DOI:10.11721/cqnuj20140418

非 Lipshitz 一般集值变分不等式的广义投影算法*

李观荣，钟莉萍
(湛江师范学院 数学与计算科学学院，广东 湛江 524048)

摘要:设 K 是实 Hibert 空间 H 的非空闭凸子集,$T:H\to 2^H$ 为集值映象,$g:H\to H$ 为单值映象且 $K\subset g(H)$。所谓一般集值变分不等式问题，即是指，求 $x^*\in H$，使得 $g(x^*)\in K,w\in T(x^*)$ 且 $\langle w,g(y)-g(x^*)\rangle\geqslant 0,\forall g(y)\in K$。在求解以上一般集值变分不等式中，投影算法是常用的算法，但是传统的投影算法需集值映象 T 关于 Hausdoff 距离是 Lipschtz 的。首先，在不需要集值映象 T 关于 Hausdoff 距离是 Lipschtz 的情况下，建立了求解一般集值变分不等式的广义投影算法：第 0 步：取数列 $\{\rho_j\}$ 使得 $0<\rho_j<1,\sum_{j=0}^{\infty}\rho_j=+\infty,\sum_{j=0}^{\infty}\rho_j^{\ 2}<+\infty$. 取 $g(x^0)\in K$，令 $j:=0$。第 1 步：令 $v^j\in T(x^j)$，如果 $v^j=0$，则停止，此时 x^j 为问题的解。如果 $v^j\neq 0$，则找 w^j 使得 $\langle v^j,g(y)-g(x^j)\rangle+\langle w^j,g(y)-g(x^j)\rangle\geqslant 0,\forall g(y)\in K$。如果 $w^j=0$，则停止，此时 x^j 是问题的解；否则，进入第 2 步。第 2 步：计算 x^{j+1} 使得 $g(x^{j+1})=P_K[g(x^j)+\rho_j w^j]$；令 $j\leftarrow j+1$，回到第 1 步。然后，在 $\{w^j\}$ 有界和集值映象 T 为 g-强伪单调的条件下，证明了由该算法产生的序列 $\{x^j\}$ 强收敛于一般集值变分不等式的解。最后，对广义投影算法作一些修正，保证算法中的序列 $\{w^j\}$ 是有界的。

关键词:一般集值变分不等式；广义投影算法；非 Lipschitz 映象；强伪单调映象

中图分类号:O177.91;O178 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-6693(2014)04-0092-04

引 言

本文假定 H 是一实 Hibert 空间，$\langle\cdot,\cdot\rangle$，$\|\cdot\|$ 分别为 H 上的内积和对应范数。设 K 是 H 的非空闭凸子集,$T:H\to 2^H$ 为一集值映象,$g:H\to H$ 为一单值映象且 $K\subset g(H)$。所谓一般集值变分不等式问题[1-2]，即是指，求 $x^*\in H$，使得 $g(x^*)\in K,w\in T(x^*)$ 且

$$\langle w,g(y)-g(x^*)\rangle\geqslant 0,\ \forall g(y)\in K \tag{1}$$

若问题(1)中的 $g\equiv I$，其中 I 为恒同映射，即问题(1)变为集值变分不等式问题[3]，即是求 $x^*\in K$，使得 $w\in T(x^*)$ 且

$$\langle w,y-x^*\rangle\geqslant 0,\forall y\in K. \tag{2}$$

近年来，关于变分不等式算法的研究引起了人们极大的兴趣，人们利用各种方法和技术(例如投影技术、辅助技术、Wiener-Hopf 方程、预解算子技术等)，建立了各种各样的算法[1-2,4-8]，但是这些算法均需要变分不等式中的非线性映象是 Lipshitz 连续的。然而在实际中，Lipschitz 条件是很难满足的，即使是满足，Lipschitz 常数也不容易计算。

最近，Anh 等[3]在去掉 Lipschitz 条件的情况下给出了问题(2)的广义投影算法，并给出了算法的收敛定理。受到 Anh 等[3]的启发，本文在去掉 Lipschitz 条件的情况下给出了问题(1)的广义投影算法，并给出算法的收敛定理。同时，在证明该算法的收敛性时，我们仅需要集值映象 T 是 g-强伪单调的，弱于 Anh 等[3]文中所需的强单调条件。本文推广了 Anh 等[3]文中相关的结论。

1 预备知识

现在先介绍几个基本概念及性质。设 u 为 Hilbert 空间 H 中的一点，以 $d_K(u)=\inf_{v\in K}\|v-u\|$ 表示 u 到 K

* **收稿日期**:2013-04-12 **修回日期**:2013-06-24 **网络出版时间**:2014-7-3 23:03
资助项目:湛江师范学院自然科学研究青年项目(QL1102)

作者简介:李观荣，男，讲师，研究方向为最优化理论及应用，E-mail:liguanrong88@126.com

网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20140703.2303.018.html

的距离，则 u 到 K 的投影 $P_K[u]$ 定义为　$P_K[u]=\{u^*\in K:d_K(u)=\|u-u^*\|\}$。

设 K 是 H 的非空闭凸子集，$x\in K$ 的正则锥定义为

$$N_K(x)=\{v\in H:\langle v,y-x\rangle\leqslant 0,\forall y\in K\}$$

定义 1　集值映象 $T:H\to 2^H$ 称为

(i)单调的，当且仅当对所有的 $(x,w_x),(y,w_y)\in graphT$，$\langle w_x-w_y,x-y\rangle\geqslant 0$。

(ii)β－强单调的，当且仅当存在 $\beta>0$，使得对所有的 $(x,w_x),(y,w_y)\in graphT$，$\langle w_x-w_y,x-y\rangle\geqslant\beta\|x-y\|^2$。

(iii)伪单调的，当且仅当对所有的 $(x,w_x),(y,w_y)\in graphT$，$\langle w_y,x-y\rangle\geqslant 0\Rightarrow\langle w_x,x-y\rangle\geqslant 0$。

(iv)β－强伪单调的，当且仅当存在 $\beta>0$ 使得对所有的 $(x,w_x),(y,w_y)\in graphT$，

$$\langle w_y,x-y\rangle\geqslant 0\Rightarrow\langle w_x,x-y\rangle\geqslant\beta\|x-y\|^2$$

定义 2　设 $g:H\to H$ 为单值映象，则集值映象 $T:H\to 2^H$ 称为

(i)g－单调的，当且仅当对所有的 $(x,w_x),(y,w_y)\in graphT$，$\langle w_x-w_y,g(x)-g(y)\rangle\geqslant 0$。

(ii)$g-\beta$－强单调的，当且仅当存在 $\beta>0$，使得对所有的 $(x,w_x),(y,w_y)\in graphT$，$\langle w_x-w_y,g(x)-g(y)\rangle\geqslant\beta\|g(x)-g(y)\|^2$。

(iii)g－伪单调的，当且仅当对所有的 $(x,w_x),(y,w_y)\in graphT$，$\langle w_y,g(x)-g(y)\rangle\geqslant 0\Rightarrow\langle w_x,g(x)-g(y)\rangle\geqslant 0$。

(iv) $g-\beta$－强伪单调的，当且仅当存在 $\beta>0$ 对所有的 $(x,w_x),(y,w_y)\in graphT$

$$\langle w_y,g(x)-g(y)\rangle\geqslant 0\Rightarrow\langle w_x,g(x)-g(y)\rangle\geqslant\beta\|g(x)-g(y)\|^2。$$

注 1　(i)当 $g\equiv I$ 时，定义 2 变为定义 1。

(ii)强单调、单调和伪单调显然有下面的关系：强单调⇒单调⇒伪单调；强单调⇒ 强伪单调⇒ 伪单调。

定义 3　设为 $g:H\to H$ 单值映象，则称 g 为 σ－强单调的，当且仅当存在 $\sigma>0$，使得对所有 $x,y\in H$，$\langle g(x)-g(y),x-y\rangle\geqslant\sigma\|x-y\|^2$。

定理 1　设 $P_K[\cdot]$ 为 H 到闭凸集 K 的投影映象，则

$$\|P_K[x]-P_K[y]\|\leqslant\|x-y\|,\forall x,y\in H$$

引理 1[3]　设 $\{\alpha_j\}_{j=0}^{\infty}$ 是一非负数列使得对 $\forall j,\alpha_{j+1}\leqslant(1-\lambda)\alpha_j+\varepsilon_j$，其中

$$\lambda_j\in(0,1),\sum_{j=0}^{\infty}\lambda_j=+\infty;\ \varepsilon_j>0,\ \sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon_j<+\infty$$

则 $\lim\limits_{x\to\infty}\alpha_j=0$。

2 主要结果

本节主要给出非 Lipschitz 一般集值变分不等式的广义投影算法及其收敛定理。

算法 1

第 0 步：取数列 ρ_j 使得 $0<\rho_j<1,\sum\limits_{j=0}^{\infty}\rho_j=+\infty,\sum\limits_{j=0}^{\infty}\rho_j{}^2<+\infty$。取 $g(x^0)\in K$，令 $j:=0$。

第 1 步：令 $v^j\in T(x^j)$。如果 $v^j=0$ 则停止，此时 x^j 为问题(1)的解。如果 $v^j\neq 0$，则找 w^j 使得

$$\langle v^j,g(y)-g(x^j)\rangle+\langle w^j,g(y)-g(x^j)\rangle\geqslant 0,\forall g(y)\in K \tag{3}$$

如果 $w^j=0$，则停止，此时 x^j 是问题(1)的解。否则，进入第 2 步。

第 2 步：计算 x^{j+1} 使得 $g(x^{j+1})=P_K[g(x^j)+\rho_j w^j]$。令 $j\leftarrow j+1$，回到第 1 步。

注 2：这个算法的一个子问题是找 $w^j\neq 0$ 满足(3)式。显然 $v^j+w^j\in -N_K(g(x^j))$ 与(3)式成立是等价的。事实上，当 $v^j+w^j\in -N_K(g(x^j))$ 时，即对 $\forall g(y)\in K$，有

$$\langle v^j+w^j,g(y)-g(x^j)\rangle\geqslant 0$$

即(3)式成立；反之，当(3)式成立，显然有 $v^j+w^j\in -N_K(g(x^j))$。

注 3：当 $g\equiv I$ 时，则算法 1 变为 Anh 等[3]的算法 2.1。

注 4：当总取 $w^j=-v^j$ 时，则(3)式变为 $g(x^{j+1})=P_K[g(x^j)-\rho_j v^j]$，算法 1 即为我们所熟悉的投影算法。

定理 2　如果算法 1 产生的序列 $\{x^j\}$ 只有有限个元，则最后一项是问题(1)的解。

证明:如果$\{x^j\}$只有有限个元,则其必在第1步停止,此时的最后一项是问题(1)的解。

从现在开始,我们假定算法1产生的序列$\{x^j\}$有无穷个元。

定理3 设$T:H\to 2^H$是$g-\beta-$强伪单调的集值映象,$g:H\to H$是$\sigma-$强单调单值映象,则由算法1所产生的序列$\{x^j\}$满足

$$\| g(x^{j+1})-g(x^j)\|^2\leqslant(1-2\beta\rho_j)\| g(x^j)-g(x^*)\|^2+\rho_j^2\ \| w^j\|^2,\forall j$$

其中$\{x^*\}$是问题(1)的一个解。并且如果序列$\{w^j\}$有界,$0<\rho_j<\dfrac{1}{2\beta}$,$g$可逆且$g^{-1}$连续,则$x^j\to x^*$。

证明 设x^*为问题(1)的一个解。因为$g(x^{j+1})=P_K[g(x^j)+\rho_j w^j]$且$g(x^*)=P_K[g(x^*)]$,故

$$\| g(x^{j+1})-g(x^j)\|^2=\| P_K[g(x^j)+\rho_j w^j]-P_K[g(x*)]\|^2\leqslant\| g(x^j)+\rho_j w^j-g(x*)\|^2=$$
$$\| g(x^j)-g(x^*)\|^2+2\rho_j\langle w^j,g(x^j)-g(x^*)\rangle+\rho_j{}^2\ \| w^j\|^2 \tag{4}$$

另外,对于不等式(3),令$y=x^*$则可得$\langle v^j,g(x^*)-g(x^j)\rangle+\langle w^j,g(x^*)-g(x^j)\rangle\geqslant 0$,即

$$\langle v^j,g(x^*)-g(x^j)\rangle\geqslant\langle w^j,g(x^j)-g(x^*)\rangle \tag{5}$$

因为x^*是问题(1)的一个解,故存在$w^*\in T(x^*)$使得$\langle w^*,g(x^j)-g(x^*)\rangle\geqslant 0$,再由$T$的$g-$强伪单调性可得$\langle v^j,g(x^j)-g(x^*)\rangle\geqslant\beta\| g(x^j)-g(x^*)\|^2$,即

$$\langle v^j,g(x^*)-g(x^j)\rangle\leqslant-\beta\| g(x^j)-g(x^*)\|^2 \tag{6}$$

故由(5),(6)式可得 $$\langle w^j,g(x^j)-g(x^*)\rangle\leqslant-\beta\| g(x^j)-g(x^*)\|^2 \tag{7}$$

由(4)及(7)式可得 $\| g(x^{j+1})-g(x^j)\|^2\leqslant(1-2\beta\rho_j)\| g(x^j)-g(x^*)\|^2+\rho_j^2\ \| w^j\|^2$。 证毕

取$\lambda_j=2\beta\rho_j,\alpha_j=\| g(x^j)-g(x^*)\|$。因为$0<\rho_j<\dfrac{1}{2\beta}$,且$\sum\limits_{j=0}^{\infty}\rho_j=+\infty$,所以$\lambda_j\in(0,1)$,且$\sum\limits_{j=0}^{\infty}\lambda_j=+\infty$。又因为$\{\| w^j\|\}$为有界数列且$\sum\limits_{j=0}^{\infty}\rho_j{}^2<+\infty$,故取$\varepsilon_j=\rho_j^2\ \| w^j\|^2$,则可得$\sum\limits_{j=0}^{\infty}\varepsilon_j<+\infty$。故由引理1可得$\lim\limits_{j\to\infty}\| g(x^j)-g(x^*)\|=0$。因为$g^{-1}$存在且连续,故$\lim\limits_{j\to\infty}\| x^j-x^*\|=0$,即$x^j\to x^*(j\to\infty)$。

注5 如果$g\equiv I$(I为恒同映象),T为$\beta-$强单调的,则定理1变为Anh等[3]的定理2.1。

定理3中$\{x^j\}$的收敛性需要$\{w^j\}$是有界的。为了确保$\{w^j\}$的有界性,我们引进了另外的参数τ_j,对算法2作如下的修正。

算法2

第0步:取$g(x^0)\in K$。令$j:=0$。

第1步:取$x^j\in T(x^j)$。如果$v^j=0$,则停止,此时x^j为问题(1)的解。如果$v^j\neq 0$,则取$\rho_j\in(0,1)$和$0<\tau_j<\min\{\dfrac{1}{2\beta\rho_j},\dfrac{1}{\| v^j\|}\}$,使得$\sum\limits_{j=0}^{\infty}\rho_j\tau_j=+\infty$,$\sum\limits_{j=0}^{\infty}\rho_j{}^2<+\infty$。

第2步:取$u^j\in N_K(g(x^j))$,使得对$\forall j$,$\| u^j\|\leqslant c$(c为常数)。

第3步:找w^j使得$\tau_j v^j+w^j=-u^j$。如果$w^j=0$则停止,此时x^j为问题(1)的解。否则进入第4步。

第4步:计算x^{j+1},使得$g(x^{j+1})=P_K[g(x^j)+\rho_j w^j]$。令$j\leftarrow j+1$,回到第1步。

注6 算法2中的$\{w^j\}$显然是有界的。事实上,$\| w^j\|=\| u^j+\tau_j v^j\|\leqslant\tau_j\| v^j\|+\| u^j\|\leqslant 1+c$。

现在讨论算法2产生的序列的收敛性。假定算法2产生的序列$\{x^j\}$有无穷个元。

定理4 设$T:H\to 2^H$是$g-\beta-$强伪单调的集值映象,$g:H\to H$是$\sigma-$强单调单值映象,则由算法2所产生的序列$\{x^j\}$满足

$$\| g(x^{j+1})-g(x^j)\|^2\leqslant(1-2\beta\rho_j\tau_j)\| g(x^j)-g(x^*)\|^2+\rho_j^2\ \| w^j\|^2,\forall j$$

其中x^*是问题(1)的一个解。并且如果g可逆且g^{-1}连续,则$x^j\to x^*$。

证明 由$u^j\in N_K(g(x^j))$及$\tau_j v^j+w^j=-u^j$可得

$$\langle\tau_j v^j,g(y)-g(x^j)\rangle+\langle w^j,g(y)-g(x^j)\rangle\geqslant 0,\forall g(y)\in K$$

类似于定理3的证明,可得

$$\| g(x^{j+1})-g(x^j)\|^2\leqslant\| g(x^j)-g(x^*)\|^2+2\rho_j\langle w^j,g(x^j)-g(x^*)\rangle+\rho_j{}^2\| w^j\|\leqslant$$
$$\| g(x^j)-g(x^*)\|^2+2\rho_j\tau_j\langle v^j,g(x^*)-g(x^j)\rangle+\rho_j{}^2\| w^j\|\leqslant$$
$$(1-2\beta\rho_j\tau_j)\| g(x^j)-g(x^*)\|^2+\rho_j{}^2\| w^j\|$$

取 $\lambda_j=2\beta\rho_j\tau_j$，$\alpha_j=\| g(x^j)-g(x^*)\|$。因为 $0<\tau_j<\min\{\frac{1}{2\beta\rho_j},\frac{1}{\| v^j\|}\}$，且 $\sum_{j=0}^{\infty}\rho_j\tau_j=+\infty$，所以 $\lambda_j\in(0,1)$，且 $\sum_{j=0}^{\infty}\lambda_j=+\infty$。又因为 $\{\| w^j\|\}$ 为有界数列且 $\sum_{j=0}^{\infty}\rho_j{}^2<+\infty$，故取 $\varepsilon_j=\rho_j^2\| w^j\|^2$，则可得 $\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon_j<+\infty$。由引理 1 可得 $\lim_{j\to\infty}\| g(x^j)-g(x^*)\|=0$。因为 g^{-1} 存在且连续，故 $\lim_{j\to\infty}\| x^j-x^*\|=0$，即 $x^j\to x^*(j\to\infty)$。

证毕

参考文献：

[1] Noor M A. Generalized set-valued variational inequalities[J]. Le Mathematiche(Catania), 1997, 52: 3-24.

[2] Narin P. Existence and algorithm of solutions for general set-valued Noor variational inequalities with relaxed (μ,v)-cocoercive operators in Hilbert spaces[J]. J Appl Math Comput, 2010, 32: 393-400.

[3] Anh P N, Muu L D, Strodiot J. Generalized projection method for non-Lipschitz multivalued monotone variational inequalities[J]. Acta Math Vietnam, 2009, 34(1): 67-79.

[4] Noor M A. General variational inequalities[J]. Appl Math Lett, 1988, 1: 119-121.

[5] Noor M A. Some developments in general variational inequalities[J]. Appl Math Comput, 2004, 152: 199-277.

[6] Noor M A. Some iterative methods for general nonconvex variational inequalities[J]. Comput Math Model, 2010, 21: 87-96.

[7] Solodovy M V, Svaitery B F. A new projection method for variational inequalities problems[J]. SIAM J Control Optim, 1999, 37: 765-776.

[8] Farouo E N. Pseudomonotone variational inequalities: convergence of proximal methods[J]. Optim Theory Appl, 2001, 109: 311-326.

Generalized Projection Method for Non-Lipschitz General Set-valued Variational Inequalities

LI Guanrong, ZHONG Liping

(School of Mathematics and Computational Science, Zhanjiang Normal College, Zhanjiang Guangdong 524048, China)

Abstract: Let K be nonempty closed convex subset of real Hibert space H, $T:H\to 2^H$ be a set-valued mapping, $g:H\to H$ be a single mapping such that $K\subset g(H)$. The general set-valued variational inequality problem is given as finding $x^*\in H$, such that $g(x^*)\in K$, $w\in T(x^*)$ and $\langle w,g(y)-g(x^*)\rangle\geq 0$, $\forall g(y)\in K$. The projection algorithm is a popular algorithm for general set-valued variational inequalities. But classical projection algorithm requires that the set-valued mapping T is Lipschitz with respect to the Hausdorff distance. Firstly, we establish the generalized projection algorithm for general set-valued variational inequalities, where the set-valued mapping T is not necessarily Lipschitz with respect to the Hausdorff distance. The algorithm is given as Step 0: Choose a sequence $\{\rho_j\}$ such that $0<\rho_j<1$, $\sum_{j=0}^{\infty}\rho_j=+\infty$, $\sum_{j=0}^{\infty}\rho_j^2<+\infty$. Seek $g(x^0)\in K$ and set $j:=0$. Step 1: Take $v^j\in T(x^j)$. If $v^j=0$, then terminate: x^j solves the problem. If $v^j\neq 0$, then find w^j such that $\langle v^j,g(y)-g(x^j)\rangle+\langle w^j,g(y)-g(x^j)\rangle\geq 0$, $\forall g(y)\in K$. If $w^j=0$, then terminate: x^j is the solution. Otherwise, go to Step 2: Set x^{j+1} such that $g(x^{j+1})=P_K[g(x^{j+1})+\rho_j w^j]$. Let $j\leftarrow j+1$, and go back to Step 1. Secondly, under the assumptions that the sequence $\{w^j\}$ is bounded and the set-valued mapping T is g-strongly pseudomonotone, we proved that the sequence generated by the generalized projection algorithm strongly converges to a solution of the general set-valued variational inequalities. Finally, we make a modification of the generalized projection algorithm to ensure the boundness of the sequence $\{w^j\}$.

Key words: general set-valued variational inequalities; generalized projection method; non-Lipschitz mapping; strongly pseudomonotone mapping

(责任编辑　李若溪)