2014 年 9 月 重庆师范大学学报(自然科学版) Sep. 2014
第 31 卷 第 5 期 Journal of Chongqing Normal University (Natural Science) Vol. 31 No. 5

运筹学与控制论 DOI:10.11721/cqnuj20140506

E-广义单调性及其在广义变分不等式中的应用*

陈 乔[1],罗 杰[2]
(1.重庆师范大学 生命科学学院,重庆 401331;2.四川大竹中学,四川 大竹 635100)

摘要:引入了一类新的广义单调性即 E-伪单调性和 E-拟单调性。通过举例说明了 E-伪单调性和 E-拟单调性的存在性且区别于伪单调性、拟单调性、E-单调性等其他广义单调性。然后主要研究了 E-伪单调映射、E-拟单调映射分别与 E-伪凸函数、E-拟凸函数间的等价关系。在此基础上提出了 E-变分不等式问题,并讨论了 E-伪单调性在其中的重要应用。

关键词:E-凸函数;E-伪单调映射;E-拟单调映射;E-变分不等式
中图分类号:O221.1 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-6693(2014)05-0031-04

凸性及广义凸性在经济、工程等领域中具有十分重要的作用,而与凸性紧密相关的是单调性。随着进一步的研究,人们发现单调性在数学规划、优化理论及变分不等式中都有十分重要的应用。杨新民等在文献[1]中将7种单调性推广到7种不变单调性。Jabarootian 和 Zafarani 在文献[2]中利用克拉克广义导数讨论了几种不变单调和相应的广义凸性。人们一直不断尝试弱化单调性条件并且取得一系列成绩[3-12]。

在文献[1,3,8]的基础上,本文引入了一类新的广义单调性——E-伪单调和 E-拟单调,并讨论了它们分别与 E-伪凸函数、E-拟凸函数间的等价关系。最后文章研究了 E-伪单调映射在变分不等式问题中的应用。

1 预备知识

本文均假定 M 为 $\mathbf{R}^n$ 上的非空子集,映射 $f:M\to\mathbf{R}$,$E:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$,下面给出本文所需要的一些基本概念及相关性质。

定义 1[3] 称 $M\subseteq\mathbf{R}^n$ 是 E-凸集。若 $\exists E:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$,对 $\forall x,y\in M$,$\forall\lambda\in[0,1]$,$\lambda E(x)+(1-\lambda)E(y)\in M$。

定义 2[3] M 关于 E 为 E-凸集,称 $f:M\to\mathbf{R}$ 是 E-凸函数。若对 $\forall x,y\in M$,$\forall\lambda\in[0,1]$,有

$$f(\lambda E(x)+(1-\lambda)E(y))\leqslant\lambda f(E(x))+(1-\lambda)f(E(y))。$$

定义 3[5] M 关于 E 为 E-凸集,称 $f:M\to\mathbf{R}$ 是 E-拟凸函数。若对 $\forall x,y\in M$,$\forall\lambda\in[0,1]$,有

$$f(\lambda E(x)+(1-\lambda)E(y))\leqslant\max(f(E(x)),f(E(y)))。$$

定义 4[6] M 关于 E 为 E-凸集,称 $f:M\to\mathbf{R}$ 是 E-伪凸函数。若对 $\forall x,y\in M$,有

$$\nabla f(E(x))^{\mathrm{T}}(E(y)-E(x))\geqslant 0\Rightarrow f(E(y))\geqslant f(E(x))。$$

引理 1[6] M 关于 E 为 E-凸集,若 f 为 M 上的 E-伪凸函数,则 f 为 M 上的 E-拟凸函数。

2 E-广义单调映射

定义 5 映射 $T:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 称为 E-伪单调的,若存在 $E:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$,使得

$$\langle T(E(x)),E(y)-E(x)\rangle\geqslant 0\Rightarrow\langle T(E(y)),E(y)-E(x)\rangle\geqslant 0,\ \forall x,y\in M。$$

注 1 当 E 是单位映射时,E-伪单调映射退化为伪单调映射,伪单调映射一定是 E-伪单调映射,反之不成立。

例 1 设 $M=(-\infty,+\infty)$,$T(x)=x^2$,$E(x)=c$(c 是常数),显然 T 是 E-伪单调映射,但 T 不是伪单调映射,因为 $x=0$,$y=-4$,$\langle T(x),y-x\rangle\geqslant 0$,有 $\langle T(y),y-x\rangle<0$。

* **收稿日期**:2013-10-28 **修回日期**:2014-01-10 **网络出版时间**:2014-9-17 22:37
资助项目:国家自然科学基金项目(No. 11201240)
作者简介:陈乔,女,实习研究员,研究方向为最优化理论与算法,E-mail:lazi1981@sina.com
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20140917.2237.006.html

定义6 映射 $T:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 称为 E-拟单调的,若存在 $E:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$,使得

$$\langle T(E(x)),E(y)-E(x)\rangle>0\Rightarrow\langle T(E(y)),E(y)-E(x)\rangle\geqslant 0,\ \forall x,y\in M。$$

注2 当 E 是单位映射时,E-拟单调映射退化为拟单调映射,拟单调映射一定是 E-拟单调映射,反之不成立。

例2 设 $M=(0,2\pi)$,$T(x)=\sin x$,$E(x)=\begin{cases}x,0<x<\pi\\ x-\pi,\pi\leqslant x\leqslant 2\pi\end{cases}$。显然,$T$ 是 E-拟单调映射,但不是拟单调映射,因为 $x=\frac{\pi}{2}$,$y=\frac{3\pi}{2}$,$\langle T(x),y-x\rangle>0$,有 $\langle T(y),y-x\rangle<0$。从以上定义可以看出,这些单调性的关系为:$E$-单调映射$\Rightarrow$ E-伪单调映射$\Rightarrow$ E-拟单调映射,反之不成立。

例3 设 $M=[0,+\infty)$,$T(x)=\frac{1}{x}$,$E(x)=x+1$,容易验证 T 是 E-伪单调映射,但不是 E-单调映射,因为对于任意不同的 $x,y\in M$,有 $\langle T(E(y))-T(E(x)),E(y)-E(x)\rangle=\left\langle\frac{1}{y-1}-\frac{1}{x+1},y-x\right\rangle<0$。

例4 设 $M=(-\infty,+\infty)$,$T(x)=x^2$,$E(x)=3x+1$。显然 T 是 E-拟单调映射,但不是 E-伪单调映射,令 $x=-\frac{1}{3}$,$y=-1$,有 $\langle T(E(x)),E(y)-E(x)\rangle\geqslant 0$,而 $\langle T(E(y)),E(y)-E(x)\rangle<0$。

引理2 设 M 为 E-凸集,$E(M)$ 为凸集,f 在 M 上可微,则 f 在 M 上是严格 E-凸函数当且仅当对任意不同的 $x,y\in M$,有 $f(E(y))>f(E(x))+\nabla f(E(x))^{\mathrm{T}}(E(y)-E(x))$。

证明 设 $\tilde{f}:E(x)\to\mathbf{R}$ 且 $\tilde{f}(\tilde{x})=f(\tilde{x})$,$\forall\tilde{x}\in E(M)$,由条件可知 $\tilde{f}:E(x)\to\mathbf{R}$ 是严格凸函数。则对任意不同的 $x,y\in M$,令 $\tilde{x}=E(x)$,$\tilde{y}=E(y)$,$\tilde{f}$ 是严格凸函数当且仅当 $\tilde{f}(\tilde{y})>\tilde{f}(\tilde{x})+\nabla\tilde{f}(\tilde{x})^{\mathrm{T}}(\tilde{y}-\tilde{x})$。故对任意不同的 $x,y\in M$,f 是严格 E-凸函数当且仅当 $f(E(y))>f(E(x))+\nabla f(E(x))^{\mathrm{T}}(E(y)-E(x))$。

引理3 设 M 为 E-凸集,$E(M)$ 为凸集,f 在 M 上可微,则 f 在 M 上是 E-拟凸函数当且仅当对任意的 x,$y\in M$,有 $f(E(y))\leqslant f(E(x))\Rightarrow\nabla f(E(x))^{\mathrm{T}}(E(y)-E(x))\leqslant 0$。

引理3的证明过程与参考文献[7]中定理3.1.1类似。

定理1 设 M 为 E-凸集,$E(M)$ 为凸集,f 在 M 上可微,则 f 在 M 上是 E-伪凸函数当且仅当 ∇f 在 M 上是 E-伪单调映射。

证明 必要性。f 在 M 上是 E-伪凸函数,则对任意不同的 $x,y\in M$,有

$$\nabla f(E(x))^{\mathrm{T}}(E(y)-E(x))\geqslant 0。\tag{1}$$

由(1)式和 f 的 E-伪凸性,可得

$$f(E(x))\leqslant f(E(y))。\tag{2}$$

根据引理1,引理3及(2)式可知 $\nabla f(E(y))^{\mathrm{T}}(E(y)-E(x))\geqslant 0$。

充分性。∇f 是在 M 上 E-伪单调映射,则对任意不同的 $x,y\in M$,有

$$\nabla f(E(x))^{\mathrm{T}}(E(y)-E(x))\geqslant 0。\tag{3}$$

只需证 $f(E(y))\geqslant f(E(x))$。假设 $f(E(y))<f(E(x))$,由中值定理可知,存在 $\lambda\in(0,1)$,使得

$$f(E(y))-f(E(x))=\nabla f(E(z))^{\mathrm{T}}(E(y)-E(x)),\tag{4}$$

其中

$$E(z)=\lambda E(x)+(1-\lambda)E(y)。\tag{5}$$

由(5)式得

$$E(z)-E(x)=(1-\lambda)(E(y)-E(x))。\tag{6}$$

将(6)式代入(3)、(4)式,可知与 ∇f 的 E-伪单调性矛盾,定理得证。 证毕

定理2 设 M 为 E-凸集,$E(M)$ 为凸集,f 在 M 上可微,则 f 在 M 上是 E-拟凸函数当且仅当 ∇f 在 M 上是 E-拟单调映射。

证明 必要性。f 在 M 上是 E-拟凸函数,对 $\forall x,y\in M$,有 $\nabla f(E(x))^{\mathrm{T}}(E(y)-E(x))>0$。由引理2的逆否命题,有 $f(E(y))>f(E(x))$,再由引理2,可得 $\nabla f(E(y))^{\mathrm{T}}(E(y)-E(x))\geqslant 0$,即是 ∇f 在 M 上为 E-拟单调映射。

充分性(反证法)。假设 f 不是 E-拟凸函数,则存在 $\lambda_0\in(0,1)$,$E(z)=\lambda_0E(x)+(1-\lambda_0)E(y)$,使得

$$f(E(z))>f(E(x))>f(E(y))。\tag{7}$$

由中值定理知，存在 $E(z_1)$，$E(z_2)$，使得

$$f(E(z))-f(E(y))=\nabla f(E(z_2))^{\mathrm{T}}(E(z)-E(y)),f(E(z))-f(E(x))=\nabla f(E(z_1))^{\mathrm{T}}(E(z)-E(x)),$$

其中 $E(z_1)=\lambda_1E(x)+(1-\lambda_1)E(y)$，$E(z_2)=\lambda_2E(x)+(1-\lambda_2)E(y)$，$0<\lambda_2<\lambda_0<\lambda_1<1$。

由(7)式知 $\nabla f(E(z_1))^{\mathrm{T}}(E(z)-E(x))>0$，$\nabla f(E(z_2))^{\mathrm{T}}(E(z)-E(y))>0$，即

$$\nabla f(E(z_1))^{\mathrm{T}}(E(z_2)-E(z_1))>0,\nabla f(E(z_2))^{\mathrm{T}}(E(z_1)-E(z_2))>0。$$

显然，上述不等式与 ∇f 的 E-拟单调性矛盾，定理得证。　证毕

3 E-变分不等式问题

本文提出一类新的变分不等式问题——E-变分不等式问题，下面讨论 E-伪单调性在变分不等式中的应用。

考虑 E-变分不等式：求解 $x\in M$，使得 $\langle F(E(x)),E(y)-E(x)\rangle\geqslant0$，$\forall y\in M$。

定义 7[8]　映射 $F:\mathbf{R}^n\to2^{\mathbf{R}^n}$ 称为 KKM 映射，若对于任意的有限集 $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}\subset\mathbf{R}^n$，有 $conv(\{x_1,x_2,\cdots,x_n\})\subset\bigcup\limits_{i=1}^{n}F(x_i)$。

引理 4[9]　$F:M\to2^{\mathbf{R}^n}$ 为一 KKM 映射，若对 $\forall x\in M$，$F(x)$ 是紧的，则 $\bigcap\limits_{x\in M}F(x)\neq\varnothing$。

引理 5　设 M 为非空 E-凸集，$E(M)$ 为凸集，如果 $F:M\to\mathbf{R}^n$ 在 M 上是半连续的 E-伪单调映射，则 $x\in M$ 满足

$$\langle F(E(x)),E(y)-E(x)\rangle\geqslant0,\forall y\in M,\tag{8}$$

当且仅当

$$\langle F(E(y)),E(y)-E(x)\rangle\geqslant0,\forall y\in M。\tag{9}$$

证明　必要性。设 $x\in M$ 是(8)式的一个解，由 F 的 E-伪单调性有

$$\langle F(E(x)),E(y)-E(x)\rangle\geqslant0\Rightarrow\langle F(E(y)),E(y)-E(x)\rangle\geqslant0,\forall y\in M。$$

充分性。对 $x,y\in M$，令 $E(z)=\lambda E(y)+(1-\lambda)E(x)\in M$，$0<\lambda<1$，由(9)式知

$$\langle F(E(x)+\lambda(E(y)-E(x))),\lambda(E(y)-E(x))\rangle\geqslant0。$$

由 F 的半连续性，令 $\lambda\to0$，可得 $\langle F(E(x)),E(y)-E(x)\rangle\geqslant0$，$\forall y\in M$，定理得证。　证毕

定理 3　设 M 为非空有界 E-凸集，$E(M)$ 为凸集，E 为 M 上的线性函数，$F:M\to\mathbf{R}^n$ 在 M 上是半连续的 E-伪单调映射，则存在 $x_0\in M$ 满足 $\langle F(E(x_0)),E(y)-E(x_0)\rangle\geqslant0$，$\forall y\in M$。

证明　令集值映射 $V_1:M\to2^M$，使得 $V_1(y)=\{x\in M:\langle F(E(x)),E(y)-E(x)\rangle\geqslant0\}$，$\forall y\in M$。下面证明 V_1 是 KKM 映射。若不然，假设 $\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}\subset M$，$\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i=1$，$\lambda_i\geqslant0$，$i=1,\cdots,n$，及 $y=\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_iy_i\notin\bigcup\limits_{i=1}^{n}F(y_i)$，于是有 $\langle F(E(y)),E(y_i)-E(y)\rangle<0$。

因 E 为 M 上的线性函数，故有 $0=\langle F(E(y)),E(y)-E(y)\rangle=\sum\limits_{i=1}^{n}\langle F(E(y)),E(y_i)-E(y)\rangle<0$ 矛盾。故 V_1 是 KKM 映射。

令集值映射 $V_2:M\to2^M$，使得 $V_2(y)=\{x\in M:\langle F(E(y)),E(y)-E(x)\rangle\geqslant0\}$，$\forall y\in M$。令 $x\in V_1(y)$，有 $\langle F(E(x)),E(y)-E(x)\rangle\geqslant0$，由 F 的 E-伪单调性，可得 $\langle F(E(y)),E(y)-E(x)\rangle\geqslant0$。即 $x\in V_2(y)$，从而 $V_1(y)\subset V_2(y)$，故 V_2 是一 KKM 映射。由引理 5 知 $\bigcap\limits_{y\in M}V_1(y)=\bigcap\limits_{y\in M}V_2(y)$。则根据已知条件，$V_2(y)$ 对 $\forall y\in M$ 是闭的，又因 M 有界，故 V_2 是紧的。由引理 4 可得 $\bigcap\limits_{y\in M}V_1(y)=\bigcap\limits_{y\in M}V_2(y)\neq\varnothing$，故存在 $x_0\in M$ 满足 $\langle F(E(x_0)),E(y)-E(x_0)\rangle\geqslant0$，$\forall y\in M$，定理得证。　证毕

下面的例 5 解释了定理 3。

例 5　设 $M=[0,+\infty)$，$E(x)=2x$，$F(x)=x^2$。下面验证定理 3 的条件成立：1）对任意 $x,y\in M$，任意 $\lambda\in[0,1]$，$\lambda E(x)+(1-\lambda)E(y)=2\lambda x+2(1-\lambda)y\in[0,+\infty)$，故 M 为非空有界 E-凸集；2）显然 $E(M)=[0,+\infty)$ 为凸集，E 为 M 上的线性函数；3）显然 F 为半连续的；4）对任意 $x,y\in M$ 使得 $\langle F(E(x)),E(y)-E(x)\rangle=(2x)^2(2y-2x)\geqslant0$，即 $y\geqslant x$，则 $\langle F(E(y)),E(y)-E(x)\rangle=(2y)^2(2y-2x)\geqslant0$，故 F 为 E-伪单调映射。

因此定理 3 的条件满足，取 $x_0=0$，则对任意 $y\in M$，有

$$\langle F(E(x_0)),E(y)-E(x_0)\rangle=\langle F(2x_0),2y-2x_0\rangle=\langle 4x_0^2,2y-2x_0\rangle=\langle 4x_0^2,2y-2x_0\rangle=\langle 0,2y-0\rangle=0\geqslant 0。$$

参考文献:

[1] Yang X M, Yang X Q, Teo K L. Generalized invexity and generalized invariant monotonicity[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2003, 117(3): 607-625.

[2] Jabarootian T, Zafarani J. Generalized invariant monotonicity and invexity of nondifferentiable functions[J]. Journal of Global Optimization, 2006, 36(4): 537-564.

[3] Youness E A. E-convex sets, E-convex functions, and E-convex programming[J]. Journal of Optimization Theory and Application, 1999, 102(2): 439-450.

[4] Yang X M. E-convex set, E-convex function, and E-convex programming[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2001, 109(3): 699-704.

[5] Syaua Y R. Some properties of E-convex functions[J]. Applied Mathematics Letters, 2005, 18(9): 1074-1080.

[6] Luo J. Some properties of E-Pseudo-convex functions and the applications in mathematical programming[J]. Journal of Chongqing Technology and Business University, 2008, 25(5): 449-453.

[7] Avriel M, Diewert W. Generalized goncavity[M]. New York: Plenum Publishing Corporation, 1988.

[8] Ruiz-Garzon G, Osuna-Gomez R, Ruflan-Lizana A. Generalized invex monotonicity[J]. European Journal of Operational Research, 2003, 144(3): 501-512.

[9] Fan K. A generalization of Tychono's fixed point theorem [J]. Mathematical Annalen, 1961(142): 391-402.

[10] Chen Q. Relaxed η-α quasimonotone and application to the generalized variational-like inequality problem[EB/OL]. (2013-11-07)[2013-10-28]. http://www.journalofinequalitiesandapplications.com/content/pdf/1029-242X-2013-488.pdf.

[11] 焦合华. 关于不动点变分不等式与最优化的一个定理[J]. 重庆工学院学报:自然科学版, 2006, 20(5): 133-135.
Jiao H H. On a theorem of the variational inequality and optimization of fixed point[J]. Journal of Chongqing Institute of Technology: Natural Science Edition, 2006, 20(5): 133-135.

[12] 万波. 一般混合变分不等式的改进隐式迭代算法[J]. 重庆工学院学报:自然科学版, 2007, 21(2): 42-44.
Wan B. Modified implicit iterative methods for general mixed variational inequalities[J]. Journal of Chongqing Institute of Technology: Natural Science Edition, 2007, 21(2): 42-44.

Operations Research and Cybernetics

Generalized *E*-monotonicity and Application to the Generalized Variational Inequality

CHEN Qiao[1], LUO Jie[2]

(1. College of Life Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing 401331;
2. Sichuan Dazhu Middle School, Dazhu Sichuan 635100, China)

Abstract: A new kind of generalized monotone mappings called E-pseudomonotone and an E-quasimonotone operator are first introduced. In this paper, examples are given to show that the existence of E-pseudomonotone and an E-quasimonotone operator, and the difference with pseudomonotone operator, quasimonotone operator, E-monotone operator. The relationships between E-pseudomonotone mapping and E-pseudoconvexity are presented, and the relationships between E-quasimonotone mapping and E-quasiconvexity are discussed. After this, we give the E-variational inequality problem and study the application of E-pseudoconvexity to it.

Key words: E-convex function; E-pseudomonotone; E-quasimonotone; E-variational inequality

(责任编辑 黄 颖)