DOI:10.11721/cqnuj20140616

求积公式在平均误差情形下的饱和性*

齐 宗 会

(天津商业大学 宝德学院，天津 300384)

摘要:本文讨论了在 Wiener 空间下的最优求积公式在 r-重积分 Wiener 空间下的平均误差,得到了相应量的值或强渐近阶,结果证明该求积公式在平均误差情形下具有饱和性。本文的结果说明了此求积公式虽对 Wiener 空间是最优的,但对 1-重积分 Wiener 空间仅仅是阶最优的,而当 $r\geqslant 2$ 时,此求积公式在 r-重积分 Wiener 空间下没有任何最优性。因此,对于计算具有不同光滑性的函数的积分而言,此积分公式不是普适算法。

关键词:平均误差;求积公式;r-重积分;Wiener 空间;普适算法

中图分类号:O174.41　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2014)06-0073-04

假设 F 是一个集合,G 是一个范数为 $\|\cdot\|$ 的线性赋范空间,μ 是定义在 F 的 Borel 子集上的概率测度,S 是 F 到 G 的可测映照,称为解算子;N 是 F 到 $\mathbf{R}^n$ 的一个可测映射,称为信息算子;φ 是 $\mathbf{R}^n$ 到 G 的一个可测映射,称为算法。当 $1\leqslant p<+\infty$时,信息基逼近 $\varphi\circ N$ 相应于测度 μ 的 p-平均误差为[1]

$$e_p(S,\varphi\circ N,\|\cdot\|,\mu,F)=\left(\int_F\|S(f)-\varphi(N(f))\|^p\mu(\mathrm{d}f)\right)^{\frac{1}{p}}。\tag{1}$$

在上述定义中 F 通常为函数空间,S 通常为恒等算子(此时称为逼近)或积分,信息算子通常为标准信息,而 φ 通常为线性算子[2]。对于逼近和积分问题在平均情形下的误差分析已有了大量研究,但这些研究所使用的逼近方法都是样条函数逼近[2-4]。考虑到同时逼近(在近期研究中称为寻找普适算法)算法在数值计算中的重要作用,文献[5-10]考虑了对于逼近问题一些信息基算子平均误差问题。注意到文献[2-4]均未考虑相应算子的同时逼近问题,本文将考虑计算连续函数积分的最优算法对于计算具有各阶可函数的积分是否是普适算子。

记 $F_0=\{f\in C[0,1]:f(0)=0\}$,对于每一个 $f\in F_0$,定义 $\|f\|_C:=\max\limits_{-1\leqslant t\leqslant 1}|f(t)|$,则$(F_0,\|\cdot\|_C)$成为一个可分的 Banach 空间。$(F_0,\|\cdot\|_C)$上的 Borel 集记为 $\mathrm{B}(F_0)$,$\mathrm{B}(F_0)$上的 Wiener 测度记为 ω_0[2]。现在定义 F_0 上的 r-重积分算子 T_r,$r\geqslant 1$ 为$(T_rg)(t)=\int_0^t g(u)\dfrac{(t-u)^{r-1}}{(r-1)!}\mathrm{d}u$,$\forall g\in F_0$。对于任意的 $g\in F_0$,$T_rg\in F_r=\{f\in C^{(r)}[0,1]:f^{(k)}(0)=0,k=0,\cdots,r\}$。易知 T_r 是从 F_0 到 F_r 的一个双射。F_r 上的 r-重积分 Wiener 测度 ω_r 可用诱导测度 $\omega_r=T_r\omega_0$ 来定义,即对于任意 $A\subset F_r$,有 $\omega_r(A)=\omega_0(\{g:T_rg\in A\})$。

由文献[2]可知

$$\int_{F_r}f(s)f(t)\omega_r(\mathrm{d}f)=\int_0^1\frac{(s-u)_+^r\,(t-u)_+^r\,\mathrm{d}u}{(r!)^2},\tag{2}$$

其中 $z_+=\begin{cases}z,z>0\\0,z\leqslant 0\end{cases}$。

若 $f\in C[0,1]$,则计算积分算子 $S(f)=\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ 。在 Wiener 空间下具有最优性的求积公式为[2]

$$T_n(f)=\frac{2}{2n+1}\sum_{k=1}^n f(t_k)\ ,t_k=\frac{2k}{2n+1}。\tag{3}$$

容易知道 $T_n(f)$为信息基算子,其中 $N(f)=(f(t_0),\cdots,f(t_n))$,$\varphi(x_0,\cdots,x_n)=\dfrac{2}{2n+1}\sum\limits_{k=1}^n x_k$ 。

* **收稿日期**:2013-05-14　**网络出版时间**:2014-11-19 21:49

资助项目:国家自然科学基金(No.11271263)

作者简介:齐宗会,女,讲师,研究方向为插值法与逼近论,E-mail:qzh_2007_lovely@163.com

网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20141119.2149.016.html

本文将考虑其在 r-重积分 Wiener 测度 ω_r 下的平均误差，得到如下定理。

定理 若 S,T_n,F_r,ω_r 定义如上,则 $e_p(S,T_n,|\cdot|,\omega_r,F_r)=\begin{cases}\dfrac{\nu_p}{\sqrt{3}(2n+1)},r=0\\ \dfrac{\nu_p}{2\sqrt{5}(2n+1)^2},r=1\end{cases}$,其中 ν_p 是标准正态分布的 p 次绝对矩。且当 $r\geqslant 2$ 时,有 $e_p(S,T_n,|\cdot|,\omega_r,F_r)=\dfrac{\nu_p}{6(r-1)!\sqrt{2r-1}(2n+1)^2}+O\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$。这里及以下 $a_n=O(b_n)$表示存在与 n 无关的正数 C 使得 $|a_n|\leqslant Cb_n$。

由定理、文献[2]及本文的最后证明过程可知,当 $r=0,1\leqslant p<\infty$时,梯形公式(3)是最优的。同时从文献[2]可知,当 $r=1,1\leqslant p<\infty$时,梯形公式(3)是弱渐近最优的;但当 $r\geqslant 2$ 时,梯形公式不是渐近最优的。定理说明该公式在平均误差的意义下具有饱和性,其饱和阶为$\dfrac{1}{n^2}$。

证明 由文献[2]知 ω_r 是 F_r 上的 Gaussian 测度,而

$$L(f)=S(f)-T_n(f)=\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t-\frac{2}{2n+1}\sum_{k=1}^n f(t_k) \tag{4}$$

是 $C[0,1]$上的一个连续线性泛函,因此 $L(f)$是正态分布。由文献[2]知对任意 $x\in[0,1]$有

$$\int_{F_r} f(x)\omega_r(\mathrm{d}f)=0。 \tag{5}$$

由(5)式及积分可交换顺序的 Fubini 定理可知 $L(f)$在 F_r 下的数学期望为

$$E(L(f))=\int_{F_r}\left\{\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t-\frac{2}{2n+1}\sum_{k=1}^n f(t_k)\right\}\omega_r(\mathrm{d}f)=0。 \tag{6}$$

而由(6)式知 $L(f)$在 F_r 下的方差为

$$\sigma_r^2=E(L(f)^2)=\int_{F_r}\left\{\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t-\frac{2}{2n+1}\sum_{k=1}^n f(t_k)\right\}^2\omega_r(\mathrm{d}f)。 \tag{7}$$

由(2)、(7)式计算可得[2]

$$\sigma_r^2=\int_0^1\left(\frac{(1-t)^{r+1}}{(r+1)!}-\frac{2}{2n+1}\sum_{k=1}^n\frac{(t_k-t)_+^r}{r!}\right)^2\mathrm{d}t。 \tag{8}$$

当 $r=0$ 时,有

$$\sigma_0^2=\int_0^1\left((1-t)-\frac{2}{2n+1}\left(n-\left[\left(n+\frac{1}{2}t\right)\right]\right)\right)^2\mathrm{d}t=\frac{1}{2n+1}\int_0^{\frac{1}{2n+1}}(1-(2n+1)t)^2\mathrm{d}t=\frac{1}{3(2n+1)^2}。 \tag{9}$$

当 $r\geqslant 1$ 时,记

$$I_r(t)=\frac{(1-t)^{r+1}}{(r+1)!}-\frac{2}{2n+1}\sum_{k=1}^n\frac{(t_k-t)_+^r}{r!}。 \tag{10}$$

当 $r=1,0\leqslant t\leqslant 1$ 时,直接计算可得

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n(t_k-t)_+&=\sum_{k=\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]+1}^n\left(\frac{2k}{2n+1}-t\right)=\\ &\frac{[n(n+1)-(1+[(n+1/2)t])[((n+1/2)t)]-(2n+1)(n-[(n+1/2)t])t}{2n+1}=\\ &\frac{(t^2-2t)(2n+1)}{4}+\frac{n(n+1)}{2n+1}+\frac{(1-(n+1/2)t+[(n+1/2)t])((n+1/2)t-[(n+1/2)t])}{2n+1}。\end{aligned} \tag{11}$$

由(10)、(11)式可计算得

$$\begin{aligned}I_1(t)&=\frac{1}{2(2n+1)^2}+\frac{2\{((n+1/2)t-[(n+1/2)t])^2-(n+1/2)t+[(n+1/2)t]\}}{(2n+1)^2}=\\ &\frac{6((n+1/2)t-[(n+1/2)t])^2-6(n+1/2)t+6[(n+1/2)t]+1}{3(2n+1)^2}+\frac{1}{6(2n+1)^2}=J_1(t)+\frac{1}{6(2n+1)^2}。\end{aligned} \tag{12}$$

由(8)、(10)和(12)式可计算得

$$\sigma_1^2=\int_0^1\left(\frac{1}{2(2n+1)^2}+\frac{2\{((n+1/2)t-[(n+1/2)t])^2-(n+1/2)t+[(n+1/2)t]\}}{(2n+1)^2}\right)^2\mathrm{d}t=\frac{1}{20(2n+1)^4}。 \tag{13}$$

当 $r\geqslant 2,0\leqslant t\leqslant 1$ 时,直接可检验

$$I'_r(t)=-I_{r-1}(t),I_r(1)=0。\tag{14}$$

由(14)式及 Newton-Leibniz 公式可得

$$I_r(t)=\int_t^1 I_{r-1}(s)\mathrm{d}s。\tag{15}$$

利用归纳法及(15)式,可得到

$$I_r(t)=\int_t^1\mathrm{d}s_1\int_{s_1}^1\mathrm{d}s_2\cdots\int_{s_{r-2}}^1 J_1(s_{r-1})\mathrm{d}s_{r-1}+\frac{1}{6\,(2n+1)^2}\int_t^1\mathrm{d}s_1\int_{s_1}^1\mathrm{d}s_2\cdots\int_{s_{r-2}}^1\mathrm{d}s_{r-1},\tag{16}$$

直接计算可得

$$\int_t^1\mathrm{d}s_1\int_{s_2}^1\mathrm{d}s_2\cdots\int_{s_{r-1}}^1\mathrm{d}s_{r-1}=\frac{(1-t)^{r-1}}{(r-1)!},\tag{17}$$

直接计算可得:对任意自然数 $1\leqslant k\leqslant n$,有

$$\int_{\frac{2(k-1)}{2n+1}}^{\frac{2k}{2n+1}} J_1(t)\mathrm{d}t=0。\tag{18}$$

由(18)式可得 $\int_{s_{r-2}}^1 J_1(s_{r-1})\mathrm{d}s_{r-1}=\int_{s_{r-2}}^{\frac{[(2n+1)s_{r-2}]+1}{2n+1}} J_1(s_{r-1})\mathrm{d}s_{r-1}$ 。直接计算可得

$$\max_{t\in[0,1]}|J_1(t)|=\frac{1}{3\,(2n+1)^2}。\tag{19}$$

由(19)式和积分中值定理可得

$$\left|\int_{s_{r-2}}^1 J_1(s_{r-1})\mathrm{d}s_{r-1}\right|\leqslant\frac{1}{3\,(2n+1)^3}。\tag{20}$$

由(16)、(17)和(20)式可得

$$I_r(t)=\frac{(1-t)^{r-1}}{6\,(2n+1)^2(r-1)!}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)。\tag{21}$$

由(8)、(10)和(21)式可得

$$\sigma_r^2=\int_0^1\left(\frac{(1-t)^{r-1}}{6\,(2n+1)^2(r-1)!}\right)^2\mathrm{d}t+O\left(\frac{1}{n^6}\right)=\frac{1}{36\,((r-1)!\,)^2(2r-1)\,(2n+1)^4}+O\left(\frac{1}{n^6}\right)。\tag{22}$$

由 $L(f)$ 为正态分布及(6)、(7)式可知随机变量 $L(f)$ 在 F_r 下的概率密度函数为 $\rho(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma_r}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma_r^2}}$。

设 $X(f)=|L(f)|^p$,则 $X(f)\geqslant 0$。因此由数学期望的性质及分部积分公式可得

$$\begin{aligned}E(X)&=\int_0^{+\infty}P(X\geqslant t)\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}P(|\,L(f)\,|\geqslant t^{\frac{1}{p}})\,\mathrm{d}t=2\int_0^{+\infty}\int_{t^{\frac{1}{p}}}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma_r}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma_r^p}}\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\\&2\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma_r}\mathrm{e}^{-\frac{t^{\frac{2}{p}}}{2\sigma_r^2}}\cdot\frac{1}{p}\cdot t^{\frac{1}{p}}\mathrm{d}t=2\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma_r}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2\sigma_r^2}}\cdot u^p\mathrm{d}u=\\&2\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma_r}\mathrm{e}^{-\frac{x^2\sigma_r^2}{2\sigma_r^2}}\cdot x^p\sigma_r^{p+1}\mathrm{d}x=2\sigma_0^p\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\cdot x^p\mathrm{d}x=2\sigma_r^p\cdot\frac{1}{2}\nu_p^p=\sigma_r^p\nu_p^p\end{aligned}\tag{23}$$

由(1)、(4)、(9)、(13)、(22)及(23)式可得定理的结论。　　证毕

参考文献:

[1] Traub J F, Wasilkowski G W, Wozniakowski H. Information-based complexity[M]. New York: Academic Press, 1988.

[2] Klaus R. Average-case analysis of numerical problems[M]. Berlin/Heidelberg/New York: Springer-Verlag, 2000.

[3] Novak E, Wonizakowski H. Tractability of multivariate problems－linear information[M]. European Math Soc Zurich, 2008.

[4] Nurnberger G. Approximation by spline functions[M]. New York: Springer, 1989.

[5] Xu G Q, Du Y F. The average errors for quasi-hermite-fejer interpolation on the Wiener space[J]. Sci China Ser A, 2010, 53(6): 1841-1852.

[6] 许贵桥. 插值多项式在一重积分 Wiener 空间下的同时逼近平均误差[J]. 中国科学:数学, 2011, 41(5): 407-426.

Xu G Q. The simultaneous approximation average errors for interpolation polynomial on the 1-fold integrated Wiener space[J]. Chinese Science: Mathematics, 2011, 41(5): 407-426.

[7] 许贵桥,王婕. Lagrange 插值在一重积分 Wiener 空间下的同时逼近平均误差[J]. 数学学报,2012,55(3):405-424.
Xu G Q, Wang J. The simultaneous approximation average errors for Lagrange interpolation on the one-fold integrated Wiener space[J]. Journal of Mathematics, 2012, 55(3): 405-424.

[8] 许贵桥,刘洋. 拟 Hermite 插值在一重积分 Wiener 空间下的平均误差[J]. 数学学报,2013,56(3):353-368.
Xu G Q, Liu Y. The average errors for quasi-Hermite interpolation on the 1-fold integrated Wiener space[J]. Journal of Mathematics, 2013, 56(3): 353-368.

[9] Xu G Q. The simultaneous approximation average errors for Bernstein operators on the r-fold integrated Wiener space[J]. Numer Math Theor Meth Appl, 2012, 5(3): 403-422.

[10] Xu G Q, Ning J R. The average errors for Hermite interpolation on the 1-fold integrated Wiener space[J]. Chin Ann Math, 2012, 38B(5): 737-750.

The Saturation Property for Quadrature Formula on the Average Error Case

QI Zonghui

(College of Boustead, Tianjin Commerce University, Tianjin 300384, China)

Abstract: In this paper, the average errors of optimal quadrature formula in the Wiener space are discussed on the r-fold integrated Wiener space. Its values or strongly asymptotic order is obtained. From the results it is shown that these formulas have saturation property on the average error case. Our results show that T_n are only order optimal for 1-fold integrated Wiener Space, and is not optimal for r-fold integrated Wiener Space when $r \geqslant 2$. Hence, for the computation of integral of functions with different smoothness, T_n are not universal operator.

Key words: average error; quadrature formula; r-fold integrated; Wiener space; universal operator

(责任编辑 黄 颖)