DOI:10.11721/cqnuj20140314

蕴含幂零性与谱任意符号模式矩阵*

牛艳茹, 雷英杰
(中北大学 理学院, 太原 030051)

摘要:蕴含幂零性与谱任意符号模式矩阵是近几年组合数学中比较热门的一个研究方向。本文主要运用幂零-中心化子方法来证明谱任意。首先揭示了蕴含幂零及幂零指数与谱任意之间的关系,即:蕴含幂零的符号模式矩阵是谱任意的必要非充分条件且幂零指数为 n 的符号模式矩阵既非谱任意的必要条件也非充分条件。然后通过几类低阶的幂零矩阵构造了几类高阶的蕴含幂零符号模式矩阵和谱任意符号模式矩阵。最后给出了谱任意符号模式矩阵的直和仍为谱任意符号模式矩阵的一个新的条件。本文对构造幂零矩阵与谱任意符号模式矩阵有一定的应用价值。

关键词:符号模式矩阵;谱任意;蕴含幂零;幂零指数;幂零-中心化子方法

中图分类号:O157 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-6693(2014)03-0062-04

1 引言及预备知识

符号模式矩阵是组合数学中一个重要的基础问题。它在计算机科学、经济学、物理、化学、社会学等学科中均有重要的应用。而谱任意符号模式矩阵是近几年比较热门的一个研究方向。

文献[1]介绍了符号模式矩阵这一研究领域目前所有的定义及定理。文献[2]给出了证明谱任意的幂零-雅克比方法。文献[3]提出了证明谱任意的一种新方法:幂零-中心化子方法。文献[4]给出了谱任意的符号模式矩阵与蕴含幂零之间的关系,即谱任意的符号模式矩阵一定蕴含幂零符号模式矩阵而蕴含幂零的符号模式矩阵不一定是谱任意的。文献[5]提出问题:n 阶的谱任意符号模式矩阵一定蕴含指数为 n 的幂零矩阵吗?最近,文献[6-8]对谱任意符号模式矩阵做了进一步研究。

首先,给出一些相关的定义。

定义 1[1] 符号模式矩阵是指元素取自集合$\{+,-,0\}$的矩阵。对于给定的实矩阵 $\boldsymbol{A}=a_{ij}$,由 a_{ij} 的符号所确定的矩阵称为 $\boldsymbol{A}$ 的符号模式矩阵,记为 $\mathrm{sgn}(\boldsymbol{A})$。符号模式矩阵 $\mathrm{sgn}(\boldsymbol{A})$的定性矩阵类为 $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{A})=\{\boldsymbol{B}=(b_{ij})\mid \mathrm{sgn}(b_{ij})=\mathrm{sgn}(\boldsymbol{A}),i,j=1,2,\cdots,n\}$。

定义 2[1] 完全符号模式矩阵是指所有元素均不含零元。

定义 3[1] 对符号模式矩阵 $\boldsymbol{A}$,若存在一个矩阵 $\boldsymbol{B}\in\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{A})$和正整数 k,使得 $\boldsymbol{B}^k=0,\boldsymbol{B}^{k-1}\neq 0$ 则称 $\boldsymbol{A}$ 蕴含幂零,$\boldsymbol{B}$ 为幂零矩阵,k 为幂零矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的指数。

定义 4[1] 若对任意的首一 n 次实系数多项式 $f(\lambda)$,都存在实矩阵 $\boldsymbol{B}\in\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{A})$使得 $\boldsymbol{B}$ 的特征多项式为 $f(\lambda)$,则称符号模式矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为谱任意的。

定义 5[1] 对 n 阶的实矩阵 $\boldsymbol{A}$,记 $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A})=\{\boldsymbol{B}\mid\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA},\boldsymbol{B}$表示所有 $n\times n$ 的实矩阵$\}$,称 $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A})$为实矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的中心化子,且 $\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的中心化子矩阵。

定义 6[1] 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可约是指存在置换矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{C}\\ 0 & \boldsymbol{D}\end{pmatrix}$,否则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为不可约的。

引理 1[2] (幂零-雅克比方法)设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶的符号模式矩阵,若存在某个幂零矩阵 $\boldsymbol{B}\in\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{A})$,且 $\boldsymbol{B}$ 至少有 n 个非零元,记为 $b_{i_1j_1},\cdots,b_{i_nj_n}$,用变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 替换$\boldsymbol{B}$ 中这 n 个非零元所得到的矩阵为 $\boldsymbol{X}$。若 $\boldsymbol{X}$ 的特征多项式的系数关于变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的雅克比行列式在幂零点$(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(b_{i_1j_1},b_{i_2j_2},\cdots,b_{i_nj_n})$处不等于零,则 $\boldsymbol{A}$ 及其他的任意母模式都是谱任意的。

引理 2[3] (幂零-中心化子方法)设 $\boldsymbol{R}$ 为 $n\times n$ 的符号模式矩阵,$\boldsymbol{A}$ 为 $\boldsymbol{R}$ 中的指数为 n 的幂零矩阵。若在 $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A})$中仅有一个矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=0$,且 $\boldsymbol{B}$ 只能是零矩阵,则 $\boldsymbol{R}$ 和它的任意母模式矩阵均为谱任意的。

* **收稿日期**:2013-05-15 **修回日期**:2014-02-24 **网络出版时间**:2014-5-8 14:38

作者简介:牛艳茹,女,研究方向为组合数学,E-mail:867295045@qq.com

网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20140508.1438.015.html

2 主要结果及证明

2.1 谱任意符号模式矩阵与幂零指数之间的关系

定理 1[3]　幂零指数为 n 是用幂零-中心化子方法证明谱任意的充分条件。

定理 2[5]　幂零指数为 n 是用幂零-雅克比方法证明谱任意的必要条件。

定理 3　幂零指数为 n 不是谱任意的充分必要条件，二者之间没有必然的联系。

证明　假设幂零指数为 n 是谱任意的充分必要条件。但是

(1) $\begin{pmatrix} + & + & + \\ - & - & - \\ + & + & + \end{pmatrix}$ 是谱任意的符号模式矩阵，$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ 是其蕴含幂零的矩阵，但幂零指数为 2。

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 为幂零矩阵，幂零指数为 4，但 $\begin{pmatrix} + & + & - & 0 \\ - & - & + & 0 \\ 0 & 0 & 0 & + \\ + & + & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 不是谱任意。

由此，得出矛盾。即该定理成立。　证毕

2.2 通过蕴含幂零的符号模式矩阵构造谱任意

定理 4　蕴含幂零的完全符号模式矩阵是谱任意的。

证明　令 $\boldsymbol{A}$ 为 $n\times n$ 的完全符号模式矩阵。$\boldsymbol{N}\in \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{A})$ 为幂零矩阵。接下来证明 $\boldsymbol{N}$ 的幂零指数为 n。

令 $\boldsymbol{N}=\boldsymbol{PJP}^{-1}$ 为 $\boldsymbol{N}$ 的若当分解，$\boldsymbol{J}$ 为若当块的直和。若 $\boldsymbol{J}$ 的上对角线上的元全为 1，那么 $\boldsymbol{N}$ 的幂零指数为 n。否则，将 $\boldsymbol{J}$ 的上对角线上的零元用 ε 代替，其他位置上的元不变，得到 n 阶矩阵 $\boldsymbol{J}_\varepsilon$。那么，$\boldsymbol{N}_\varepsilon=\boldsymbol{PJ}_\varepsilon\boldsymbol{P}-1$ $(\varepsilon\neq 0)$ 为 n 阶的幂零指数为 n 的幂零矩阵，且当 ε 任意小时，$\boldsymbol{N}_\varepsilon\in \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{A})$，所以 $\boldsymbol{N}$ 的幂零指数为 n。

再令 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}(\boldsymbol{N})$，由 $\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}=0$ 可知 $\boldsymbol{B}=0$。所以由幂零-中心化子方法可知，$\boldsymbol{A}$ 为谱任意的。　证毕

定理 5　如果一个对角线上至少含有两个非零元且其他位置全不为零的符号模式矩阵蕴含幂零且幂零指数为 n，则其为谱任意的。

证明　不妨假设对角线上只有两个非零元。令 $\boldsymbol{A}$ 为对角线上只有两个非零元且除对角线外，其他位置均为非零元的符号模式矩阵。$\boldsymbol{N}\in \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{A})$ 为幂零指数为 n 的幂零矩阵。

不失一般性，设 $\boldsymbol{N}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}$ $(a_{ij}\neq 0, i,j=1,2,\cdots,n)$

令 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}(\boldsymbol{N})$，由 $\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=0$ 有 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & b_{33} & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{nn} \end{pmatrix}$。所以 $\boldsymbol{BA}$ 的第一行均为 0，而 $\boldsymbol{AB}$ 的第一行为 $(0,0,a_{13}b_{33},a_{14}b_{44},\cdots,a_{1n}b_{nn})$。由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 且 $a_{13},\cdots,a_{1n}\neq 0$ 知，$b_{33}=b_{44}=\cdots=b_{nn}=0$。所以 $\boldsymbol{B}=0$。由幂零-中心化子方法知，$\boldsymbol{A}$ 为谱任意的。　证毕

定理 6　设 $\boldsymbol{R}$ 为 $n\times n$ 的符号模式矩阵，$\boldsymbol{A}$ 为 $\boldsymbol{R}$ 中秩为 $n-1$ 的蕴含幂零矩阵。若在 $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A})$ 中仅有一个矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=0$，且 $\boldsymbol{B}$ 只能是零矩阵，则 $\boldsymbol{R}$ 和它的任意母模式矩阵均为谱任意的。

证明　设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的幂零指数为 k。由符号模式矩阵的幂零指数和最小秩之间的关系 $mr(\boldsymbol{A})\leqslant\frac{k-1}{k}n$（见文献[9]）得出：当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 $n-1$ 时，$k\geqslant n$。所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的幂零指数为 n。再由引理 1 知结论成立。　证毕

定理 7　若 $\boldsymbol{A}$ 为可利用幂零-中心化子方法来证明其为谱任意的符号模式矩阵。则 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{A} & \cdots & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{A} & \cdots & \boldsymbol{A} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{A} & \cdots & \boldsymbol{A} \end{pmatrix}$ 为谱

任意的符号模式矩阵。

证明　由题可知,$\boldsymbol{A}$ 蕴含幂零指数为 n 的矩阵 $\boldsymbol{B}$,且若 $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{B})\circ\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=0$,则 $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{B})=0$。那么符号模式矩阵 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{A} & \cdots & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{A} & \cdots & \boldsymbol{A}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{A} & \cdots & \boldsymbol{A}\end{pmatrix}$ 蕴含幂零矩阵 $\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{B} & \cdots & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{B} & \cdots & \boldsymbol{B}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{B} & \cdots & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}$,且其幂零指数为 n。若 $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{D})\circ\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}=0$,则 $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{D})=0$。那么由幂零-中心化子方法知:$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{A} & \cdots & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{A} & \cdots & \boldsymbol{A}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{A} & \cdots & \boldsymbol{A}\end{pmatrix}$ 为谱任意。　证毕

由上述定理,可以通过低阶的已熟知的谱任意符号模式矩阵来构造更多的高阶的复杂的谱任意符号模式矩阵。例如

例 1　$\begin{pmatrix}- & 0 & \cdots & \cdots & - & - & 0 & \cdots & \cdots & -\\ - & 0 & 0 & \cdots & - & - & 0 & 0 & \cdots & -\\ 0 & - & \ddots & \ddots & \vdots & 0 & - & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & 0 & - & \vdots & & \ddots & 0 & -\\ 0 & \cdots & 0 & + & + & 0 & \cdots & 0 & + & +\\ - & 0 & \cdots & \cdots & - & - & 0 & \cdots & \cdots & -\\ - & 0 & 0 & \cdots & - & - & 0 & 0 & \cdots & -\\ 0 & - & \ddots & \ddots & \vdots & 0 & - & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & 0 & - & \vdots & & \ddots & 0 & -\\ 0 & \cdots & 0 & + & + & 0 & \cdots & 0 & + & +\end{pmatrix}$ 为谱任意的符号模式矩阵。

例 2　$\begin{pmatrix}- & + & 0 & - & + & 0\\ - & 0 & + & - & 0 & +\\ 0 & - & + & 0 & - & +\\ - & + & 0 & - & + & 0\\ - & 0 & + & - & 0 & +\\ 0 & - & + & 0 & - & +\end{pmatrix}$ 为谱任意的符号模式矩阵。

文献[2]提出如果可约矩阵的每个不可约块都是谱任意的,那么这个可约矩阵也是谱任意的,反之亦成立。文献[10]给出反例,指出:两个谱任意的符号模式矩阵的直和不一定是谱任意的。并且给出了谱任意的符号模式矩阵通过直和运算仍为谱任意符号模式矩阵的一种条件。本文给出了谱任意的符号模式矩阵的直和仍为谱任意符号模式矩阵的另一种条件。

定理 8　若 A,B 为可利用幂零-中心化子方法来证明其为谱任意的符号模式矩阵,则 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & 0\\ 0 & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}$ 为谱任意的符号模式矩阵。

证明　由题意可知,$\boldsymbol{A}$ 蕴含幂零指数为 n 的矩阵 $\boldsymbol{C}$,且若 $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{C})\circ\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}=0$,则 $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{C})=0$。$\boldsymbol{B}$ 蕴含幂零指数为 n 的矩阵 $\boldsymbol{D}$,且若 $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{D})\circ\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}=0$,则 $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{D})=0$。那么符号模式矩阵 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & 0\\ 0 & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}$ 蕴含幂零矩阵 $\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{C} & 0\\ 0 & \boldsymbol{D}\end{pmatrix}$,且其幂零指数为 n。若 $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{E})\circ\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}=0$,则 $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{E})=0$。那么由幂零-中心化子方法知:$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & 0\\ 0 & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}$ 为谱任意。　证毕

由上述定理,可以构造如下的谱任意符号模式矩阵。

例 3　$\begin{pmatrix}+ & + & - & 0 & 0 & 0\\ + & 0 & - & 0 & 0 & 0\\ + & 0 & - & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & + & - & 0\\ 0 & 0 & 0 & + & 0 & -\\ 0 & 0 & 0 & + & 0 & -\end{pmatrix}$ 为谱任意的符号模式矩阵。

例 4 $\begin{pmatrix} + & + & - & 0 & 0 \\ + & 0 & - & 0 & 0 \\ + & 0 & - & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & - & + \\ 0 & 0 & 0 & - & + \end{pmatrix}$为谱任意的符号模式矩阵。

推论　若 $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \cdots, \boldsymbol{A}_n$ 为可利用幂零-中心化子方法来证明其为谱任意的符号模式矩阵，则 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \boldsymbol{A}_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \boldsymbol{A}n \end{pmatrix}$为谱任意的符号模式矩阵。

参考文献：

[1] Hogben L. Handbook of linear algebra[M]. Bocaraton: CRC Press, 2007.

[2] Drew J H, Johnson C R, Olesky D D, et al. Spectrally arbitrary patterns[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2000, 308: 121-137.

[3] Garnett C, Shader B L. The Nilpotent-centralizer method for spectrally arbitrary patterns[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2013, 438: 3836-3850.

[4] Gao Y, Huang Y, Shao Y. The relations of spectrally arbitrary, inertially arbitrary and potentially nilpotent sign patterns[J]. Proceedings of The 14th Conference of International Linear Algebra Society, 2007, 19-22.

[5] Bergsma H, Kevin N, Vander M, et al. Potentially nilpotent patterns and the Nilpotent-Jacobian method[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2012, 436: 4433-4445.

[6] Mcdonald J J, Yielding A A. Complex spectrally arbitrary zero-nonzero patterns[J]. Linear and Multilinear Algebra, 2012, 60: 11-26.

[7] Bodine E J, Mcdonald J J. Spectrally arbitrary patterns over finite fields[J]. Linear and Multilinear Algebra, 2012, 60: 285-299.

[8] Zhang L, Huang T Z, Li Z, et al. Several spectrally arbitrary ray patterns[J]. Linear and Multilinear Algebra, 2013, 61: 543-564.

[9] Eschenbach C A, Li Z. Potentially nilpotent sign pattern matrices[J]. Linear Algebra and Its Applications, 1999, 299: 81-99.

[10] Dealba L M, Hentzel I R, Hogben L, et al. Spectrally arbitrary patterns: reducibility and the $2n$-conjieture for $n=5$[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2007, 423: 262-276.

Potential Nilpotent and Spectrally Arbitrary Patterns

NIU Yan-ru, LEI Ying-jie

(School of Science, North University of China, Taiyuan 030051, China)

Abstract: Potential nilpotent and the spectrally arbitrary sign pattern matrices are a popular research opinion recently. The nilpotent-centralizer method was our main tool to prove spectrally arbitrary throughout our paper. Firstly, It revealed that the potential nilpotent sign pattern matrices are necessary but not sufficient condition for spectrally arbitrary patterns. Meanwhile, the sign pattern matrices whose nilpotent index is n have no necessary and sufficient conditions with the spectrally arbitrary patterns. Then, we constructed some classes of upper order potential nilpotent sign pattern matrices and spectrally arbitrary sign pattern matrices via lower order spectrally arbitrary pattens. Finally, a new condition for the direct sum of some spectrally arbitrary sign pattern matrices to be still spectrally arbitrary was also presented. The paper has important applications in constructing potential nilpotent sign pattern matrices and spectrally arbitrary sign pattern matrices.

Key words: sign pattern; spectrally arbitrary; potential nilpotent; nilpotent index; nilpotent-centralizer method.

（责任编辑　游中胜）