

# 输入率和服务率可变且窗口能力不等的 M/M/n 排队模型研究\*

冀云<sup>1</sup>, 高世泽<sup>2</sup>

(1. 重庆电子工程职业学院 应用电子学院, 重庆 401331; 2. 重庆师范大学 数学学院, 重庆 401331)

**摘要:** 本文建立了窗口能力不等且输入率和服务率可变的 M/M/n 排队模型。设顾客到达队列的时间间隔服从参数为  $\lambda$  的指数分布, 各服务窗对顾客的服务时间分别服从参数为  $\mu_i(k)$  的指数分布且与顾客到达时间间隔相互独立。本文还假定随着系统队长  $k$  的增加, 顾客加入队列的概率减小; 各服务窗服务率  $\mu_i(k)$  随队长  $k$  呈快慢两档变化。重点讨论了该模型  $n=2$  的情况, 运用系统的状态流图列出 K 氏方程, 结合正则性条件, 得到了系统队长的平稳分布。

**关键词:** 排队系统; 输入率可变; 服务率可变; 窗口能力不等

中图分类号: O226

文献标志码: A

文章编号: 1672-6693(2014)03-0059-03

排队论主要用于军事、生产、运输以及社会服务等领域, 在实际生活中, 常常遇到顾客办理业务时需要在窗口排队的情况<sup>[1-2]</sup>。随着队列长度不断增加, 新来的顾客选择加入队列等待的概率就越小, 有部分顾客就有可能选择不排队等待而直接离开系统, 并且由于服务人员熟练程度、业务能力、服务设备好坏等因素的影响, 各服务窗的服务能力常常存在差别, 有时同一服务窗的服务率也会根据实际情况(如等待队列的长短)而发生变化, 文献[3-6]分别讨论了一些输入率或服务率可变的排队模型。一般情况下, 系统中的顾客数越多, 服务台就会相应的提高其服务率。文献[7]讨论了服务率可变且窗口能力不等的 M/M/2 排队模型, 研究了随着队长增加, 系统服务率呈线性增加的情况。本文讨论了系统输入率和服务率均可变的情况, 研究了窗口能力不等且具有可变输入率和服务率的 M/M/n 排队模型, 更符合实际。本文考虑系统存在两个服务窗, 即  $n=2$  的情形。

## 1 模型假设

1) 系统有  $n=2$  个服务窗, 容量不限, 顾客的到达时间间隔服从参数为  $\lambda$  的指数分布;

2) 顾客到达后加入队列的概率为  $\alpha_k (0 < \alpha_k \leq 1)$ , 其中  $k$  为队长, 新来的顾客以概率  $\alpha_k = \frac{1}{k}$  加入队列, 约定当  $k < 2$  时  $\alpha_k = 1$ , 可见当  $k \rightarrow \infty$  时,  $\alpha_k \rightarrow 0$ 。

3) 2 个服务窗对顾客的服务时间分别服从参数为  $\mu_1(k)$  和  $\mu_2(k)$  的指数分布, 且与顾客的到达时间间隔相互独立; 当顾客到达系统时, 若两窗口均空闲, 顾客可任选一个窗口接受服务, 假设顾客选择 1 号窗口的概率为  $\varphi (0 < \varphi < 1)$ , 那么他选择 2 号窗口的概率为  $1 - \varphi$ , 且此时系统只有一个等待队列。记 01 状态表示系统中只有一个顾客且在 2 号窗口接受服务, 10 状态表示系统中只有一个顾客且在 1 号窗口接受服务。若两窗口均忙, 则系统的服务率  $\mu(k) = \mu_1(k) + \mu_2(k)$ 。这里对  $\mu_1(k)$  和  $\mu_2(k)$  分别呈快慢两档变化的情况做讨论, 假设  $\mu_1(k) = \begin{cases} \mu_{10}, & 0 < k \leq m \\ 2\mu_{10}, & k > m \end{cases}, \mu_2(k) = \begin{cases} \mu_{20}, & 0 < k \leq m \\ 2\mu_{20}, & k > m \end{cases}$ , 其中  $\mu_{10}, \mu_{20} > 0$  且为常数,  $m > 2$  为正整数。

## 2 数学模型

设  $X(t)$  为时刻  $t$  系统中的顾客数, 则  $\{X(t), t \geq 0\}$  是以  $I = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  为状态空间的生灭过程, 其中生率  $\lambda_k = \alpha_k \lambda = \frac{\lambda}{k}$ ,

$k = 0, 1, 2, \dots$ , 灭率  $\mu(k) = \begin{cases} I_1 \mu_{10} + I_2 \mu_{20}, & k = 1 \\ \mu_1(k) + \mu_2(k), & k > 2 \end{cases}$ 。这里  $I_1 = 1(1$

号窗忙, 否则为 0),  $I_2 = 1(2$  号窗忙, 否则为 0), 记  $\mu = \mu_{10} + \mu_{20}$ , 则系统的状态转移流图为图 1。

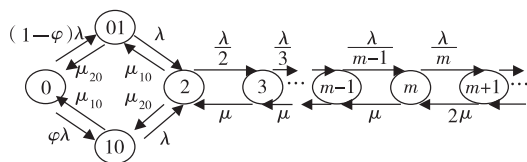


图 1 状态转移图

\* 收稿日期: 2013-10-10 修回日期: 2013-11-13 网络出版时间: 2014-5-8 14:38

资助项目: 国家社会科学基金(No. 13BTJ008)

作者简介: 冀云, 男, 讲师, 研究方向为随机系统分析, E-mail: jiyun20023801@163.com; 通讯作者: 高世泽, E-mail: lgaoshize@cqnu.edu.cn

网络出版地址: http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20140508.1438.014.html

### 3 平稳分布

**定理** 记  $P_k(t) = P\{X(t) = k\}$ ,  $P_k = \lim_{t \rightarrow \infty} P_k(t)$ , 则  $\{X(t), t \geq 0\}$  存在平稳分布

$$P_k = \begin{cases} \frac{\rho^{k-1}}{(k-1)!} \beta P_0, & 0 < k \leq m \\ \frac{\rho^{k-1}}{2^{k-m}(k-1)!} \beta P_0, & k > m \end{cases}$$

$$P_0 = \left\{ 1 + \beta + \sum_{k=2}^m \frac{\rho^{k-1}}{(k-1)!} \beta + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{\rho^{k-1}}{2^{k-m}(k-1)!} \beta \right\}^{-1}$$

其中  $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ ,  $\beta = \frac{\lambda^2 + \lambda(1-\varphi)\mu_{10} + \lambda\varphi\mu_{20}}{(2\rho+1)\mu_{10}\mu_{20}}$ .

**证明** 由状态转移图可列出在平衡状态下的 K 氏代数方程

$$\text{对 } 0 \text{ 状态} \quad \lambda P_0 = \mu_{10} P_{10} + \mu_{20} P_{01} \quad (1) \quad \text{对 } 2 \text{ 状态} \quad \lambda P_{01} + \lambda P_{10} + \mu P_3 = \left(\mu + \frac{\lambda}{2}\right) P_2 \quad (4)$$

$$\text{对 } 01 \text{ 状态} \quad (1-\varphi)\lambda P_0 + \mu_{10} P_2 = (\mu_{20} + \lambda) P_{01} \quad (2) \quad \text{对 } 3 \text{ 状态} \quad \frac{\lambda}{2} P_2 + \mu P_4 = \left(\mu + \frac{\lambda}{3}\right) P_3$$

$$\text{对 } 10 \text{ 状态} \quad \varphi\lambda P_0 + \mu_{20} P_2 = (\mu_{10} + \lambda) P_{10} \quad (3) \quad \dots \dots$$

$$\text{对 } m-1 \text{ 状态} \quad \frac{\lambda}{m-2} P_{m-2} + \mu P_m = \left(\mu + \frac{\lambda}{m-1}\right) P_{m-1}$$

$$\text{对 } m \text{ 状态} \quad \frac{\lambda}{m-1} P_{m-1} + 2\mu P_{m+1} = \left(\mu + \frac{\lambda}{m}\right) P_m \quad (5)$$

$$\text{对 } m+1 \text{ 状态} \quad \frac{\lambda}{m} P_m + 2\mu P_{m+2} = \left(2\mu + \frac{\lambda}{m+1}\right) P_{m+1}$$

... .. 将(2)式乘以  $\mu_{20}$ , 减去(3)式乘以  $\mu_{10}$ , 得

$$(1-\varphi)\lambda\mu_{20} P_0 - \varphi\lambda P_0 \mu_{10} = (\mu_{20} + \lambda)\mu_{20} P_{01} - (\mu_{10} + \lambda)\mu_{10} P_{10} \quad (6)$$

将(1)式乘以  $\lambda + \mu_{10}$ , 得

$$(\lambda + \mu_{10})\lambda P_0 = (\lambda + \mu_{10})\mu_{10} P_{10} + (\lambda + \mu_{10})\mu_{20} P_{01} \quad (7)$$

将(6)、(7)两式相加, 且有  $\mu = \mu_{10} + \mu_{20}$ , 得  $(\lambda + \mu - \mu\varphi)\lambda P_0 = (2\lambda + \mu)\mu_{20} P_{01}$ , 由此解得

$$P_{01} = \frac{(\lambda + \mu - \mu\varphi)\lambda}{(2\lambda + \mu)\mu_{20}} P_0 = \frac{(\rho + 1 - \varphi)\lambda}{(2\rho + 1)\mu_{20}} P_0, \rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

将(6)式两边乘以  $(-1)$ , 得

$$-(1-\varphi)\lambda\mu_{20} P_0 + \varphi\lambda P_0 \mu_{10} = -(\mu_{20} + \lambda)\mu_{20} P_{01} + (\mu_{10} + \lambda)\mu_{10} P_{10} \quad (8)$$

由(1)  $\times (\lambda + \mu_{20})$ , 得

$$(\lambda + \mu_{20})\lambda P_0 = (\lambda + \mu_{20})\mu_{10} P_{10} + (\lambda + \mu_{20})\mu_{20} P_{01} \quad (9)$$

(8)式加上(9)式, 得  $(\lambda + \mu\varphi)\lambda P_0 = (2\lambda + \mu)\mu_{10} P_{10}$ , 解得  $P_{10} = \frac{(\lambda + \mu\varphi)\lambda}{(2\lambda + \mu)\mu_{10}} P_0 = \frac{(\rho + \varphi)\lambda}{(2\rho + 1)\mu_{10}} P_0$ , 有

$$P_1 = P_{01} + P_{10} = \frac{(\rho + 1 - \varphi)\lambda}{(2\rho + 1)\mu_{20}} P_0 + \frac{(\rho + \varphi)\lambda}{(2\rho + 1)\mu_{10}} P_0 = \frac{\lambda^2 + \lambda(1-\varphi)\mu_{10} + \lambda\varphi\mu_{20}}{(2\rho + 1)\mu_{10}\mu_{20}} P_0$$

$$\text{记 } \frac{\lambda^2 + \lambda(1-\varphi)\mu_{10} + \lambda\varphi\mu_{20}}{(2\rho + 1)\mu_{10}\mu_{20}} = \beta, \text{ 则} \quad P_1 = P_{01} + P_{10} = \beta P_0 \quad (10)$$

$$\text{将(2)、(3)式相加, 再利用(1)和(10)式, 得} \quad \mu P_2 = \lambda(P_{10} + P_{01}) = \lambda P_1 \quad (11)$$

得到  $P_2 = \frac{\lambda}{\mu} P_1 = \rho P_1 = \rho\beta P_0$ .

将(11)式代入(4)式, 得  $\mu P_3 = \frac{\lambda}{2} P_2$ , 即  $P_3 = \frac{1}{2} \rho P_2 = \frac{1}{2} \rho^2 \beta P_0$ . 以此类推, 得  $\mu P_m = \frac{\lambda}{m-1} P_{m-1} = \frac{\lambda}{(m-1)!} \rho^{m-1} \beta P_0$ ,

从而  $P_m = \frac{1}{(m-1)!} \rho P_{m-1} = \frac{1}{m-1} \rho^{m-1} \beta P_0$ . 由(5)式得  $P_{m+1} = \frac{\rho}{2m} P_m = \frac{1}{2m} \cdot \frac{1}{(m-1)!} \rho^m \beta P_0$ . 类似可得

$$P_{m+2} = \frac{\rho}{2(m+1)} P_{m+1} = \frac{1}{4m(m+1)} \cdot \frac{1}{(m-1)!} \rho^{m+1} \beta P_0 \dots \dots$$

综上所述可得系统平稳分布  $P_k = \begin{cases} \frac{\rho^{k-1}}{(k-1)!} \beta P_0, 0 < k \leq m \\ \frac{\rho^{k-1}}{2^{k-m}(k-1)!} \beta P_0, k > m \end{cases}$ , 由正则性  $\sum_{k=0}^{\infty} P_k = 1$ , 可得  $P_0 = \left\{ 1 + \beta + \sum_{k=1}^m \frac{\rho^{k-1}}{(k-1)!} \beta + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{\rho^{k-1}}{2^{k-m}(k-1)!} \beta \right\}^{-1}$ 。

根据求得的平稳分布,便可获得系统平均队长、平均等待队长、平均逗留时间及平均等待时间等排队指标。 证毕

## 4 结论

综上所述,本文建立了窗口能力不等且输入率可变、服务率为快慢 2 档变化增长情形的  $M/M/n$  排队模型,并就  $n=2$  的情形求出了该模型的平稳分布。为了更贴近实际生活,还可以考虑  $\alpha_k$  变化更为复杂的情况。对于  $n>2$  即超过两个服务窗的情形,由于表达式过于复杂繁琐,这里不再进行推导。

## 参考文献:

- [1] 陆传赓. 排队论[M]. 北京:北京邮电大学出版社,2009.  
Lu C L. Queuing Theory[M]. Beijing:Beijing University of Posts and Telecommunications Press,2009.
- [2] 孙荣恒. 随机过程及其应用[M]. 北京:清华大学出版社,2004.  
Sun R H. Stochastic processes with applications[M]. Beijing: Tsinghua University Press,2004.
- [3] 台文志,高世泽. 一类具有可变输入率的  $M/M/1$  排队模型[J]. 重庆师范大学学报:自然科学版,2009,26(1):69-73.  
Tai W Z, Gao S Z. A  $M/M/1$  queuing model with variable input rate[J]. Journal of Chongqing Normal University: Natural Science,2009,26(1):69-73.
- [4] 徐秀丽. 对带启动时间和可变服务率的  $M/M/1$  休假排队的分析[J]. 应用数学学报,2008,31(4):692-700.  
Xu X L. Analysis for the  $M/M/1$  Vacation queue with set-up times and variable service rate[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica,2008,31(4):692-700.
- [5] 朱翼隽,张峰. 具有两种服务速度的可修  $MX/G(M/M)/1$  排队系统[J]. 江苏大学学报:自然科学版,2005,2(5):417-420.  
Zhu Y J, Zhang F. The Repairable  $MX/G(M/M)/1$  queuing system with two phases of service[J]. Journal of Jiangsu University: Natural Science Edition,2005,2(5):417-420.
- [6] 陈媛媛,廖月红. 一类具有可变服务率的  $M/M/1$  排队模型[J]. 齐齐哈尔大学学报,2011,27(5):90-91.  
Chen Y Y, Liao Y H. Study of an  $M/M/1$  queuing system with a variable service rate[J]. Journal of Qiqihar University,2011,27(5):90-91.
- [7] 侯冬倩,高世泽. 服务率可变且窗口能力不等的  $M/M/n$  排队模型研究[J]. 重庆师范大学学报:自然科学版,2010,27(2):47-48.  
Hou D Q, Gao S Z. On  $M/M/n$  queuing model with the different ability of the windows and changeable service rate[J]. Journal of Chongqing Normal University: Natural Science,2010,27(2):47-48.

## $M/M/n$ Queuing Model with Variable Input and Service Rate and Different Ability of the Windows

JI Yun<sup>1</sup>, GAO Shi-ze<sup>2</sup>

- (1. College of Applied Electronic, Chongqing College of Electronic Engineering, Chongqing 401331;
2. College of Mathematics Science, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

**Abstract:** Combining the actual situation, Queuing Model is established with the situation that the service abilities between the windows are different and the input and service rate are changeable, suppose that the interval of customers arrival time obeys the exponential distribution with parameter  $\lambda$ , the service time of various windows obeys the exponential distribution with parameter  $\mu_i$  ( $k$ ) and is mutually independent with the interval of customers' arrival time. Given that with the increase of queue length, the probability of customer join the system might decrease; the service rate  $\mu_i$  ( $k$ ) shows changes in two-grade with the system size. As to this model, in the case of  $n=2$ , get  $K'$ 's equations by the state transition graph according to the regularity, finally find the steady distribution of the system size.

**Key words:** queuing system; variable input rate; variable service rate; different service ability of the windows