DOI:10.11721/cqnuj20140614

关于 Diophantine 方程 $x^3+1=13qy^2$ 的整数解*

杜先存[1]，管训贵[2]，李玉龙[1]
(1. 红河学院 教师教育学院，云南 蒙自 661199；2. 泰州学院 数理信息学院，江苏 泰州 225300)

摘要：设 D 是无平方因子的正整数，$D=\prod_{i=1}^{s}p_i(s\geqslant 2)$，$p_i\equiv 1(\mathrm{mod}\ 6)(1\leqslant i\leqslant s)$ 为奇素数。关于 Diophantine 方程 $x^3+1=Dy^2$ 的初等解法至今仍未解决。主要利用同余式、平方剩余、Pell 方程的解的性质、递归序列，证明了 $q\equiv 7(\mathrm{mod}\ 12)$ 为奇素数，且 $\left(\frac{q}{13}\right)=-1$ 时，Diophantine 方程 $x^3+1=13qy^2$ 当 $q=7$ 时有整数解(4 367，±30 252)，(−1，0)；当 $q\neq 7$ 时仅有整数解 $(x,y)=(-1,0)$。

关键词：Diophantine 方程；整数解；同余式；平方剩余；递归序列
中图分类号：O156　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1672-6693(2014)06-0066-03

设 $\mathbf{Z}$ 表示全体整数的集合，方程

$$x^3\pm 1=Dy^2(D>0,D\text{ 无平方因子},x,y\in\mathbf{Z})\tag{1}$$

是一类重要的 Diophantine 方程，其整数解已有不少人研究过。柯召、孙琦[1]证明了当 $D>2$，D 无平方因子且不含 3 及 $6k+1$ 型的素因子时，方程(1)无非平凡解。D 含素因子 3 时，杜先存等[2]给出了方程(1)无非平凡解的两个充分条件。但当 D 含 $6k+1$ 型的素因子时，方程(1)的求解较为困难，尤其是 D 含两个或两个以上 $6k+1$ 型的素因子时方程(1)的求解更为困难。当 D 含一个 $6k+1$ 型的素因子时，罗明[3]给出了方程 $x^3+1=7y^2$ 的所有解；段辉明[4]给出了方程 $x^3+1=38y^2$ 的所有解；段辉明[5]给出了方程 $x^3+1=57y^2$ 的所有解；李双志、罗明[6]给出了方程 $x^3+1=201y^2$ 的所有解。本文利用同余式、平方剩余、Pell 方程的解的性质、递归序列讨论了 D 含两个 $6k+1$ 型的素因子时方程 $x^3+1=Dy^2$ 的解。

1 主要引理

引理 1[7]　设 p 是一个奇素数，则丢番图方程 $x^4-py^2=1$ 除开 $p=5,x=3,y=4$ 和 $p=29,x=99,y=1\ 820$ 外，无其他的正整数解。

引理 2[7]　方程 $x^2-3y^4=1$ 仅有整数解 $(x,y)=(\pm 2,\pm 1),(\pm 7,\pm 2),(\pm 1,0)$。

引理 3[7]　设 p 是一个奇素数，则丢番图方程 $4x^4-py^2=1$ 除开 $p=3,x=y=1$ 和 $p=7,x=2,y=3$ 外，无其他的正整数解。

2 定理及证明

定理　设 $q\equiv 7(\mathrm{mod}\ 12)$ 为奇素数，$\left(\frac{q}{13}\right)=-1$，则 Diophantine 方程

$$x^3+1=13qy^2\tag{2}$$

当 $q=7$ 时有解(4 367，±30 252)，(−1，0)；$q\neq 7$ 时仅有整数解 $(x,y)=(-1,0)$。

证明　因为 $\gcd(x+1,x^2-x+1)=1$ 或 3，故对(2)式给出以下 8 种可能的分解，并讨论在这些分解下(2)式的整数解。

* **收稿日期**：2013-05-26　　**网络出版时间**：2014-11-19　21:49
资助项目：云南省教育厅科研基金(No. 2014Y462)；江苏省教育科学“十二五”规划课题(No. D201301083)；喀什师范学院校级课题(No. (14)2513)
作者简介：杜先存，女，讲师，研究方向为初等数论，E-mail：liye686868@163.com
网络出版地址：http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20141119.2149.014.html

1) $x+1=13qu^2, x^2-x+1=v^2, y=uv, \gcd(u,v)=1$。解第二式,得 $x=0,1$,均不满足第一式,故此分解下(2)式无整数解。又因为 $u^2\equiv 0,1,4 \pmod 8$,利用同余的性质可知后面第 4)和 6)种分解也不成立。

2) $x+1=u^2, x^2-x+1=13qv^2, y=uv, \gcd(u,v)=1$。将第一式代入第二式得 $(2u^2-3)^2+3=52qv^2$,则有 $(2u^2-3)^2\equiv -3 \pmod{13}$,解得 $u^2\equiv -2,5 \pmod{13}$。但模 q 的 Legendre 符号 $\left(\frac{-2}{13}\right)=\left(\frac{5}{13}\right)=-1$,故此分解下(2)式无整数解。

3) $x+1=13u^2, x^2-x+1=qv^2, y=uv, \gcd(u,v)=1$。将第一式代入第二式得 $(26u^2-3)^2+3=4qv^2$,则有 $3\equiv qv^2 \pmod{13}$。又 $\left(\frac{3}{13}\right)=1$,而 $\left(\frac{q}{13}\right)=-1$,矛盾,故此分解下(2)式无整数解。

4) $x+1=qu^2, x^2-x+1=13v^2, y=uv, \gcd(u,v)=1$。利用同余的性质可得此情形下(2)式无整数解。

5) $x+1=39qu^2, x^2-x+1=3v^2, y=3uv, \gcd(u,v)=1$。将第一式代入第二式得 $(2v)^2-3(26qu^2-1)^2=1$,故有

$$2v+(26qu^2-1)\sqrt{3}=\pm(x_n+y_n\sqrt{3})=\pm(2+\sqrt{3})^n, n\in\mathbf{Z}。$$

这里 $2+\sqrt{3}$ 是 Pell 方程 $X^2-3Y^2=1$ 的基本解,因此有 $26qu^2-1=\pm y_n (n\in\mathbf{Z})$,即 $26qu^2=\pm y_n+1$。又 $y_{-n}=-y_n$,所以只需考虑

$$26qu^2=y_n+1。\tag{3}$$

由(3)式得 $y_n\equiv -1 \pmod{26}$,则有 $y_n\equiv -1 \pmod{13}$。容易验证下式成立

$$y_{n+2}=4y_{n+1}-y_n, y_0=0, y_1=1。\tag{4}$$

对递归序列(4)式取模 13,得周期为 12 的剩余类序列,且仅当 $n\equiv 0 \pmod 6$ 时,有 $y_n\equiv 0 \pmod{13}$;仅当 $n\equiv 7,-1 \pmod{12}$ 时,$y_n\equiv -1 \pmod{13}$。所以(3)式要成立,只需 $n\equiv 7,-1 \pmod{12}$。

当 $n\equiv 7 \pmod{12}$ 时,令 $n=12m+7 (m\in\mathbf{Z})$,则

$$26qu^2=y_{12m+7}+1=x_{12m+6}+2y_{12m+6}+1=x_{6m+3}^2+3y_{6m+3}^2+4x_{6m+3}y_{6m+3}+1=2x_{6m+3}(x_{6m+3}+2y_{6m+3})=2x_{6m+3}y_{6m+4}。$$

即

$$13qu^2=x_{6m+3}y_{6m+4}。\tag{5}$$

又因为 $\gcd(x_{6m+3}, y_{6m+4})=\gcd(x_{6m+3}, x_{6m+3}+2y_{6m+3})=\gcd(x_{6m+3}, 2y_{6m+3})=2$,而 $y_{6m+4}\not\equiv 0 \pmod{13}$,所以下列情形之一成立。

$$x_{6m+3}=26qa^2, y_{6m+4}=2b^2, u=2ab, \gcd(a,b)=1,\tag{6}$$

$$x_{6m+3}=26a^2, y_{6m+4}=2qb^2, u=2ab, \gcd(a,b)=1。\tag{7}$$

由(6)式的第二式得 $x_{3m+2}y_{3m+2}=b^2$,又因为 $\gcd(x_{3m+2}, y_{3m+2})=1$,则有 $x_{3m+2}=c^2, y_{3m+2}=d^2$,故 $c^4-3(d^2)^2=1$,根据引理 1 知,$c^2=1$,此时 $x_{3m+2}=1$,由 $x_0=1$ 知 $x_{3m+2}=1$ 无解,所以此分解下(2)式无整数解。

由(7)式的第二式得 $x_{3m+2}y_{3m+2}=qb^2$,又因为 $\gcd(x_{3m+2}, y_{3m+2})=1$,则有以下情形之一成立。

$$x_{3m+2}=c^2, y_{3m+2}=qd^2, b=cd, \gcd(c,d)=1,\tag{8}$$

$$x_{3m+2}=qc^2, y_{3m+2}=d^2, b=cd, \gcd(c,d)=1。\tag{9}$$

将(8)式代入 $x_{3m+2}^2-3y_{3m+2}^2=1$ 中,有 $c^4-3(qd^2)^2=1$,根据引理 1 知,$c^2=1$,此时 $x_{3m+2}=1$,由 $x_0=1$ 知 $x_{3m+2}=1$ 无解,所以此分解下(2)式无整数解。

将(9)式代入 $x_{3m+2}^2-3y_{3m+2}^2=1$ 中,得 $(qc^2)^2-3d^4=1$,由引理 2 知,方程仅有整数解 $(q,c,d)=(1,\pm1,0)$,$(7,\pm1,\pm2)$ 和 $(2,\pm1,\pm1)$,又 $q\equiv 7 \pmod{24}$ 为奇素数,得 $(q,c,d)=(7,\pm1,\pm2)$,故 $x_{3m+2}=7$,则 $m=0$。此时 $n=7$,所以由(3)式得 $26qu^2=182u^2=y_7+1=2\ 912$,故 $u=\pm4$,从而得到了 $q=7$ 时(2)式的两组非平凡解 $(4\ 367, \pm 30\ 252)$。

当 $n\equiv -1 \pmod{12}$ 时,令 $n=12m-1 (m\in\mathbf{Z})$,则有

$$26qu^2=y_{12m-1}+1=-x_{12m}+2y_{12m}+1=-(x_{6m}^2+3y_{6m}^2)+4x_{6m}y_{6m}+1=2y_{6m}(2x_{6m}-3y_{6m})=2x_{6m-1}y_{6m}。$$

即

$$13qu^2=x_{6m-1}y_{6m}。\tag{10}$$

又因为 $\gcd(x_{6m-1}, y_{6m})=\gcd(2x_{6m}-3y_{6m}, y_{6m})=\gcd(2x_{6m}, y_{6m})=2$,而 $y_{6m}\equiv 0 \pmod{13}$,则有以下情形之一成立。

$$x_{6m-1}=2a^2, y_{6m}=26qb^2, u=2ab, \gcd(a,b)=1,\tag{11}$$

$$x_{6m-1}=2qa^2, y_{6m}=26b^2, u=2ab, \gcd(a,b)=1。\tag{12}$$

将(11)式的第一式代入 $x_{6m-1}^2-3y_{6m-1}^2=1$，得 $4a^4-3y_{6m-1}^2=1$。根据引理 3 知，$a^2=1$，此时 $x_{6m-1}=2$，由 $x_1=2$ 知 $x_{6m-1}=2$ 无解，故该情形(2)式无整数解。

仿(7)式的证明可知(12)式给出(2)式的平凡解 $(x,y)=(-1,0)$。

故该情形下(2)式当 $q=7$ 时有整数解 $(x,y)=(-1,0),(4\ 367,\pm 30\ 252)$；$q\neq 7$ 时仅有整数解 $(x,y)=(-1,0)$。

6) $x+1=3u^2$，$x^2-x+1=39qv^2$，$y=3uv$，$\gcd(u,v)=1$。利用同余的性质可得此情形下(2)式无整数解。

7) $x+1=39u^2$，$x^2-x+1=3qv^2$，$y=3uv$，$\gcd(u,v)=1$。将第一式代入第二式得 $(78u^2-3)^2+3=12qv^2$，则有 $1\equiv qv^2 \pmod{13}$。又 $\left(\dfrac{q}{13}\right)=-1$，矛盾，故此情形下(2)式无整数解。

8) $x+1=3qu^2$，$x^2-x+1=39v^2$，$y=3uv$，$\gcd(u,v)=1$。将第一式代入第二式得 $(6qu^2-3)^2+3=156v^2$，则有 $1\equiv 13v^2 \pmod{q}$。又 $\left(\dfrac{13}{q}\right)=\left(\dfrac{q}{13}\right)=-1$，矛盾，故此情形下(2)式无整数解。

综上有，Diophantine 方程(2)在题设条件下当 $q=7$ 时有整数解 $(x,y)=(-1,0),(4\ 367,\pm 30\ 252)$；$q\neq 7$ 时仅有整数解 $(x,y)=(-1,0)$。　　证毕

参考文献：

[1] 柯召，孙琦. 关于丢番图方程 $x^3\pm 1=Dy^2$[J]. 中国科学，1981，24(12)：1453-1457.
Ke Z，Sun Q. On the diophantine equation $x^3\pm 1=Dy^2$[J]. Scientia Sinica Mathemation，1981，24(12)：1453-1457.

[2] 杜先存，吴丛博，赵金娥. 关于 Diophantine 方程 $x^3\pm 1=3Dy^2$[J]. 沈阳大学学报：自然科学版，2013，25(1)：84-86.
Du X C，Wu C B，Zhao J E. On diophantine equation $x^3\pm 1=3Dy^2$[J]. Journal of Shenyang University：Natural Science，2013，25(1)：84-86.

[3] 罗明. 关于不定方程 $x^3+1=7y^2$[J]. 重庆师范学院学报：自然科学版，2003，20(4)：5-7.
Luo M. On the diophantine equation $x^3+1=7y^2$[J]. Journal of Chongqing Teachers College：Natural Science，2003，20(4)：5-7.

[4] 段辉明. 关于不定方程 $x^3+1=38y^2$[J]. 华东师范大学学报：自然科学版，2006(1)：35-39.
Duan H M. On the diophantine equation $x^3+1=38y^2$[J]. Journal of East China Normal University：Natural Science，2006(1)：35-39.

[5] 段辉明. 关于丢番图方程 $x^3+1=57y^2$[J]. 重庆师范大学学报：自然科学版，2010，27(3)：41-43.
Duan H M. On thediophantine equation $x^3+1=57y^2$[J]. Journal of Chongqing Normal University：Natural Science，2010，27(3)：41-43.

[6] 李双志，罗明. 关于不定方程 $x^3+1=201y^2$[J]. 西南师范大学学报：自然科学版，2010，35(1)：11-14.
Li S Z，Luo M. On the diophantine equation $x^3+1=201y^2$[J]. Journal of Southwest China Normal University：Natural Science Edition，2010，35(1)：11-14.

[7] 曹珍富. 丢番图方程引论[M]. 哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，1989：20，260.
Cao Z F. Introduction to diophantine equations[M]. Harbin：Harbin Institute of Technology Press，1989：20，260.

The Integer Solutions of the Diophantine Equation $x^3+1=13qy^2$

DU Xiancun[1]，GUAN Xungui[2]，LI Yulong[1]

(1. School of Teacher Education，Honghe University，Mengzi Yunnan 661199；
2. School of Mathematics，Physics & Information Science，Taizhou University，Taizhou Jiangsu 225300，China)

Abstract：Let D be a square-free positive integer and $D=\prod_{i=1}^{s} p_i\ (s\geqslant 2)$，where $p_i\equiv 1 \pmod 6\ (i=1,2,\cdots,s)$ are odd primes. The primary solution of the Diophantine equation $x^3+1=Dy^2$ still remains unresolved. By using congruence，quadratic residue，some properties of the solutions to Pell equation，recursive sequence，when $q\equiv 7 \pmod{12}$ is an odd prime，and $\left(\dfrac{q}{13}\right)=-1$，we prove the following results：1) if $q=7$，the Diophantine equation $x^3+1=13qy^2$ has integer solutions $(x,y)=(4\ 367,\pm 30\ 252),(-1,0)$；2) if $q\neq 7$，the Diophantine equation $x^3+1=13qy^2$ has only one integer solution，that is $(x,y)=(-1,0)$.

Key words：Diophantine equation；integer solution；congruence；quadratic remainder；recursive sequence

(责任编辑　黄　颖)