DOI:10.11721/cqnuj20140613

关于 Diophantine 方程 $kx^4-(2k+4)x^2y^2+ky^4=-4$ *

管训贵[1],杜先存[2]
(1. 泰州学院 数理信息学院,江苏 泰州 225300;2. 红河学院 教师教育学院,云南 蒙自 661199)

摘要:利用 Pell 方程及同余的性质给出了 Diophantine 方程 G:$kx^4-(2k+4)x^2y^2+ky^4=-4$ 仅有整数解$(|x|,|y|)=(1,1)$的充分条件。证明了:1)若 $k\not\equiv 12 \pmod{16}$,则 Diophantine 方程 G 仅有整数解$(|x|,|y|)=(1,1)$;2)若 $k=4m$,$m\equiv 3 \pmod 4$,且 $2\nmid s$ 或 $s\equiv 0 \pmod 4$,$t\equiv 3,5 \pmod 8$或 $s\equiv 2 \pmod 4$,$t\equiv 1,7 \pmod 8$,则 Diophantine 方程 G 仅有整数解$(|x|,|y|)=(1,1)$,这里 $s+t\sqrt{m}$ 是 Pell 方程 $x^2-my^2=1$ 的基本解。

关键词:Diophantine 方程;同余;整数解
中图分类号:O156 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-6693(2014)06-0062-04

1 主要结论

Diophantine 方程

$$ax^4+bx^2y^2+ay^4=n \tag{1}$$

是二元四次不定方程的基本类型之一。

早在 50 多年前,Erdös、Grahm 和 Selfridge[1] 就曾证明:若 $a=c=1$,$b=-4$,$|n|\leqslant 100$,则仅当 $n\in\{-47,-32,-2,1,16,46,81\}$时,方程(1)有整数解。后来只有一些零散的结果[2-4]。

本文利用 Pell 方程及同余的性质给出以下一般性的结果。

定理 1 若 $k\not\equiv 12 \pmod{16}$,则 Diophantine 方程

$$kx^4-(2k+4)x^2y^2+ky^4=-4 \tag{2}$$

仅有整数解$(|x|,|y|)=(1,1)$。

定理 2 若 $k=4m$,$m\equiv 3 \pmod 4$,且 Pell 方程 $x^2-my^2=1$ 的基本解 $s+t\sqrt{m}$ 满足下列条件之一,则方程(2)仅有整数解$(|x|,|y|)=(1,1)$:1)$2\nmid s$;2)$s\equiv 0 \pmod 4$,$t\equiv 3,5 \pmod 8$;3) $s\equiv 2 \pmod 4$,$t\equiv 1,7 \pmod 8$。

推论 若 a,b 是正整数,且具有下列形状之一,则方程(2)仅有整数解$(|x|,|y|)=(1,1)$:1) $m=4a^2(4b-1)^2+4b-1$;2) $m=4a^2(4b-3)^2-4b+3$;3) $m=(2a-1)^2(2b-1)^2+4b-2$,其中 $b\equiv 0 \pmod 2$,$a\equiv 2,3 \pmod 4$或 $b\equiv 1 \pmod 2$,$a\equiv 0,1 \pmod 4$;4) $m=(2a-1)^2(2b-1)^2-4b+2$,其中 $b\equiv 0 \pmod 2$,$a\equiv 0,1 \pmod 4$或 $b\equiv 1 \pmod 2$,$a\equiv 2,3 \pmod 4$。

2 主要引理

引理 1[5-6] 设 D 是一个非平方的正整数,则方程

$$x^2-Dy^4=1 \tag{3}$$

至多有 2 组正整数解(x,y)。如果(3)式恰有两组正整数解,则当 $D=2^{4s}\times 1\ 785$,其中 $s\in\{0,1\}$时,$(x_1,y_1)=(169,2^{1-s})$且$(x_2,y_2)=(6\ 525\ 617\ 281,2^{1-s}\times 6\ 214)$;当 $D\neq 2^{4s}\times 1\ 785$ 时,$(x_1,y_1)=(u_1,\sqrt{v_1})$且$(x_2,y_2)=(u_2,\sqrt{v_2})$,这里$(u_n,v_n)$是 Pell 方程 $U^2-DV^2=1$ 的正整数解。如果方程(3)式仅有 1 组正整数解(x,y)且正整

* **收稿日期**:2013-06-03 **网络出版时间**:2014-11-19 21:49
资助项目:江苏省教育科学“十二五”规划课题(No. D201301083);泰州学院重点课题(No. TZXY2013ZDKT002);云南省教育厅科研基金(No. 2014Y462)
作者简介:管训贵,男,副教授,研究方向为初等数论,E-mail:tzszgxg@126.com
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20141119.2149.013.html

数 n 适合 $(x,y^2)=(u_n,v_n)$，则当 n 是偶数时，必有 $n=2$；当 n 是奇数时，必有 $n=1$ 或 p，这里 p 是适合 $p\equiv 3 \pmod 4$ 的素数。

引理 2　设 D 是一个非平方的正整数，且方程 $U^2-DV^2=1$ 的基本解为 $s+t\sqrt{D}$，则有

$$u_{n+2}=2su_{n+1}-u_n,u_0=1,u_1=s;v_{n+2}=2sv_{n+1}-v_n,v_0=0,v_1=t。$$

引理 3[7]　设 ξ,η 是正整数，满足方程 $x^2-Dy^2=1$（D 是一个非平方的正整数），且 $\xi>\frac{1}{2}\eta^2-1$，则 $\xi+\eta\sqrt{D}$ 是方程的基本解。

3 定理的证明

证明（定理 1）　$k=0$，结论显然成立。

下设 $k=2^l\cdot m,l\geqslant 0,l\neq 2,2\nmid m$，或 $k=4m,m\equiv 1 \pmod 4$。

情形 1，1）当 $l=0$ 时，$k=m$。由于 $2|m(x^4+y^4)$，$2\nmid m$，故 x,y 同奇同偶。令 $|x|=|s+t|$，$|y|=|s-t|$，这里 s,t 都是整数，代入(2)式整理得

$$s^4-(4m+2)s^2t^2+t^4=1。\tag{4}$$

若 $m<0$，则由(4)式得 $s=0,t=\pm 1$ 或 $t=0,s=\pm 1$，结论成立。

若 $m>0$，将(4)式写成

$$A_n^2-4m(m+1)B_n^4=1,\tag{5}$$

式中 $A_n=|s^2-(2m+1)t^2|$，$B_n=|t|$。假定(2)式有 2 组正整数解，则由引理 1 及 $4m(m+1)\neq 2^{4s}\times 1\ 785$，其中 $s\in\{0,1\}$，知 $(A_1,B_1)=(u_1,\sqrt{v_1})$ 且 $(A_2,B_2)=(u_2,\sqrt{v_2})$，这里 (u_n,v_n) 是 Pell 方程 $U^2-4m(m+1)V^2=1$ 的正整数解。

容易算出 $u_1=2m+1,v_1=1;u_2=8m^2+8m+1,v_2=4m+2$，故 $B_2^2=4m+2$，即 $B_2^2\equiv 2 \pmod 4$，但 2 不是模 4 的平方剩余，因此(5)式至多有 1 组正整数解，再由引理 1 知，(5)式仅有正整数解 $(A_1,B_1)=(2m+1,1)$，即 $|t|=1$，$|s^2-(2m+1)t^2|=2m+1$，解得 $|t|=1,s=0$ 或 $|t|=1,s^2=4m+2$。后一种情况不可能，所以得(2)式的整数解 $(|x|,|y|)=(1,1)$。

2）当 $l=1$ 时，$k=2m$，(2)式成为

$$mx^4-(2m+2)x^2y^2+my^4=-2。\tag{6}$$

由于 $2|m(x^4+y^4)$，$2\nmid m$，故 x,y 同奇同偶。令 $|x|=|s+t|$，$|y|=|s-t|$，这里 s,t 都是整数，代入(6)式整理得

$$s^4-(8m+2)s^2t^2+t^4=1。\tag{7}$$

若 $m<0$，则由(7)式得 $s=0,t=\pm 1$ 或 $t=0,s=\pm 1$，结论成立。

若 $m>0$，将(7)式写成 $A_n^2-8m(2m+1)B_n^4=1$，式中 $A_n=|s^2-(4m+1)t^2|$，$B_n=|t|$。由于 m 是奇数，故 $8m(2m+1)\neq 2^{4s}\times 1\ 785$，仿情形 1 的 1）同理可得(2)式有整数解 $(|x|,|y|)=(1,1)$。

3）当 $l\geqslant 3$ 时，$k=2^l\cdot m$，(2)式成为

$$2^{l-2}mx^4-(2^{l-1}m+1)x^2y^2+2^{l-2}my^4=-1。\tag{8}$$

由于 x,y 同奇，可令 $|x|=|s+t|$，$|y|=|s-t|$，这里 s,t 都是整数，代入(8)式整理得

$$s^4-2(2^{l+1}m+1)s^2t^2+t^4=1。\tag{9}$$

若 $m<0$，则由(9)式得 $s=0,t=\pm 1$ 或 $t=0,s=\pm 1$，结论成立。

若 $m>0$，将(9)式写成 $A_n^2-2^{l+2}m(2^lm+1)B_n^4=1$，即 $A_n^2-4k(k+1)B_n^4=1$，式中 $A_n=|s^2-(2k+1)t^2|$，$B_n=|t|$。仿情形 1 的 1）同理可得(2)式有整数解 $(|x|,|y|)=(1,1)$。所以该情形(2)式仅有整数解 $(|x|,|y|)=(1,1)$。

情形 2，$k=4m,m\equiv 1 \pmod 4$ 时，由(2)式可得

$$(xy)^2-m(x^2-y^2)^2=1。\tag{10}$$

若 x,y 同奇，仿情形 1 的 1）同理可得(2)式有整数解 $(|x|,|y|)=(1,1)$；若 x,y 一奇一偶，考虑到 $m\equiv 1 \pmod 4$，对(10)式模 4 得 $-1\equiv 1 \pmod 4$，矛盾。所以该情形(2)式仅有整数解 $(|x|,|y|)=(1,1)$。

综上，若 $k\not\equiv 12 \pmod{16}$，则(2)式仅有整数解 $(|x|,|y|)=(1,1)$。　　证毕

证明(定理2) $k=4m, m\equiv 3 \pmod 4$时,由(2)式可得

$$mx^4-(2m+1)x^2y^2+my^4=-1。\tag{11}$$

$m<0$时,结论显然成立。下面仅考虑$m>0$。

若x,y同奇,可令$|x|=|s+t|,|y|=|s-t|$,这里s,t都是整数,代入(2)式整理得

$$A_n^2-16m(4m+1)B_n^4=1,\tag{12}$$

式中$A_n=|s^2-(8m+1)t^2|, B_n=|t|$。

假定(2)式有2组正整数解,则由$16m(m+1)=2^{4s}\times 1\ 785$知$s=0$时无解;$s=1$时$m=21$。此时$m$不满足条件,故由引理1知$(A_1,B_1)=(u_1,\sqrt{v_1})$且$(A_2,B_2)=(u_2,\sqrt{v_2})$,这里$(u_n,v_n)$是Pell方程$U^2-16m(4m+1)V^2=1$的正整数解。

又$u_1=8m+1, v_1=1; u_2=128m^2+32m+1, v_2=16m+2$。故$B_2^2=16m+2$,显然不可能,因此(12)式至多有1组正整数解,再由引理1知,(12)式仅有正整数解$(A_1,B_1)=(8m+1,1)$,即$|t|=1, |s^2-(8m+1)t^2|=8m+1$,解得$|t|=1, s=0$或$|t|=1, s^2=16m+2$。后一种情况不可能,所以得(2)式的整数解$(|x|,|y|)=(1,1)$。

若x,y一奇一偶,由(11)式可得

$$U^2-mV^2=1,\tag{13}$$

式中$U=|xy|, V=|x^2-y^2|$,则$2|U, 2\nmid V$,且有$U+V\sqrt{m}=u_n+v_n\sqrt{m}=(s+t\sqrt{m})^n$,这里$n$是非负整数,$s+t\sqrt{m}$是Pell方程(13)式的基本解。

根据引理2有

$$u_{n+2}=2su_{n+1}-u_n, u_0=1, u_1=s,\tag{14}$$

$$v_{n+2}=2sv_{n+1}-v_n, v_0=0, v_1=t。\tag{15}$$

1) 若$2\nmid s$,则$s\equiv a \pmod 8$,这里$a=1,3,5,7$。对(14)式模8,$a=1$时,剩余序列周期为1,序列为$1,1,\cdots$;$a=3,5,7$时,剩余序列周期为2,其序列为$1,a,1,a\cdots$,从而$2\nmid U$,与前述矛盾。所以(13)式没有整数解。

2) 若$s\equiv 0 \pmod 8), t\equiv 3,5 \pmod 8$,对(14)式模8,得剩余序列周期为4,其序列为$1,0,7,0,\cdots$,所以$U\equiv 0 \pmod 8$,故有$V=|x^2-y^2|\equiv 1 \pmod 8$。对(15)式模8,得剩余序列周期为4,其序列分别为$0,3,0,5,\cdots$及$0,5,0,3,\cdots$,即$V\equiv 3,5 \pmod 8$,与前述矛盾。所以(13)式没有整数解;

若$s\equiv 4 \pmod 8, t\equiv 3,5 \pmod 8$,对(14)式模8,得剩余序列周期为4,其序列为$1,4,7,4,\cdots$,所以$U\equiv 4 \pmod 8$,故有$V=|x^2-y^2|\equiv 1,7 \pmod 8$。对(15)式模8,得剩余序列周期为4,其序列分别为$0,3,0,5,\cdots$及$0,5,0,3,\cdots$,即$V\equiv 3,5 \pmod 8$,与前述矛盾。所以(13)式没有整数解。

3) 若$s\equiv 2 \pmod 8, t\equiv 1,7 \pmod 8$,对(14)式模8,得剩余序列周期为4,其序列为$1,2,7,2,\cdots$,所以$U\equiv 2 \pmod 8$,故有$V=|x^2-y^2|\equiv 3,5 \pmod 8$。对(15)式模8,得剩余序列周期为4,其序列分别为$0,1,4,7,\cdots$及$0,7,4,1,\cdots$,即$V\equiv 1,7 \pmod 8$,与前述矛盾。所以(13)式没有整数解;

若$s\equiv 6 \pmod 8, t\equiv 1,7 \pmod 8$,对(14)式模8,得剩余序列周期为4,其序列为$1,6,7,6,\cdots$,所以$U\equiv 6 \pmod 8$,故有$V=|x^2-y^2|\equiv 3,5 \pmod 8$。对(15)式模8,得剩余序列周期为4,其序列分别为$0,1,4,7,\cdots$及$0,7,4,1,\cdots$,即$V\equiv 1,7 \pmod 8$,与前述矛盾。所以(13)式没有整数解。 证毕

证明(推论) 显然,1)~4)中$m\equiv 3 \pmod 4$。

1)当$m=4a^2(4b-1)^2+4b-1$时,(13)式有正整数解$u=8a^2(4b-1)+1, v=4a$。因为$u>\frac{1}{2}v^2-1$,故(13)式的基本解为$s=8a^2(4b-1)+1, t=4a$。又$2\nmid s$,故由定理2的1)知,该情形(2)式仅有整数解$(|x|,|y|)=(1,1)$。

2) 当$m=4a^2(4b-3)^2-4b+3$时,仿1)可得(13)式的基本解为$s=8a^2(4b-3)-1, t=4a$。因为$2\nmid s$,故由定理2的1)知,该情形(2)式仅有整数解$(|x|,|y|)=(1,1)$。

3) 当$m=(2a-1)^2(2b-1)^2+4b-2$时,仿1)可得(13)式的基本解为$s=(2a-1)^2(2b-1)+1, t=2a-1$。若$s\equiv 0 \pmod 4, t\equiv 3,5 \pmod 8$,则$b\equiv 0 \pmod 2, a\equiv 2,3 \pmod 4$;若$s\equiv 2 \pmod 4, t\equiv 1,7 \pmod 8$,则$b\equiv 1 \pmod 2, a\equiv 0,1 \pmod 4$。

故由定理2的2)、3)知,该情形(2)式仅有整数解$(|x|,|y|)=(1,1)$。

4) 当 $m=(2a-1)^2(2b-1)^2-4b+2$ 时,仿 1)可得(13)式的基本解为 $s=(2a-1)^2(2b-1)-1$,$t=2a-1$。以下仿 3)的讨论可知,该情形(2)式仅有整数解$(|x|,|y|)=(1,1)$。 证毕

由定理 2 很容易推出,当 $k=4m$,$m\equiv 3 \pmod 4$时,满足 $m<100$ 的正整数有 3,7,19,23,35,39,51, 55,67,71,83,87,95,99。对于其他的 m 值,(2)式除了整数解$(|x|,|y|)=(1,1)$外,是否还有别的解,值得探究。

参考文献:

[1] Erdös P,Turk J. Products of integers in short intervals[J]. Acta Arith,1984(44):147-174.

[2] Walsh P G. An inproved method for solving the family of Thue equations $sX^4-2rX^2Y^2+sY^4=1$[C]//Bennett M A. Number theory for the millennium Ⅲ,Natick MA:A K Peters,2002:375-383.

[3] Guy R K. Unsolved problems in number theory[M]. New York:Springer-Verlag,1981:80.

[4] Mordell L J. Diophantine equation[M]. London:Academic Press,1969:21-29.

[5] Walsh P G. A note on a theorem of Ljunggren and the Diophantine equation $x^2-kxy^2+y^4=1,4$[J]. Arch Math Basel,1999,73(2):119-125.

[6] Togbé A,Voutier P M,Walsh P G. Solving a family of Thue equations with an application to the equation $x^2-Dy^4=1$[J]. Acta Arith,2005,120(1):39-58.

[7] 柯召,孙琦. 谈谈不定方程[M]. 上海:上海教育出版社,1980:23-24.

Ke Z,Sun Q. On the Diophantine equations[M]. Shanghai: Shanghai Education Press,1980:23-24.

On the Diophantine Equation $kx^4-(2k+4)x^2y^2+ky^4=-4$

GUAN Xungui[1], DU Xiancun[2]

(1. School of Mathematics, Physics and Information Science, Taizhou University, Taizhou Jiangsu 225300;

2. Teachers' Educational College, Honghe University, Mengzi Yunnan 661199, China)

Abstract: In this paper, we give sufficient conditions for the Diophantine equation G: $kx^4-(2k+4)x^2y^2+ky^4=-4$ which have only integer solutions $(|x|,|y|)=(1,1)$, by use properties of Pell equation and congruence. We prove the following theorem: 1) If $k\equiv 12 \pmod{16}$, then Diophantine equation G have only integer solutions$(|x|,|y|)=(1,1)$; 2) If $k=4m$, $m\equiv 3 \pmod 4$, and $2\nmid s$ or $s\equiv 0 \pmod 4$, $t\equiv 3,5 \pmod 8$ or $s\equiv 2 \pmod 4$, $t\equiv 1,7 \pmod 8$, then Diophantine equation G have only integer solutions$(|x|,|y|)=(1,1)$, where $s+t\sqrt{m}$ is a fundamental solution of Pell equation.

Key words: Diophantine equation; congruence; integer solution

(责任编辑 黄 颖)