2014 年 9 月 重庆师范大学学报(自然科学版) Sep. 2014
第 31 卷 第 5 期 Journal of Chongqing Normal University (Natural Science) Vol. 31 No. 5

运筹学与控制论

DOI:10.11721/cqnuj20140505

向量优化中改进集的对偶性质*

夏远梅，张万里，赵克全
(重庆师范大学 数学学院，重庆 401331)

摘要: 基于凸锥的一些经典对偶性质,利用凸集分离定理和回收锥等工具研究了改进集的一些对偶性质,获得了改进集与凸锥之和的对偶锥等于改进集的对偶锥与凸锥的对偶锥之交;改进集回收锥的对偶锥等于凸锥的对偶锥和该改进集的对偶锥;改进集之和的对偶锥等于改进集的对偶锥之交;改进集与凸锥之交的对偶锥等于改进集的对偶锥与凸锥的对偶锥之和的闭包;改进集之交的对偶锥等于改进集的对偶锥之和的闭包;改进集之并的对偶锥等于改进集之和的对偶锥,并给出了一些具体例子对主要结果进行了解释。

关键词: 向量优化;改进集;对偶性质;凸集分离定理

中图分类号: O221.6 **文献标志码:** A **文章编号:** 1672-6693(2014)05-0026-05

向量优化研究需要借助于一些重要的数学工具,如锥序关系和凸集分离定理等。向量优化中用到的序关系一般是通过凸锥定义的。因此,凸锥的性质尤其是它的对偶性质在向量优化研究中就显得十分重要[1-4]。近年来，向量优化问题的近似解研究已经取得了大量的成果。特别地,Chicco 等人在文献[5]中提出了有限维空间中改进集的概念，研究了它的一些性质，并利用改进集定义了向量优化问题的一类统一的有效解概念——E-有效解。E-有效解概念是对许多精确与近似解概念的统一。进一步,Gutiérrez 等人在文献[6]中推广了改进集及 E-有效解概念到一般拓扑线性空间中,并研究了它们的一些新的性质。改进集是在统一的框架下研究向量优化问题解的性质的重要工具,相关研究工作见文献[7-8]等。受文献[1,6,8]中研究工作的启发,本文主要研究改进集的一些对偶性质。

1 预备知识

设 Y 是实拓扑线性空间,Y^* 是 Y 的拓扑对偶空间,$\mathbf{R}^n$ 是 n 维欧氏空间,$\mathbf{R}^n_+$ 表示非负象限锥。设非空集合 $A\subset Y$,$\mathrm{cl}\,A$、$\mathrm{conv}\,A$、$\mathrm{cone}\,A$、$Y\backslash A$ 分别表示 A 的拓扑闭包、凸包、锥包和补集,A 的对偶锥和回收锥分别定义为 $A^+=\{\lambda\in Y^*\mid\langle\lambda,y\rangle\geqslant 0,\forall y\in A\}$,$A^\infty=\{y\in Y\mid a+\mathbf{R}_{++}y\subset A,\forall a\in A\}$。

定义 1[6] 设 E 是 Y 中的非空集合,K 是 Y 中的非空凸锥。若 E 满足 $0\notin E$ 且 $E+K=E$,则称 E 是关于 K 的改进集。

引理 1[1] 设 $K_1\subset Y$ 和 $K_2\subset Y$ 是两个非空凸锥,则 $(K_1+K_2)^+=K_1^+\cap K_2^+$。

引理 2[6] 设 E 是 Y 中的非空集合,K 是 Y 中的非空凸锥。若 E 是关于 K 的改进集,则 $E^+\subset K^+$。此外,若 $E\subset K$,则 $E^+=K^+$。

引理 3[6] 设 E 是 Y 中的非空集合,K 是 Y 中的非空凸锥。若 E 是关于 K 的非空闭凸改进集,则 $(E^\infty)^+\subset K^+$。

注 1 事实上,引理 2 和引理 3 的成立只需要利用条件 $E+K=E$,无需假设 $0\notin E$。

引理 4[9] 设 $K_1\subset Y,K_2\subset Y$ 是非空凸锥,则 $K_1+K_2=\mathrm{conv}\ (K_1\cup K_2)$。

* **收稿日期:** 2013-10-04 **修回日期:** 2013-11-02 **网络出版时间:** 2014-9-17 22:37
资助项目: 国家自然科学基金(No. 11301574;No. 11171363));重庆市自然科学基金(No. CSTC2012jjA00002)
作者简介: 夏远梅,女,研究方向为向量优化理论，E-mail: mathymxia@163.com;**通讯作者:** 赵克全，E-mail: kequanz@163.com
网络出版地址: http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20140917.2237.005.html

2 改进集的对偶性质

Jahn 在文献 [1] 中获得了凸锥的如下对偶性质。

若 E_1 和 E_2 是 Y 中的两个凸锥，则

$$(E_1+E_2)^+=E_1^+\cap E_2^+。\tag{1}$$

事实上，若 E_1 或 E_2 不是凸锥时，(1)式也可能成立。

例 1　令　$E_1=\{(x_1,x_2)\mid x_1+x_2\geqslant 2,x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0\}$，$E_2=\{(x_1,x_2)\mid x_1^2+x_2^2\geqslant 4,x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0\}$
显然，E_1 和 E_2 均不是凸锥。然而，$(E_1+E_2)^+=E_1^+\cap E_2^+=\mathbf{R}_+^2$。此外，可以验证 E_1 和 E_2 是关于 $K=\mathbf{R}_+^2$ 的改进集。

下面在改进集条件下证明(1)式成立。

定理 1　设 E 是 Y 中的非空集，K 是 Y 中的非空凸锥。若 E 是关于 K 的改进集，则 $(E+K)^+=E^+\cap K^+$。

证明　因为 E 是关于 K 的改进集，所以由引理 2 可得 $E^+\subset K^+$。因此 $(E+K)^+=E^+=E^+\cap K^+$。　证毕

定理 2　设 E 是 Y 中的非空集合，K 是 Y 中的非空凸锥。若 E 是关于 K 的闭凸改进集且 $E\subset K$，则 $(E^\infty)^+=K^+=E^+$。

证明　因为 E 是关于 K 的改进集且 $E\subset K$，则由引理 2 可得 $E^+=K^+$。故仅需证明 $(E^\infty)^+=K^+$。由 E 是闭凸集和引理 3 可得 $(E^\infty)^+\subset K^+$。另一方面，因为 $E+E^\infty=E$，故由引理 2 可得 $E^+\subset(E^\infty)^+$，所以 $K^+\subset(E^\infty)^+$。　证毕

定理 3　设 E_1 和 E_2 是 Y 中的非空集合，K 是 Y 中的非空凸锥。若 E_1 是关于 K 的改进集且 $E_1,E_2\subset K$，则 $(E_1+E_2)^+=E_1^+\cap E_2^+$。

证明　因为 E_1 是关于 K 的改进集，所以 $E_1+E_2=E_1+E_2+K$。此外，由 $E_1,E_2\subset K$ 和 K 是凸锥可得 $E_1+E_2\subset K$。从而再由引理 2 可得 $(E_1+E_2)^+=K^+$。因此，只需证明 $K^+=E_1^+\cap E_2^+$。由 $E_1\subset K$ 是关于 K 的改进集，$E_2\subset K$ 和引理 2 可得 $E_1^+\cap E_2^+=K^+$。　证毕

注 2　若定理 3 中 E_1 不是关于 K 的改进集，则结论不一定成立。

例 2　令

$$E_1=\{(x_1,x_2)\mid x_1+x_2-1\geqslant 0,0\leqslant x_1\leqslant 1,0\leqslant x_2\leqslant 1\},E_2=\{(x_1,x_2)\mid 1\leqslant x_1\leqslant 2,0\leqslant x_2\leqslant 1\},K=\mathbf{R}_+^2。$$

显然，E_1 不是关于 K 的改进集且 $E_1,E_2\subset K$。此外 $E_1^+=\mathbf{R}_+^2$，$E_2^+=\mathbf{R}_+^2\cup\{(x_1,x_2)\mid x_1+x_2\geqslant 0,x_1\geqslant 0,x_2\leqslant 0\}$，$(E_1+E_2)^+=\mathbf{R}_+^2\cup\left\{(x_1,x_2)\,\middle|\,\frac{1}{2}x_1+x_2\geqslant 0,x_1\geqslant 0,x_2\leqslant 0\right\}$，故 $(E_1+E_2)^+\neq E_1^+\cap E_2^+=\mathbf{R}_+^2$。

Jahn 在文献[1]中获得了凸锥的如下对偶性质。

若 E_1 和 E_2 是 Y 中的两个凸锥，则

$$E_1^++E_2^+\subset(E_1\cap E_2)^+。\tag{2}$$

事实上，若 E_1 或 E_2 不是凸锥时，(2)式也可能成立。

例 3　令 $E_1=\{(x_1,x_2)\mid x_1+x_2\geqslant 1,x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0\}$，$E_2=\mathbf{R}_+^2\setminus\{(x_1,x_2)\mid 0\leqslant x_1\leqslant 1,0\leqslant x_2\leqslant 1\}$。显然，$E_1$ 是凸集但不是锥，E_2 不是凸锥。然而 $E_1^++E_2^+=(E_1\cap E_2)^+=\mathbf{R}_+^2$。此外，可以验证 E_1 和 E_2 是关于 $K=\mathbf{R}_+^2$ 的改进集。下面在改进集条件下证明(2)式成立。

定理 4　设 E 是 Y 中的非空集，K 是 Y 中的非空凸锥。若 E 是关于 K 的改进集，则 $(E\cap K)^+=\mathrm{cl}\,(E^++K^+)$。

证明　因为 $E\cap K\subset E$ 且 $E\cap K\subset K$，所以 $E^++K^+\subset(E\cap K)^+$，从而 $\mathrm{cl}\,(E^++K^+)\subset(E\cap K)^+$。故只需证明 $(E\cap K)^+\subset\mathrm{cl}\,(E^++K^+)$。

若存在 $x_0\in(E\cap K)^+$ 且 $x_0\notin\mathrm{cl}\,(E^++K^+)$。由 $\mathrm{cl}\,(E^++K^+)$ 是闭凸集并利用凸集分离定理可知，存在 $\lambda\in Y^{**}\setminus\{0_{Y^{**}}\}$ 使得

$$\langle\lambda,x_0\rangle>\langle\lambda,\mu\rangle,\forall\mu\in\mathrm{cl}\,(E^++K^+)。\tag{3}$$

在(3)式中,取 $\mu=0$,则有

$$\langle\lambda,x_0\rangle>0。\tag{4}$$

此外,由 $\mathrm{cl}\ (E^+ + K^+)$ 是锥和(3)式可得 $\langle\lambda,\mu\rangle\leqslant 0,\forall\mu\in\mathrm{cl}\ (E^+ + K^+)$,即 $-\lambda\in(\mathrm{cl}\ (E^+ + K^+))^+$。

再由文献[1]中的引理1.24(c)可得

$$-\lambda\in(\mathrm{cl}\ (E^+ + K^+))^+ = (E^+ + K^+)^+ = (E^+\cup K^+)^+。\tag{5}$$

根据引理2,由 E 是关于 K 的非空改进集可得 $E^+\subset K^+$。故由(5)式可得

$$-\lambda\in K^{++}=K。\tag{6}$$

下面证明 $E\cap K+K=E\cap K$。显然,$E\cap K+K\supset E\cap K$,故只需证明 $E\cap K+K\subset E\cap K$。对任意的 $x\in E\cap K+K$,存在 $y\in E\cap K,z\in K$ 使得 $x=y+z$。因为 E 是关于 K 的非空改进集且 $K+K=K$,所以 $x\in E$ 且 $x\in K$。故

$$E\cap K+K=E\cap K,\tag{7}$$

所以由引理2,$x_0\in(E\cap K)^+\subset K^+$。故结合(6)式有 $\langle\lambda,x_0\rangle\leqslant 0$,这与(4)式矛盾。 证毕

定理5 设 E_1 和 E_2 是 Y 中的非空集合,K 是 Y 中的非空凸锥。若 E_1 和 E_2 是关于 K 的改进集且 $E_1,E_2\subset K$,则 $(E_1\cap E_2)^+=\mathrm{cl}\ (E_1^+ + E_2^+)$。

证明 由 E_1,E_2 是关于 K 的改进集,$E_1,E_2\subset K$ 和引理2,$E_1^+=E_2^+=K$。故 $\mathrm{cl}\ (E_1^+ + E_2^+)=\mathrm{cl}\ (K^+ + K^+)=K^+$。故只需证明 $(E_1\cap E_2)^+=K^+$。因为 E_1,E_2 均是关于 K 的改进集,相似于(7)式的证明可得 $(E_1\cap E_2)+K=E_1\cap E_2$。

再由引理2可得 $(E_1\cap E_2)^+\subset K^+$。此外,因为 $E_1\cap E_2\subset K$,则 $K^+\subset(E_1\cap E_2)^+$。故 $(E_1\cap E_2)^+=K^+=\mathrm{cl}\ (E_1^+ + E_2^+)$。 证毕

注3 若定理5中 E_1 不是关于 K 的改进集,则结论不一定成立。

例4 令 $E_1=\{(x_1,x_2)\mid x_1-x_2\leqslant 0,0\leqslant x_1\leqslant 1,0\leqslant x_2\leqslant 1\}$,$E_2=\left\{(x_1,x_2)\,\middle|\,\frac{1}{x_1}-x_2\leqslant 0,x_1>0\right\}$,$K=\mathbf{R}_+^2$。显然,$E_1$ 不是关于 K 的改进集且 $E_1,E_2\subset K$。此外,$E_1^+=\mathbf{R}_+^2\cup\{(x_1,x_2)\mid x_1+x_2\geqslant 0,x_1\leqslant 0,x_2\geqslant 0\}$,$E_2^+=\mathbf{R}_+^2$,$(E_1\cap E_2)^+=\{(x_1,x_2)\mid x_1+x_2\geqslant 0\}$。故 $\mathrm{cl}\ (E_1^+ + E_2^+)=\mathbf{R}_+^2\cup\{(x_1,x_2)\mid x_1+x_2\geqslant 0,x_1\leqslant 0,x_2\geqslant 0\}\neq(E_1\cap E_2)^+$。

定理6 设 $K\subset Y$ 是非空闭凸锥,$E_1\subset Y$ 是关于 K 的改进集,$E_2\subset K$ 是关于 K 的改进集。若 $E_1\subset\mathrm{cl}\ (\mathrm{cone}\ (\mathrm{conv}\ (E_1+E_2)))$,则 $(E_1\cup E_2)^+=(E_1+E_2)^+$。

证明 先证左边包含于右边。若结论不成立,则存在 $x_0\in(E_1\cup E_2)^+$ 满足 $x_0\notin(E_1+E_2)^+$。由 $(E_1+E_2)^+$ 是闭凸锥,并利用凸集分离定理可知存在 $\lambda\in Y^{**}\setminus\{0_{Y^{**}}\}$ 使得

$$\langle\lambda,x_0\rangle>\langle\lambda,a\rangle,\forall a\in(E_1+E_2)^+。\tag{8}$$

在(8)式中令 $a=0$ 可得

$$\langle\lambda,x_0\rangle>0。\tag{9}$$

易知 $\langle\lambda,a\rangle\leqslant 0,\forall a\in(E_1+E_2)^+$。若不然,则存在 $\hat{a}\in(E_1+E_2)^+$ 使得 $\langle\lambda,\hat{a}\rangle>0$。由(8)式及 $(E_1+E_2)^+$ 是锥导致矛盾。因此 $\langle-\lambda,a\rangle\geqslant 0$,即

$$-\lambda\in(E_1+E_2)^{++}。\tag{10}$$

此外,显然 $(E_1\cup E_2)^+\subset E_1^+\cap E_2^+$。故由 $x_0\in(E_1\cup E_2)^+$ 可知 $x_0\in E_1^+\cap E_2^+$。因此 $x_0\in(\mathrm{cone}\ (\mathrm{conv}\ E_1))^+\cap(\mathrm{cone}\ (\mathrm{conv}\ E_2))^+$。

再由引理1可得

$$x_0\in(\mathrm{cone}\ (\mathrm{conv}\ E_1)+\mathrm{cone}\ (\mathrm{conv}\ E_2))^+。\tag{11}$$

结合对偶锥的性质 $(\mathrm{cone}\ (\mathrm{conv}\ E_1)+\mathrm{cone}\ (\mathrm{conv}\ E_2))^+\subset(E_1+E_2)^+$。故

$$(E_1+E_2)^{++}\subset(\mathrm{cone}\ (\mathrm{conv}\ E_1)+\mathrm{cone}\ (\mathrm{conv}\ E_2))^{++}。$$

由(10)式可得 $-\lambda\in(\mathrm{cone}\ (\mathrm{conv}\ E_1)+\mathrm{cone}\ (\mathrm{conv}\ E_2))^{++}$。再由(11)式有 $\langle\lambda,x_0\rangle\leqslant 0$,这与(9)式矛盾。

下面证明右边包含于左边。若结论不成立,则存在 $x_0\in(E_1+E_2)^+$,$x_0\notin(E_1\cup E_2)^+$。相似于前面的证明,存在 $\lambda\in Y^{**}\setminus\{0_{Y^{**}}\}$ 使得

$$\langle\lambda,x_0\rangle>0, \tag{12}$$

且

$$-\lambda\in(E_1\cup E_2)^{++}。 \tag{13}$$

由 E_2 是关于 K 的改进集且 $E_2\subset K$ 可得

$$\mathrm{cl}\ (\mathrm{cone}\ (\mathrm{conv}\ E_2))=K。 \tag{14}$$

再由 E_1 是关于 K 的改进集,可以证明

$$\mathrm{cl}\ (\mathrm{cone}\ (\mathrm{conv}\ E_1))+K=\mathrm{cl}\ (\mathrm{cone}\ (\mathrm{conv}\ E_1))。 \tag{15}$$

事实上,只需要证明 $\mathrm{conv}\ E_1+K=\mathrm{conv}\ E_1$。显然 $\mathrm{conv}\ E_1\subset\mathrm{conv}\ E_1+K$。任取 $x_0\in\mathrm{conv}\ E_1+K$,则存在有限个不为零的 $\lambda_y\in[0,1]$且 $\sum_{y\in E_1}\lambda_y=1$,$k\in K$ 使得 $x=\sum_{y\in E_1}\lambda_y y+k$。那么 $x=\sum_{y\in E_1}\lambda_y y+\sum_{y\in E_1}\lambda_y k_y=\sum_{y\in E_1}\lambda_y(y+k_y)$,其中 $k_y\in K$。由 E_1 是改进集可得 $y+k_y\in E_1$,故 $\sum_{y\in E_1}\lambda_y(y+k_y)\in\mathrm{conv}\ E_1$,即 $\mathrm{conv}\ E_1+K\subset\mathrm{conv}\ E_1$。

进一步,由(13)~(15)式及引理 4 可得

$$\begin{gathered}-\lambda\in(E_1\cup E_2)^{++}=\mathrm{cl}\ (\mathrm{cone}\ (\mathrm{conv}\ (E_1\cup E_2)))\subset\mathrm{cl}\ (\mathrm{cone}\ (\mathrm{conv}\ (\mathrm{cl}\ (\mathrm{cone}\ (\mathrm{conv}\ E_1))\cup\mathrm{cl}\ (\mathrm{cone}\ (\mathrm{conv}\ E_2)))))=\\ \mathrm{cl}\ (\mathrm{cone}\ (\mathrm{cl}\ (\mathrm{cone}\ (\mathrm{conv}\ E_1))+\mathrm{cl}\ (\mathrm{cone}\ (\mathrm{conv}\ E_2))))=\mathrm{cl}\ (\mathrm{cl}\ (\mathrm{cone}\ (\mathrm{conv}\ E_1))+\mathrm{cl}\ (\mathrm{cone}\ (\mathrm{conv}\ E_2)))=\\ \mathrm{cl}\ (\mathrm{cl}\ (\mathrm{cone}\ (\mathrm{conv}\ E_1))+K)=\mathrm{cl}\ (\mathrm{cone}\ (\mathrm{conv}\ E_1))。\end{gathered}$$

故由条件可知

$$-\lambda\in\mathrm{cl}\ (\mathrm{cone}\ (\mathrm{conv}\ E_1))\in\mathrm{cl}\ (\mathrm{cone}\ (\mathrm{conv}\ (E_1+E_2)))。 \tag{16}$$

最后由 $x_0\in(E_1+E_2)^+=(\mathrm{cl}\ (\mathrm{cone}\ (\mathrm{conv}\ (E_1+E_2))))^+$ 以及(16)式可得 $\langle\lambda,x_0\rangle\leqslant0$,这与(12)式矛盾。　证毕

注 4　若 E_1,E_2 是凸锥,则由引理 4 得 $E_1+E_2=\mathrm{conv}\ (E_1\cup E_2)$,故 $(E_1+E_2)^+=(\mathrm{conv}\ (E_1\cup E_2))^+=(E_1\cup E_2)^+$。

然而,由定理 6 的证明可以看到:"$\subset$"关系实际上无需 E_1,E_2 的锥性或凸性假设条件。

注 5　若去掉定理 6 中的条件 $E_1\subset\mathrm{cl}\ (\mathrm{cone}\ (\mathrm{conv}\ (E_1+E_2)))$,则定理 6 的结论可能不成立。

例 5　令 $E_1=\{(x_1,x_2)\mid x_1\geqslant-1,x_2\geqslant1\}$,$E_2=\{(x_1,x_2)\mid x_2+x_1\geqslant1,x_1\geqslant0,x_2\geqslant0\}$,$K=\{(x_1,x_2)\mid x_1\geqslant0,x_2\geqslant0\}$。则 $\mathrm{cl}\ (\mathrm{cone}\ (\mathrm{conv}\ (E_1+E_2)))=\{(x_1,x_2)\mid x_2+2x_1\geqslant0,x_2\geqslant0\}$。显然,$E_1\not\subset\mathrm{cl}\ (\mathrm{cone}\ (\mathrm{conv}\ (E_1+E_2)))$。此外,$(E_1\cup E_2)^+=\{(x_1,x_2)\mid x_2-x_1\geqslant0,x_1\geqslant0,x_2\geqslant0\}$,$(E_1+E_2)^+=\{(x_1,x_2)\mid 2x_2-x_1\geqslant0,x_1\geqslant0,x_2\geqslant0\}$。因此 $(E_1+E_2)^+\neq(E_1\cup E_2)^+$。

定理 7　设 $K\subset Y$ 是非空闭凸锥。若 $E_1\subset K$ 和 $E_2\subset K$ 是关于 K 的改进集,则 $(E_1\cup E_2)^+=(E_1+E_2)^+$。

证明　由定理 6 及注 4,只需证明 $(E_1+E_2)^+\subset(E_1\cup E_2)^+$。由 E_1,E_2 是关于 K 的改进集得

$$E_1+E_2=(E_1+K)+(E_2+K)=E_1+E_2+K$$

由文献[6]中命题 2.6(a)可得 $(E_1+E_2)^+=(\mathrm{cone}\ (\mathrm{conv}\ (E_1+E_2)))^+\subset K^+$。由 $E_1\subset K$,$E_2\subset K$ 得 $E_1\cup E_2\subset K$,故 $K^+\subset(E_1\cup E_2)^+$。故 $(E_1+E_2)^+\subset(E_1\cup E_2)^+$。　证毕

注 6　若去掉定理 7 中的条件 $E_1\subset K$,则定理 7 的结论不一定成立。

例 6　若 E_1,E_2,K 取为例 5 中的集合,显然,$E_1\not\subset K$。由例 5 可知,定理 7 的结论不成立。

例 7　令

$$E_1=\{(x_1,x_2)\mid x_2+x_1\geqslant0,x_2\geqslant0\}\setminus\{(0,0)\},$$
$$E_2=\{(x_1,x_2)\mid x_1\geqslant0,x_2\geqslant0\}\setminus\{(0,0)\},$$
$$K=\{(x_1,x_2)\mid x_1\geqslant0,x_2\geqslant0\}。$$

显然,$E_1\not\subset K$,$E_2\subset K$ 是关于 K 的改进集。此外

$(E_1\cup E_2)^+=\{(x_1,x_2)\mid x_2-x_1\geqslant0,x_1\geqslant0,x_2\geqslant0\}$,$(E_1+E_2)^+=\{(x_1,x_2)\mid x_2-x_1\geqslant0,x_1\geqslant0,x_2\geqslant0\}$,故 $(E_1\cup E_2)^+=(E_1+E_2)^+$,即定理 7 的结论成立。

参考文献:

[1] Jahn J. Vector optimization: theory, applications and extensions[M]. Berlin: Springer, 2004.

[2] Qiu J H. Dual characterization and scalarization for Benson proper efficiency[J]. SIAM Journal on Optimization, 2008, 19(1): 144-162.

[3] Chiang Y. Characterizations for solidness of dual cones with applications[J]. Journal of Global Optimization, 2012, 52(1): 79-94.

[4] 秦晨. 向量优化有效点集非空的一个充分必要条件[J]. 重庆理工大学学报:自然科学版, 2013, 27(11): 117-119.
Qin C. A sufficient and necessary condition of nonemptiness of the efficient point set in vector optimization[J]. Journal of Chongqing University of Technology: Natural Science, 2013, 27(11): 117-119.

[5] Chicoo M, Mignanego F, Pusillo L, et al. Vector optimization problem via improvement sets[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2011, 150(3): 516-529.

[6] Gutiérrez C, Jiménez B, Novo V. Improvement sets and vector optimization[J]. European Journal of Operational Research, 2012, 223(2): 304-311.

[7] Zhao K Q, Yang X M. A unified stability result with perturbations in vector optimization[J]. Optimization Letters, 2013, 7(8): 1913-1919.

[8] Zhao K Q, Yang X M. *E*-Benson proper efficiency in vector optimization[J]. Optimization, doi: 10. 1080/023 31934. 2013. 798321, 2013.

[9] Rockafellar R T. Convex analysis[M]. New Jersey: Princeton University Press, 1972.

Operations Research and Cybernetics

Dual Characterizations of Improvement Set in Vector Optimization

XIA Yuanmei, ZHANG Wanli, ZHAO Kequan

(Department of Mathematics, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: In this paper, based on the classic dual characterizations of convex cone, some dual characterizations of improvement set are studied by means of some tools including as separation theorem for convex sets and recession cone and so on. The dual cone of the sum for improvement set and convex cone is equal to the intersection of the dual cone for improvemet set and convex cone, the dual cone of the recession cone for improvement set is equal to the dual cone of convex cone and improvement set, the dual cone of the sum for two improvement sets is equal to the intersection of the dual cone for these imprevement sets, the dual cone of the intersection of improvement set and convex cone is equal to the closure of the sum for the dual cone of improvement set and convex cone, the dual cone of the intersection of two improvement sets is equal to the closure of the sum for the dual cone of these improvement sets, and the dual cone of the union of two improvement sets is equal to the dual cone of the sum for these improvement sets are obtained. Moreover, some examples are given to illustrate the main results.

Key words: vector optimization; improvement set; dual characterization; separation theorem for convex sets

(责任编辑 黄 颖)