(z)$ 的一个性质引理:$\sum_{k=1}^{p} m\left(r,\dfrac{1}{\omega-a_k}\right) \leqslant m\left(r,\sum_{k=1}^{p}\dfrac{1}{\omega-a_k}\right)+O(1)$,其中 $a_k(k=1,2,\cdots,p)$ 是 p 个互异的有穷复数,在此基础之上结合了代数体函数的对数导数引理,以及代数体函数第二基本定理,得到了涉及 $\omega(z)$ 与 $a_i(i=1,2,\cdots,p)$ 及其 k 阶导数 $\omega^{(k)}(z)(\forall k\in\mathbf{N})$ 与 $b_j(j=1,2,\cdots,q)$ 的密值量的不等式,即 Milloux 不等式在代数体函数中对应的一般形式的不等式,最后还给出了推广的 Milloux 不等式的涉及代数体函数的 Borel 例外值的推论。

关键词:Milloux 不等式;代数体函数;Borel 例外值

中图分类号:O174.53 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-6693(2014)03-0055-04

在结合导数的值分布中,H. Milloux[1] 曾在亚纯函数的第二基本定理基础上结合所论函数的导数得到了如下定理。

定理 A 设 $f(z)$ 在 $|z|<R$ 内亚纯,若 $f(0)\neq 0,\infty$,$f^{(k)}(0)\neq 1$,$f^{(k+1)}(0)\neq 0$,则对于 $0<r<R$ 有

$$T(r,f)<\overline{N}(r,f)+N\left(r,\frac{1}{f}\right)+N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-1}\right)-N\left(r,\frac{1}{f^{(k+1)}}\right)+S(r,f)$$

其中 $S(r,f)=O\{\log(rT(r,f))\}$,于无穷级时可能须除去一测度有穷的 r 值集。

由上述 Milloux 不等式还可得到以下内容。

系[2] 设 $f(z)$ 为有穷正级整函数,则下列 2 种情况不能同时成立:1) $f(z)$ 有一个有穷的 Borel 例外值;2) $f^{(k)}(z)$ 有一个有穷非零的 Borel 例外值。

假定 $\omega(z)$ 是 v 值代数体函数,它由不可约方程

$$\psi(z,\omega)=A_v(z)\omega^v+A_{v-1}(z)\omega^{v-1}+\cdots+A_0(z)=0 \tag{1}$$

所确定。这里 $A_j(z)(j=0,1,\cdots,v)$ 都是整函数且不在一点同时为零。

对于 Milloux 不等式在亚纯函数中的推广问题,许多文献如文献[3-5]等对此都有过推广与改进,Milloux 不等式是针对亚纯函数的,对于代数体函数是否有对应的不等式,本文对此进行了讨论,其主要结果将 Milloux 不等式的一般形式推广到了代数体函数,改进了熊庆来[6] 建立的不等式(熊庆来不等式是结合的所论代数体函数的一阶导数)。本文所使用的符号是值分布中的标准记号。

1 相关引理

引理 1 设 $\omega(z)$ 是由不可约方程(1)所确定 v 值代数体函数,$a_k(k=1,2,\cdots,p)$ 是 p 个互异的有穷复数,则 $\sum_{k=1}^{p} m\left(r,\dfrac{1}{\omega-a_k}\right) \leqslant m\left(r,\sum_{k=1}^{p}\dfrac{1}{\omega-a_k}\right)+O(1)$ 。

证明 设 $F(z)=\sum_{k=1}^{p}\dfrac{1}{\omega(z)-a_k}$,则 $\dfrac{1}{\omega(z)-a_k}(k=1,2,\cdots,p)$ 及 $F(z)$ 仍是 v 值代数体函数[7],设 $\omega_j(z)(j=$

* **收稿日期**:2013-04-22 **修回日期**:2013-06-22 **网络出版时间**:2014-5-8 14:38

作者简介:张进,男,讲师,研究方向为函数论,E-mail:13578219676@163.com

网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20140508.1438.013.html

$1,2,\cdots,v$) 是 $\omega(z)$ 的 v 个分支,由对应法则 $\frac{1}{\omega(z)-a_k}$ 及 $F(z)$ 的 v 个分支分别为 $\frac{1}{\omega_j(z)-a_k}(j=1,2,\cdots,v)$,$F_j(z)=\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{\omega_j(z)-a_k}(j=1,2,\cdots,v)$。对每一个 r,设 $z=re^{i\theta}(0\leqslant\theta<2\pi)$,置 $\delta=\min_{1\leqslant j<k\leqslant p}\{|a_j-a_k|\}$,$E_{j,k}(\theta)=\min_{1\leqslant j<k\leqslant p}\left\{\theta:|\omega_j(z)-a_k|<\frac{\delta}{2p}\right\}$,分2种情况讨论。

1) $z\in\bigcup_{k=1}^{p}E_{j,k}(\theta)$,不妨设 $z\in E_{j,m}(\theta)$,当 $k\neq m$ 时,有

$$|\omega_j(z)-a_k|\geqslant|a_m-a_k|-|\omega_j(z)-a_m|>\delta-\frac{\delta}{2p}=\frac{2p-1}{2p}\delta\geqslant\frac{\delta}{2p}$$

故 $z\notin E_{j,m}(\theta)(k\neq m)$,由 $F_j(z)=\frac{1}{\omega_j(z)-a_m}\left\{1+\sum_{k\neq m}\frac{\omega_j(z)-a_m}{\omega_j(z)-a_k}\right\}$,则

$$|F_j(z)|\geqslant\left|\frac{1}{\omega_j(z)-a_m}\right|\left\{1-(p-1)\frac{\frac{\delta}{2p}}{\frac{2p-1}{2p}\delta}\right\}\geqslant\frac{1}{2|\omega_j(z)-a_m|}$$

$$\log^+|F_j(z)|\geqslant\log^+\frac{1}{|\omega_j(z)-a_m|}-\log 2\geqslant\sum_{k=1}^{p}\log^+\left|\frac{1}{\omega_j(z)-a_k}\right|-p\log^+\frac{2p}{\delta}-\log 2 \tag{2}$$

2) $z\notin\bigcup_{k=1}^{p}E_{j,k}(\theta)$,则对任意 $k\in\{1,2,\cdots,p\}$,有 $|\omega_j(z)-a_k|\geqslant\frac{\delta}{2p}$。故 $\sum_{k=1}^{p}\log^+\left|\frac{1}{\omega_j(z)-a_k}\right|-p\log^+\frac{2p}{\delta}\leqslant 0$,则(2)式仍成立。

因此对 $\forall z=re^{i\theta}(0\leqslant\theta<2\pi)$(除去 $\omega(z)$ 的分支点外)都有(2)式成立,故

$$m(r,F_j)\geqslant\sum_{k=1}^{p}m\left(r,\frac{1}{\omega_j-a_k}\right)-\frac{p}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\frac{2p}{\delta}\mathrm{d}\theta-\log 2$$

所以有
$$m(r,F)=\frac{1}{v}\sum_{j=1}^{v}m(r,F_j)\geqslant\frac{1}{v}\sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{v}m\left(r,\frac{1}{\omega_j-a_k}\right)-O(1)=\sum_{k=1}^{p}m\left(r,\frac{1}{\omega-a_k}\right)-O(1)$$
证毕

2 主要结果及证明

定理1 设 $\omega(z)$ 是由不可约方程(1)所确定 v 值代数体函数,$a_i(i=1,2,\cdots,p)$ 是 p 个判别的有穷复数,$b_j(j=1,2,\cdots,q)$ 是 q 个非零的判别有穷复数,则有

$$[pq-4(v-1)]T(r,\omega)<\overline{N}(r,\omega)+q\sum_{i=1}^{p}N\left(r,\frac{1}{\omega-a_i}\right)+$$
$$\sum_{j=1}^{q}N\left(r,\frac{1}{\omega^{(k)}-b_j}\right)-\left[N\left(r,\frac{1}{\omega^{(k+1)}}\right)+(q-1)N\left(r,\frac{1}{\omega^{(k)}}\right)\right]+S(r,\omega)$$

其中 $S(r,\omega)=O\{\log(rT(r,\omega))\}$,于无穷级时可能须除去一测度有穷的 r 值集。

证明 结合引理1可得

$$pT(r,\omega)=\sum_{i=1}^{p}m\left(r,\frac{1}{\omega-a_i}\right)+\sum_{i=1}^{p}N\left(r,\frac{1}{\omega-a_i}\right)+O(1)\leqslant m\left(r,\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{\omega-a_i}\right)+\sum_{i=1}^{p}N\left(r,\frac{1}{\omega-a_i}\right)+O(1)\leqslant$$
$$m\left(r,\frac{1}{\omega^{(k)}}\right)+m\left(r,\sum_{i=1}^{p}\frac{\omega^{(k)}}{\omega-a_k}\right)+\sum_{i=1}^{p}N\left(r,\frac{1}{\omega-a_i}\right)+O(1)$$

又 $m\left(r,\sum_{i=1}^{p}\frac{\omega^{(k)}}{\omega-a_k}\right)\leqslant\sum_{i=1}^{p}m\left(r,\frac{(\omega-a_i)^{(k)}}{\omega-a_i}\right)+\log p$,由于 $\omega-a_i(i=1,2,\cdots,p)$ 仍是 v 值代数体函数[7],由文献[8]中定理2.21的注1可得 $m\left(r,\frac{(\omega-a_i)^{(k)}}{\omega-a_i}\right)=O\{\log(rT(r,\omega-a_i)\}=S(r,\omega-a_i)$,所以有

$$pT(r,\omega)\leqslant T(r,\omega^{(k)})-N\left(r,\frac{1}{\omega^{(k)}}\right)+\sum_{i=1}^{p}N\left(r,\frac{1}{\omega-a_i}\right)+S(r,\omega)$$

由上式可得

$$pqT(r,\omega)\leqslant qT(r,\omega^{(k)})-qN\left(r,\frac{1}{\omega^{(k)}}\right)+q\sum_{i=1}^{p}N\left(r,\frac{1}{\omega-a_i}\right)+S(r,\omega)\tag{3}$$

再应用文献[8]中(2.6.5)式于 $\omega^{(k)}(z)$ 和 0 及 $\{b_j\}_{j=1}^{q}$ 得

$$qT(r,\omega^{(k)})<N(r,\omega^{(k+1)})+N\left(r,\frac{1}{\omega^{(k)}}\right)+\sum_{j=1}^{q}N\left(r,\frac{1}{\omega^{(k)}-b_j}\right)-\left[N(r,\omega^{(k)})+N\left(r,\frac{1}{\omega^{(k+1)}}\right)\right]+S(r,\omega^{(k)})\tag{4}$$

综合(3)、(4)式可得

$$pqT(r,\omega)<N(r,\omega^{(k+1)})+q\sum_{i=1}^{p}N\left(r,\frac{1}{\omega-a_i}\right)+\sum_{j=1}^{q}N\left(r,\frac{1}{\omega^{(k)}-b_j}\right)-$$
$$\left[N(r,\omega^{(k)})+N\left(r,\frac{1}{\omega^{(k+1)}}\right)+(q-1)N\left(r,\frac{1}{\omega^{(k)}}\right)\right]+S(r,\omega)\tag{5}$$

若 $\omega(z)$在 z_0 有 λ 个分支取有穷值 a，其重级为 τ，则 $\omega(z)-a=(z-z_0)^{\frac{\tau}{\lambda}}\omega_0(z)$，当 $\lambda=1$ 时，$\omega^{(k)}(z_0)\neq\infty$，$\omega^{(k+1)}(z_0)\neq\infty$，当 $\lambda>1$，则 $\omega^{(k)}(z)=(z-z_0)^{\frac{\tau-k\lambda}{\lambda}}\omega_1(z)$，$\omega^{(k+1)}(z)=(z-z_0)^{\frac{\tau-(k+1)\lambda}{\lambda}}\omega_2(z)$，故当 $\tau<k\lambda$ 时，z_0 是 $\omega^{(k)}(z)$的 $k\lambda-\tau$ 重极点，当 $\tau<(k+1)\lambda$ 时，z_0 是 $\omega^{(k+1)}(z)$的$(k+1)\lambda-\tau$ 重极点；若 z_0 是 $\omega(z)$的极点，则 z_0 是 $\omega^{(k)}(z)$的 $\tau+k\lambda$ 重极点，z_0 是 $\omega^{(k+1)}(z)$的 $\tau+(k+1)\lambda$ 重极点，则当 $\lambda=1$ 时，$\omega^{(k)}(z)$及 $\omega^{(k+1)}(z)$的极点仅来自 $\omega(z)$的极点，有

$$n(r,\omega^{(k+1)})-n(r,\omega^{(k)})=\sum_{\omega=\infty}[\tau+(k+1)\lambda]-\sum_{\omega=\infty}(\tau+k\lambda)=\sum_{\omega=\infty}\lambda=\sum_{\omega=\infty}1=\overline{n}(r,\omega)$$

当 $\lambda>1$ 时

$$n(r,\omega^{(k+1)})-n(r,\omega^{(k)})=\sum_{\omega=\infty}[\tau+(k+1)\lambda]+\sum_{\substack{\omega\neq\infty\\ \tau<(k+1)\lambda}}[(k+1)\lambda-\tau]-[\sum_{\omega=\infty}(\tau+k\lambda)+\sum_{\substack{\omega\neq\infty\\ \tau<k\lambda}}(k\lambda-\tau)]=$$
$$\sum_{\omega=\infty}\lambda+\sum_{\substack{\omega\neq\infty\\ k\lambda\leqslant\tau<(k+1)\lambda}}[(k+1)\lambda-\tau]+\sum_{\substack{\omega\neq\infty\\ \tau<k\lambda}}[(k+1)\lambda-\tau]-\sum_{\substack{\omega\neq\infty\\ \tau<k\lambda}}(k\lambda-\tau)\leqslant$$
$$\sum_{\omega=\infty}\lambda+\sum_{\substack{\omega\neq\infty\\ k\lambda\leqslant\tau<(k+1)\lambda}}\lambda+\sum_{\substack{\omega\neq\infty\\ \tau<k\lambda}}\lambda<\sum_{\lambda>1}\lambda\leqslant\sum_{\lambda>1}2(\lambda-1)=2n_x(r,\omega)$$

故对任意 $1\leqslant\lambda\leqslant\nu$，有 $n(r,\omega^{(k+1)})-n(r,\omega^{(k)})<\overline{n}(r,\omega)+2n_x(r,\omega)$，结合文献[8]中引理 2.4 可得，$N(r,\omega^{(k+1)})-N(r,\omega^{(k)})\leqslant\overline{N}(r,\omega)+4(\nu-1)T(r,\omega)+O(1)$，所以由(5)式可得

$$[pq-4(\nu-1)]T(r,\omega)<\overline{N}(r,\omega)+q\sum_{i=1}^{p}N\left(r,\frac{1}{\omega-a_i}\right)+\sum_{j=1}^{q}N\left(r,\frac{1}{\omega^{(k)}-b_j}\right)-$$
$$\left[N\left(r,\frac{1}{\omega^{(k+1)}}\right)+(q-1)N\left(r,\frac{1}{\omega^{(k)}}\right)\right]+S(r,\omega)$$

其中 $S(r,\omega)=O\{\log(rT(r,\omega))\}$，于无穷级时可能须除去一测度有穷的 r 值集。　　证毕

推论　设 $\omega(z)$是由不可约方程(1)所确定 ν 值有穷正级整代数体函数，则下列 2 种情况不能同时成立：1) $\omega(z)$有 p 个判别有穷的 Borle 例外值 $a_i(i=1,2,\cdots,p)$；2) $\omega^{(k)}(z)$有 q 个判别非零有穷的 Borle 例外值 $b_j(j=1,2,\cdots,q)$，这里 $pq>4(v-1)$。

证明　结合文献[8]中引理 2.4、引理 2.5 及定理 2.21 的注 1 可得

$$T(r,\omega^{(k)})=m(r,\omega^{(k)})+N(r,\omega^{(k)})\leqslant m(r,\omega)+m\left(r,\frac{\omega^{(k)}}{\omega}\right)+N(r,\omega^{(k)})\leqslant m(r,\omega)+N(r,\omega)+$$
$$k\overline{N}(r,\omega)+2(2k-1)(\nu-1)T(r,\omega)+S(r,\omega)\leqslant[2(2k-1)(\nu-1)+k+1]T(r,\omega)+S(r,\omega)\tag{6}$$

由(6)式可得 $\lambda(\omega^{(k)})\leqslant\lambda(\omega)$，其中 $\lambda(\omega^{(k)})$，$\lambda(\omega)$分别是 $\omega^{(k)}(z)$，$\omega(z)$的级，若 2 种情况同时成立，结合题设及定理 1 可得

$$\lambda(\omega)\leqslant\max_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant q}}\left\{\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\log^{+}N\left(r,\frac{1}{\omega-a_i}\right)}{\log r},\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\log^{+}N\left(r,\frac{1}{\omega^{(k)}-b_j}\right)}{\log r}\right\}<\lambda(\omega)$$

矛盾。　　证毕

参考文献：

[1] Milloux H. Extension d'un theoreme de M R Nevablinna et applications[M]. Paris: Act Scient et Ind, 1940.

[2] 杨乐. 值分布论及其新研究[M]. 北京：科学出版社，1995：115-117.
Yang L. The distribution of values and its new study[M]. Beijing: Science Press, 1995: 115-117.

[3] 黄珏，宋国栋. 关于亚纯函数齐次微分式的 Milloux 不等式[J]. 华东师范大学学报：自然科学版，1984(3)：3-7.
Huang J, Song G D. On Millouxs Inequality Concerning Homogeneous Differential Polynomials of Meromorphic Functions[J]. Journal of East China Normal University: Natural Science, 1984(3): 3-7.

[4] 高凌云. Milloux 不等式的推广[J]. 中南民族学院学报：自然科学版，1996(4)：64-67.
Gao L Y. A generalization of an inequality of Milloux[J]. Journal of South-Central University for Nationalities: Natural Sciences, 1996(4): 64-67.

[5] 黄梅英，阮宁. 关于 H Milloux 不等式与熊庆来不等式的一点注记[J]. 漳州师范学院学报：自然科学版，2001(1)：28-32.
HuangM Y, Ruan N. A note on the H Milloux and Xiong Qing-Lai inequality[J]. Journal of Zhangzhou Teachers College: Natural Science, 2001(1): 28-32.

[6] Xiong Q L. Sur les fonctions meromorphes et les fonctions algebroides[J]. Mem Sci Math Fasc, 1957(139): 1-104.

[7] 孙道椿，高宗升. 代数体函数的唯一性定理[J]. 华南师范大学学报：自然科学版，2005(3)：80-82.
Sun D C, Gao Z S. Uniqueness theorem of algebroidal functions[J]. Journal of South China Normal University: Natural Science Edition, 2005(3): 80-82.

[8] 何育赞，萧修治. 代数体函数和常微分方程[M]. 北京：科学出版社，1982：87-102.
He Y Z, Xiao X Z. Algebroidal function and differential equation[M]. Beijing: Science Press, 1982: 87-102.

The Extension of Milloux Inequality in Algebroidal Function

ZHANG Jin

(Department of Mathematics of De Hong Teacher Training College, Luxi Yunnan 678400, China)

Abstract: Milloux inequation is a important inequation about meromorphic function and it's derived function, we discuss the problem about generalization of Milloux inequality in algebroidal function, in this paper, we firstly establish a property lemma about v-value algebroidal function $\omega(z)$, it's $\sum_{k=1}^{p} m(r, \frac{1}{\omega - a_k}) \leqslant m(r, \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{\omega - a_k}) + O(1)$, in which $a_k (k=1,2,\cdots,p)$ are p distinct finite complex numbers, on this basis, we get inequality involving density index about $\omega(z)$ with $a_i (i=1,2,\cdots,p)$ and it's k-order derivate $\omega^{(k)}(z) (\forall k \in \mathbf{N})$ with $b_j (j=1,2,\cdots,q)$ combining with logarithmic derivative lemma and the second fundamental theorem of algebroidal function, that is general form inequality of algebroidal function corresponding to Milloux inequality, at last we give inference of extension of Milloux inequality in algebroidal function involving of Borel exceptional values algebroidal function.

Keywords: Milloux inequality; algebroidal fiunction; Borel exceptional values

（责任编辑　黄　颖）