运筹学与控制论

DOI:10.11721/cqnuj20140601

# $h$-$F$ 凸函数的一类 Hadamard 不等式*

王国栋
(重庆水利电力职业技术学院 基础教学部,重庆 永川 402160)

**摘要:**本文给出了一类新的广义凸函数—$h$-$F$ 凸函数,它推广了几类已知的广义凸函数,如 $s$ 凸函数、$h$ 凸函数、不变凸函数和凸函数。本文通过探讨 $h$-$F$ 凸函数的性质并加以利用,在 $h$-$F$ 凸函数满足条件 $P_1$、$P_2$ 和勒贝格可积的条件下,建立了 $h$-$F$ 凸函数的 Hadamard 不等式和一些等式和不等式性质,它们都是几类已知的广义凸函数的 Hadamard 不等式的推广。

**关键词:**$h$-$F$ 凸函数;勒贝格可积; Hadamard 不等式
**中图分类号:**O221.2　　**文献标志码:**A　　**文章编号:**1672-6693(2014)06-0001-04

## 1 预备知识

**定义 1**[1] 设 $K,J\in\mathbf{R}^n$,$[0,1]\in J$,$h:J\to[0,+\infty)$且 $h$ 不恒为 0,称 $f:K\to[0,+\infty)$是 $h$-凸函数,如果 $\forall x,y\in K,\lambda\in[0,1]$,则有 $f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant h(\lambda)f(x)+h(1-\lambda)f(y)$。

**定义 2**[2] 称集合 $K\in\mathbf{R}^n$ 是关于 $F$ 的广义凸集,如果存在向量值映射 $F:K\times K\times[0,1]\to\mathbf{R}^n$,$\forall x,y\in I,\lambda\in[0,1]$,则有 $F(x,y,\lambda)\in K$。

**定义 3**[3] 集合 $K\in\mathbf{R}^n$ 是关于 $F$ 的广义凸集,称 $f:K\to\mathbf{R}$ 在 $K$ 上是 $F$-广义凸函数,如果 $\forall x,y\in K,\lambda\in[0,1]$,$f(F(x,y,\lambda))\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$。

在上述定义基础之上[1-10],本文定义了一种新的广义凸函数—$h$-$F$ 凸函数。

**定义 4** 设 $K,J\in\mathbf{R}^n$,$[0,1]\in J$,$h:J\to[0,+\infty)$且 $h$ 不恒为 0,集合 $K\in\mathbf{R}^n$ 是关于 $F$ 的广义凸集,称 $f:K\to[0,+\infty)$在 $K$ 上是 $h$-$F$ 凸函数,若 $\forall x,y\in K,\lambda\in[0,1]$,$f(F(x,y,\lambda))\leqslant h(\lambda)f(x)+h(1-\lambda)f(y)$。

**注 1** 容易知道 $h$-$F$ 凸函数是所有非负凸函数、非负不变凸函数、非负 $s$ 凸函数、$h$ 凸函数的真推广。

**定义 5**[4] 集合 $K\in\mathbf{R}^n$ 是关于 $F$ 的广义凸集,称 $F$ 在 $K$ 上满足条件 $P_1$、$P_2$,如果 $\forall\alpha,\beta\in[0,1]$且 $\alpha<\beta$,$\forall x,y\in K$,$(P_1)F\left[y,F(x,y,\beta),1-\frac{\alpha}{\beta}\right]=F(x,y,\alpha)$;$(P_2)F\left[x,F(x,y,\alpha),\frac{\beta-\alpha}{1-\alpha}\right]=F(x,y,\beta)$。

**引理 1**[5] 若 $F$ 在 $K$ 上满足条件 $P_1$、$P_2$,则 $\forall\lambda\in[0,1]$,$\forall u_1,u_2\in[0,1]$,$u_1\neq u_2$,$\forall x,y\in K$,$F(x,y,\lambda u_1+(1-\lambda)u_2)=F[F(x,y,u_1),F(x,y,u_2),\lambda]$。

## 2 主要结果

**定理 1** $f:K\to[0,+\infty)$在 $K$ 上是 $h$-$F$ 凸函数,$h\in L[0,1]$,$F$ 在 $K$ 上满足条件 $P_1$、$P_2$,$\forall x,y\in K,x\neq y,t\in[0,1]$,$T:t\to f(F(x,y,t))$在$[0,1]$上勒贝格可积,那么当 $t\neq\frac{1}{2}$时,有

$$\frac{1}{2h\left(\frac{1}{2}\right)}f\left(F\left(x,y,\frac{1}{2}\right)\right)\leqslant\int_0^1 f(F(x,y,t))\mathrm{d}t\leqslant(f(x)+f(y))\int_0^1 h(t)\mathrm{d}t。\tag{1}$$

**证明** $f$ 在 $K$ 上是 $h$-$F$ 凸函数,则

* **收稿日期:**2013-12-24　**修回日期:**2014-03-15　**网络出版时间:**2014-11-19 21:49
**资助项目:**重庆市自然科学基金项目(No. CSTC2010BB2090)
**作者简介:**王国栋,男,讲师,研究方向为优化理论及应用,E-mail:wangguodong_love@163.com
**网络出版地址:**http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20141119.2149.001.html

$$\forall x,y\in K,\lambda\in[0,1],f(F(x,y,\lambda))\leqslant h(\lambda)f(x)+h(1-\lambda)f(y)。$$

上式对$\lambda$积分,可得

$$\int_0^1 f(F(x,y,t))\mathrm{d}t\leqslant f(x)\int_0^1 h(t)\mathrm{d}t+f(y)\int_0^1 h(1-t)\mathrm{d}t。$$

因为$\int_0^1 h(t)\mathrm{d}t=\int_0^1 h(1-t)\mathrm{d}t$,故(1)式中第二个不等式成立。又由$f$在$K$上是$h$-$F$凸函数,有

$$f\left(F\left(z,w,\frac{1}{2}\right)\right)\leqslant h\left(\frac{1}{2}\right)(f(z)+f(w)),\forall z,w\in K。$$

在上式中取$z=F(x,y,t)$,$w=F(x,y,1-t)$,得到

$$f\left[F\left(F(x,y,t),F(x,y,1-t),\frac{1}{2}\right)\right]\leqslant h\left(\frac{1}{2}\right)[f(F(x,y,t)+f(F(x,y,1-t))]。$$

由引理1可知,当$t\neq\frac{1}{2}$时,有$f\left(F\left(x,y,\frac{1}{2}\right)\right)\leqslant h\left(\frac{1}{2}\right)[f(F(x,y,t)+f(F(x,y,1-t))]$。

上式对$t$积分,得到

$$\int_0^1 f\left(F\left(x,y,\frac{1}{2}\right)\right)\mathrm{d}t\leqslant h\left(\frac{1}{2}\right)\int_0^1[f(F(x,y,t)+f(F(x,y,1-t))]\mathrm{d}t,$$

注意到$\int_0^1 f(F(x,y,t))\mathrm{d}t=\int_0^1 f(F(x,y,1-t))\mathrm{d}t$,于是

$$\frac{1}{2h\left(\frac{1}{2}\right)}\int_0^1 f\left(F\left(x,y,\frac{1}{2}\right)\right)\mathrm{d}t\leqslant\int_0^1 f(F(x,y,t))\mathrm{d}t。$$

综上,有$\frac{1}{2h\left(\frac{1}{2}\right)}\int_0^1 f\left(F\left(x,y,\frac{1}{2}\right)\right)\mathrm{d}t\leqslant\int_0^1 f(F(x,y,t))\mathrm{d}t\leqslant(f(x)+f(y))\int_0^1 h(t)\mathrm{d}t$。　证毕

**注2**　1)当$f$是$h$凸函数时,定理1可退化为文献[6]中的Hermite-Hadamard不等式

$$\frac{1}{2h\left(\frac{1}{2}\right)}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leqslant\int_0^1 f(u)\mathrm{d}u\leqslant(f(a)+f(b))\int_0^1 h(t)\mathrm{d}t。$$

2)当$f$是凸函数时,定理1可退化为经典的凸函数的Hermite-Hadamard不等式

$$\frac{1}{2}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leqslant\int_0^1 f((1-t)a+tb)\mathrm{d}t\leqslant\frac{f(a)+f(b)}{2}。$$

3)当$f$是$s$凸函数时,定理1可退化为文献[7]中的结果

$$2^{s-1}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leqslant\int_0^1 f((1-t)a+tb)\mathrm{d}t\leqslant\frac{f(a)+f(b)}{s-1}。$$

4)当$f$是不变凸函数时,定理1可退化为文献[8]中的结果

$$f\left(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\right)\leqslant\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)}f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{f(a)+f(b)}{2}。$$

**推论1**[2]　若$F$在$K$上满足$\forall x,y\in K,\lambda\in[0,1],u_1,u_2\in[0,1],F(x,y,u)=F[F(x,y,u),F(x,y,u),\lambda]$,则定理1中$t\neq\frac{1}{2}$的限制可以去掉。

**引理2**　$f:K\to[0,+\infty)$在$K$上是$h$-$F$凸函数,$F$在$K$上满足条件$\mathrm{P}_1$、$\mathrm{P}_2$,$\forall x,y\in K,x\neq y,t\in[0,1]$,$T:t\to f(F(x,y,t))$在$[0,1]$上勒贝格可积,则$\forall\lambda\in[0,1]$,有

$$\int_0^1 f(F(x,y,1-t))\mathrm{d}t=(1-\lambda)\int_0^1 f[F(y,F(x,y,1-\lambda),t)]\mathrm{d}t+\lambda\int_0^1 f[F(x,F(x,y,1-\lambda),1-t)]\mathrm{d}t。$$

**证明**　当$\lambda=0$或者$\lambda=1$时,引理显然成立。下设$\lambda\in(0,1)$,注意到

$$F(y,F(x,y,1-\lambda),t)=F(x,y,(1-t)(1-\lambda));F(x,F(x,y,1-\lambda),1-t)=F(x,y,1-t\lambda)。$$

于是

$$\int_0^1 f(F(y,F(x,y,1-\lambda),t))\mathrm{d}t=\int_0^1 f(F(x,y,(1-t)(1-\lambda))\mathrm{d}t,\tag{2}$$

$$\int_0^1 f(F(x,F(x,y,1-\lambda),1-t))\mathrm{d}t=\int_0^1 f(F(x,y,1-t\lambda))\mathrm{d}t。\tag{3}$$

令 $u=(1-t)\lambda+t$,则 $1-u=(1-t)(1-\lambda)$,$\mathrm{d}u=(1-\lambda)\mathrm{d}t$,(2)式右边可写为

$$\int_0^1 f(F(x,y,(1-t)(1-\lambda))\mathrm{d}t=\frac{1}{1-\lambda}\int_\lambda^1 f(F(x,y,1-u))\mathrm{d}u。$$

令 $v=\lambda t$,则 $1-v=1-\lambda t$,$\mathrm{d}v=\lambda\mathrm{d}t$,(3)式右边可写为

$$\int_0^1 f(F(x,y,1-t\lambda))\mathrm{d}t=\frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda f(F(x,y,1-v))\mathrm{d}v。$$

上两式相加即得

$$(1-\lambda)\int_0^1 f(F(y,F(x,y,1-\lambda),t))\mathrm{d}t+\lambda\int_0^1 f(F(x,F(x,y,1-\lambda),1-t))\mathrm{d}t=$$

$$\int_\lambda^1 f(F(x,y,1-u))\mathrm{d}u+\int_0^\lambda f(F(x,y,1-v))\mathrm{d}v=\int_0^1 f(F(x,y,1-s))\mathrm{d}s。$$

证毕

**定理 2**　$f:K\to[0,+\infty)$在 $K$ 上是 $h$-$F$ 凸函数,$F$ 在 $K$ 上满足条件 $\mathrm{P}_1$、$\mathrm{P}_2$,$\forall x,y\in K,x\neq y,t\in[0,1]$,$T:t\to f(F(x,y,t))$在$[0,1]$上勒贝格可积,则$\forall\lambda\in[0,1]$,有

$$\frac{1}{2h\left(\frac{1}{2}\right)}\left\{(1-\lambda)f\left[F\left(y,F(x,y,1-\lambda),\frac{1}{2}\right)\right]+\lambda f\left[F\left(x,F(x,y,1-\lambda),\frac{1}{2}\right)\right]\right\}\leqslant\int_0^1 f(F(x,y,1-t))\mathrm{d}t\leqslant$$

$$[f(F(x,y,1-\lambda))+(1-\lambda)f(y)+\lambda f(x)]\int_0^1 h(t)\mathrm{d}t\leqslant[(h(1-\lambda)+\lambda)f(x)+(h(\lambda)+(1-\lambda))f(y)]\int_0^1 h(t)\mathrm{d}t。$$

**证明**　由定理 1,有

$$\frac{1}{2h\left(\frac{1}{2}\right)}f\left(F\left(y,F(x,y,1-\lambda),\frac{1}{2}\right)\right)\leqslant\int_0^1 f(F(y,F(x,y,1-\lambda),t))\mathrm{d}t\leqslant[f(y)+f(F(x,y,1-\lambda)]\int_0^1 h(t)\mathrm{d}t,$$

$$\frac{1}{2h\left(\frac{1}{2}\right)}f\left(F\left(x,F(x,y,1-\lambda),\frac{1}{2}\right)\right)\leqslant\int_0^1 f(F(x,F(x,y,1-\lambda),t))\mathrm{d}t\leqslant[f(x)+f(F(x,y,1-\lambda)]\int_0^1 h(t)\mathrm{d}t。$$

上两式分别乘以$(1-\lambda)$和 $\lambda$,相加即得

$$\frac{1-\lambda}{2h\left(\frac{1}{2}\right)}f\left(F\left(y,F(x,y,1-\lambda),\frac{1}{2}\right)\right)+\frac{\lambda}{2h\left(\frac{1}{2}\right)}f\left(F\left(x,F(x,y,1-\lambda),\frac{1}{2}\right)\right)\leqslant$$

$$(1-\lambda)\int_0^1 f(F(y,F(x,y,1-\lambda),t))\mathrm{d}t+\lambda\int_0^1 f(F(x,F(x,y,1-\lambda),t))\mathrm{d}t=$$

$$(1-\lambda)\int_0^1 f(F(y,F(x,y,1-\lambda),t))\mathrm{d}t+\lambda\int_0^1 f(F(x,F(x,y,1-\lambda),1-t))\mathrm{d}t=\int_0^1 f(F(x,y,1-t))\mathrm{d}t\leqslant$$

$$(1-\lambda)[f(y)+f(F(x,y,1-\lambda)]\int_0^1 h(t)\mathrm{d}t+\lambda[f(x)+f(F(x,y,1-\lambda)]\int_0^1 h(t)\mathrm{d}t=$$

$$[f(F(x,y,1-\lambda))+(1-\lambda)f(y)+\lambda f(x)]\int_0^1 h(t)\mathrm{d}t\leqslant[(h(1-\lambda)+\lambda)f(x)+(h(\lambda)+(1-\lambda))f(y)]\int_0^1 h(t)\mathrm{d}t。$$

最后一个不等式由 $f$ 在 $K$ 上的 $h$-$F$ 凸性易得。　证毕

本文给出 $h$-$F$ 凸函数的 Hadamard 不等式和一些等式和不等式性质,后续工作将继续研究 $h$-$F$ 凸函数的其他一些性质。

**参考文献:**

[1] Varošanec S. On *h*-convexity[J]. J Math Anal Appl,2007,326(1):303- 311.

[2] 黄金莹,赵宇,方秀男. *F-G* 广义凸函数与 *F* 拟凸函数[J]. 重庆师范大学学报:自然科学版,2011,28(4):11-15.

Huang J Y, Zhao Y, Fang X N. *F-G* generalized convex functions and *F*-quasiconvex functions[J]. Journal of Chongqing Normal University: Natural Science, 2011, 28(4):11-15.

[3] 黄金莹,赵宇. 广义凸函数与弱近似凸集[J]. 黑龙江大学学报:自然科学版,2011,28(2):200-205.

Huang J Y, Zhao Y. Generalized convex functions and weakly approximate convex set[J]. Journal of Heilongjiang

University:Natural Science,2011,28(2):200-205.

[4] 黄金莹,赵宇.广义凸函数的 Hadamard 不等式[J].重庆师范大学学报:自然科学版,2013,30(4):1-5.
Huang J Y,Zhao Y. Hadamard inequalities of generalized convex functions[J]. Journal of Chongqing Normal University:Natural Science,2013,30(4):1-5.

[5] 康兆敏,赵宇,方秀男. *F-G* 广义凸函数的若干性质[J].贵州师范大学学报:自然科学版,2011,29(2):72-76.
Kang Z M,Zhao Y,Fang X N. Properities of *F-G* generalized convex functions[J]. Journal of Guizhou Normal University:Natural Science,2011,29(2):72-76.

[6] Sarikaya M Z,Saglam A,Yildirim H. On some Hadamard-type inequalities for *h*-convex functions[J]. J Math Inequal, 2008,2(3):335-341.

[7] Dragomir S S,Fitzpatrick S. The Hadamard inequalities for *s*-convex functions in the second sense[J]. Demonstratio Math,1999,32(4):687-696.

[8] Noor M A. On Hadamard integral inequalities involving two log-preinvex functions[J]. J Inequal Pure and Appl Math,2007,8(3):75-76.

[9] 时统业,吴涵.关于 GA-凸函数的 Hadamard 型不等式的一个注记[J].重庆理工大学学报:自然科学版,2012,26(4):123-127.
Shi T Y,Wu H. A remark on Hadamard type inequality for GA-convex functions[J]. Journal of Chongqing University of Technology:Natural Science,2012,26(4):123-127.

[10] 王良成,张强.与 Hermite-Hadamard 不等式相关的 2 个映射[J].重庆理工大学学报:自然科学版,2011,25(4):102-105.
Wang L C,Zhang Q. Two mappings related to Hermite-Hadamard inequality for convex functions[J]. Journal of Chongqing University of Technology: Natural Science, 2011,25(4):102-105.

**Operations Research and Cybernetics**

## On Hadamard-type Inequalities for *h-F* Convex Functions

WANG Guodong

(Basic Teaching Department, Chongqing Water Resources and Electric Engineering College, Yongchuan Chongqing 402160, China)

**Abstract**: In this paper we introduce a new class of generalized convex function—*h-F* convex function, it is generalization of several known generalized convex function, such as *s*-convex function, *h*-convex function, index function and convex function. Based on some good properties of *h-F* convex function, we use conditions$P_1$、$P_2$ contained equality relations between them and the function is Lebesgue integrable, Hadamard-type inequalities and some other equalities and inequality of this class of generalized convex function are given, which are generalizations of the Hadamard-type inequalities of some convex functions.

**Key words**: *h-F* convex function; Lebesgue integrable; Hadamard-type inequality

(责任编辑 黄 颖)