DOI:10.11721/cqnuj20140617

M 带紧支撑对称反对称多尺度函数的构造*

毛一波[1]，张必山[2]

(1. 重庆文理学院 数学与财经学院，重庆 永川 402160；
2. 桂林电子科技大学 数学与计算科学学院，广西 桂林 541004)

摘要：本文利用已知的紧支撑对称单尺度函数，通过选取行对称或反对称的正交矩阵，分别就一元和二元情形探讨了 M 带紧支撑对称反对称多尺度函数的构造，并给出了不同伸缩因子下的构造算例。应用这种方法构造紧支撑对称反对称多尺度函数将极其容易，并可望提供更多的小波基。

关键词：紧支撑；对称反对称；单尺度函数；多尺度函数；构造

中图分类号：O174.2 **文献标志码**：A **文章编号**：1672-6693(2014)06-0077-06

自 1993 年 Goodmanet 引入多小波理论后，由于多小波较之传统的单小波可同时具有对称、紧支、正交等优点[1]，近年来已成为小波分析的研究热点，引起了许多科研工作者的关注[2-6]。特别是正交性与对称性在实际应用中具有更重要的作用，从而紧支撑对称正交多小波的构造具有更深远的意义。多小波同单小波一样也是通过其对应的尺度函数来构造的，因此多尺度函数在多小波的构造中非常重要。本文根据前人的研究，在给定一个紧支撑对称单尺度函数的基础上，通过选取适当的正交矩阵，分别就一元和二元情形探讨了 M 带紧支撑对称反对称多尺度函数的构造，并给出了相应构造算例。应用这种方法构造紧支撑对称反对称多尺度函数将极其容易，并可望提供更多的小波基。

1 一元紧支对称反对称 M 带多尺度函数的构造

设一元对称单尺度函数 $\varphi(x)$ 满足两尺度方程 $\varphi(x)=\sum\limits_{k\in\mathbf{Z}}h_k\varphi(Mx-k)$，其中 M 为正整数，令

$$\varphi_i(x)=\varphi(x-i),\ i=0,1,2,\cdots,M-1,$$

取 M 阶正交阵 $V_M=(v_{jk})_{0\leqslant j,k\leqslant M-1}$，且 V_M 的每一行为对称或反对称行向量(对行向量 $\boldsymbol{u}=(u_0,u_1,\cdots,u_m)$，若 $u_k=u_{m-k}$ 对所有 k 成立，则称 $\boldsymbol{u}$ 为对称行向量；若 $u_k=-u_{m-k}$ 对所有 k 成立，则称 $\boldsymbol{u}$ 为反对称行向量)。构造函数

$$\phi_i(x)=\sum_{j=0}^{M-1}v_{ij}\varphi_j(x)=\sum_{j=0}^{M-1}v_{ij}\varphi(x-j)\ (i=0,1,2,\cdots,M-1) \tag{1}$$

定理 1 设 $\varphi(x)$ 关于点 $x=\dfrac{a-M+1}{2}$ 对称，$\phi_i(x)$ 如(1)式定义，则 $\phi_i(x)$ 关于 $x=\dfrac{a}{2}$ 对称或反对称。

证明 $\varphi(x)$ 关于点 $x=\dfrac{a-M+1}{2}$ 对称，则

$$\varphi(a-x-j)=\varphi(x-M+1+j),\ j=0,1,2,\cdots,M-1。$$

由定义，$\phi_i(x)=\sum\limits_{j=0}^{M-1}v_{ij}\varphi(x-j)$，由于 V_M 的每一行为对称或反对称行向量，对固定的 i，不妨设 $v_{ij}=\varepsilon(i)v_{i(M-1-j)}$，其中 $\varepsilon(i)=1$ 或 -1。则

$$\phi_i(a-x)=\sum_{j=0}^{M-1}v_{ij}\varphi(a-x-j)=\sum_{j=0}^{M-1}v_{ij}\varphi(x-M+1+j)=$$

* **收稿日期**：2013-06-17 **修回日期**：2013-09-08 **网络出版时间**：2014-11-19 21:49

资助项目：重庆市教委科学技术研究项目(No. KJ111213)；重庆文理学院科研项目(No. Y2014SC86)

作者简介：毛一波，男，副教授，研究方向为小波分析理论，E-mail：mybcat2000@sina.cn

网络出版地址：http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20141119.2149.017.html

$$\sum_{j=0}^{M-1}\varepsilon(i)v_{i(M-1-j)}\varphi(x-M+1+j)=\varepsilon(i)\sum_{k=0}^{M-1}v_{ik}\varphi(x-k)=\varepsilon(i)\phi_i(x)\text{ 。}$$

因此当 $\varepsilon(i)=1$ 时,$\phi_i(x)$关于 $x=\frac{a}{2}$对称,当 $\varepsilon(i)=-1$ 时,$\phi_i(x)$关于 $x=\frac{a}{2}$反对称。 证毕

定理 2 设 $\phi_i(x)$如(1)式定义,构造函数向量 $\boldsymbol{\Phi}_M(x)=(\phi_0(x)\quad \phi_1(x)\quad \cdots \quad \phi_{M-1}(x))^{\mathrm{T}}$,设 $\boldsymbol{\Phi}_M(x)$满足两尺度方程 $\boldsymbol{\Phi}_M(x)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}H_k\boldsymbol{\Phi}_M(Mx-k)$,则有

$$\boldsymbol{H}_{Mk}=\boldsymbol{V}_M\begin{pmatrix} h_{Mk} & h_{Mk+1} & \cdots & h_{Mk+M-1}\\ h_{Mk-M} & h_{Mk-M+1} & \cdots & h_{Mk-1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ h_{Mk-(M-1)M} & h_{Mk-(M-1)M+1} & \cdots & h_{Mk-(M-1)^2}\end{pmatrix}\boldsymbol{V}_M^{\mathrm{T}},H_{Mk+i}=\boldsymbol{O}\ (i=1,2,\cdots,M-1,\text{其中 }\boldsymbol{O}\text{ 为零矩阵})\text{。}$$

证明
$$\boldsymbol{\Phi}_M(x)=\left(\sum_{j=0}^{M-1}v_{0j}\varphi(x-j)\quad \sum_{j=0}^{M-1}v_{1j}\varphi(x-j)\quad \cdots \quad \sum_{j=0}^{M-1}v_{(M-1)j}\varphi(x-j)\right)^{\mathrm{T}}=$$

$V_M\ (\varphi(x)\quad \varphi(x-1)\quad \cdots \quad \varphi(x-M+1))^{\mathrm{T}}$,则$(\varphi(x)\quad \varphi(x-1)\quad \cdots \quad \varphi(x-M+1))^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{V}_M^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}_M(x)$。

而

$$\varphi(x-j)=\sum_{n\in\mathbf{Z}}h_n\varphi(Mx-Mj-n)=\sum_{i=0}^{M-1}\sum_{l\in\mathbf{Z}}h_{Ml+i}\varphi(Mx-Mj-Ml-i)=$$

$$\sum_{i=0}^{M-1}\sum_{k\in\mathbf{Z}}h_{Mk-Mj+i}\varphi(Mx-Mk-i)=$$

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}}(h_{Mk-Mj}\quad h_{Mk-Mj+1}\quad \cdots \quad h_{Mk-Mj+M-1})\begin{pmatrix}\varphi(Mx-Mk)\\ \varphi(Mx-Mk-1)\\ \vdots\\ \varphi(Mx-Mk-M+1)\end{pmatrix}=$$

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}}(h_{Mk-Mj}\quad h_{Mk-Mj+1}\quad \cdots \quad h_{Mk-Mj+M-1})\,\mathrm{V}_M^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}_M(Mx-Mk)\text{ 。}$$

所以

$$\boldsymbol{\Phi}_M(x)=\boldsymbol{V}_M\ (\varphi(x)\quad \varphi(x-1)\quad \cdots \quad \varphi(x-M+1))^{\mathrm{T}}=$$

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}}\boldsymbol{V}_M\begin{pmatrix} h_{Mk} & h_{Mk+1} & \cdots & h_{Mk+M-1}\\ h_{Mk-M} & h_{Mk-M+1} & \cdots & h_{Mk-M+M-1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ h_{Mk-(M-1)M} & h_{Mk-(M-1)M+1} & \cdots & h_{Mk-(M-1)M+M-1}\end{pmatrix}\boldsymbol{V}_M^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}_M(Mx-Mk)$$

于是有

$$\boldsymbol{H}_{Mk}=\boldsymbol{V}_M\begin{pmatrix} h_{Mk} & h_{Mk+1} & \cdots & h_{Mk+M-1}\\ h_{Mk-M} & h_{Mk-M+1} & \cdots & h_{Mk-1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ h_{Mk-(M-1)M} & h_{Mk-(M-1)M+1} & \cdots & h_{Mk-(M-1)^2}\end{pmatrix}\boldsymbol{V}_M^{\mathrm{T}},\boldsymbol{H}_{Mk+i}=\boldsymbol{O}(i=1,2,\cdots,M-1)\text{。}$$ 证毕

2 二元紧支对称反对称 M 带多尺度函数的构造

设二元对称单尺度函数 $\varphi(x_1,x_2)$满足两尺度方程

$$\varphi(x_1,x_2)=\sum_{k_1\in\mathbf{Z}}\sum_{k_2\in\mathbf{Z}}h_{(k_1,k_2)}\varphi(Mx_1-k_1,Mx_2-k_2)\tag{2}$$

令

$$\varphi_{Mi+j}(x_1,x_2)=\varphi(x_1-i,x_2-j)\ (i,j=0,1,\cdots,M-1)\text{。}\tag{3}$$

取 M^2 阶正交阵 $\boldsymbol{V}_{M^2}=(v_{jk})_{0\leqslant j,k\leqslant M^2-1}$,且 $\boldsymbol{V}_{M^2}$ 的每一行为对称或反对称行向量。构造函数

$$\phi_i(x_1,x_2)=\sum_{j=0}^{M^2-1}v_{ij}\varphi_j(x_1,x_2)\,(i=0,1,\cdots,M^2-1) \tag{4}$$

定理 3　设 $\varphi(x_1,x_2)$关于点 $x=\left(\frac{a_1-M+1}{2},\frac{a_2-M+1}{2}\right)$对称，$\phi_i(x_1,x_2)$如(4)式定义，则 $\phi_i(x_1,x_2)$关于 $x=\left(\frac{a_1}{2},\frac{a_2}{2}\right)$对称或反对称。

证明　$\varphi(x_1,x_2)$关于点 $x=\left(\frac{a_1-M+1}{2},\frac{a_2-M+1}{2}\right)$对称，则

$$\varphi(a_1-x_1-k_1,a_2-x_2-k_2)=\varphi(x_1-M+1+k_1,x_2-M+1+k_2)。$$

$\boldsymbol{V}_{M^2}$的行向量对称或反对称，即对固定的 l，可设 $v_{lj}=\varepsilon(l)v_{l(M^2-1-j)}$，其中 $\varepsilon(l)=1$ 或 -1。于是

$$\phi_l(x_1,x_2)=\sum_{m=0}^{M^2-1}v_{lm}\varphi_m(x_1,x_2)=\sum_{i=0}^{M-1}\sum_{j=0}^{M-1}v_{l(Mi+j)}\varphi_{Mi+j}(x_1,x_2)=\sum_{i=0}^{M-1}\sum_{j=0}^{M-1}v_{l(Mi+j)}\varphi(x_1-i,x_2-j)\,。$$

$$\begin{aligned}\phi_l(a_1-x_1,a_2-x_2)&=\sum_{i=0}^{M-1}\sum_{j=0}^{M-1}v_{l(Mi+j)}\varphi(a_1-x_1-i,a_2-x_2-j)=\\&\sum_{i=0}^{M-1}\sum_{j=0}^{M-1}v_{l(Mi+j)}\varphi(x_1-M+1+i,x_2-M+1+j)=\\&\sum_{i=0}^{M-1}\sum_{j=0}^{M-1}\varepsilon(l)v_{l(M^2-1-Mi-j)}\varphi(x_1-M+1+i,x_2-M+1+j)=\\&\sum_{\tilde{i}=0}^{M-1}\sum_{\tilde{j}=0}^{M-1}\varepsilon(l)v_{l(M\tilde{i}+\tilde{j})}\varphi(x_1-\tilde{i},x_2-\tilde{j})=\varepsilon(l)\phi_l(x_1,x_2)\,。\end{aligned}$$

因此当 $\varepsilon(l)=1$ 时，$\phi_l(x_1,x_2)$关于 $x=\left(\frac{a_1}{2},\frac{a_2}{2}\right)$对称，当 $\varepsilon(l)=-1$ 时，$\phi_l(x_1,x_2)$关于 $x=\left(\frac{a_1}{2},\frac{a_2}{2}\right)$反对称。

证毕

定理 4　设 $\varphi(x_1,x_2)$满足两尺度方程式(2)，$\phi_l(x_1,x_2)$如(4)式定义，构造函数向量

$$\boldsymbol{\Phi}_M(x_1,x_2)=(\phi_0(x_1,x_2)\quad\phi_1(x_1,x_2)\quad\cdots\quad\phi_{M^2-1}(x_1,x_2))^{\mathrm{T}},$$

设 $\boldsymbol{\Phi}_M(x_1,x_2)$满足两尺度方程

$$\boldsymbol{\Phi}_M(x_1,x_2)=\sum_{k_1\in\mathbf{Z}}\sum_{k_2\in\mathbf{Z}}H_{(k_1,k_2)}\boldsymbol{\Phi}_M(Mx_1-k_1,Mx_2-k_2),$$

记 $U_{(k_1,k_2)}=(u_{l,m}^{(k_1,k_2)})_{0\leqslant l,m\leqslant M^2-1}$，$l=Mi+j$，$m=Mi_0+j_0$，$u_{l,m}^{(Mk_1,Mk_2)}=h_{(Mk_1-Mi+i_0,Mk_2-Mj+j_0)}$，有

$$\boldsymbol{H}_{(Mk_1,Mk_2)}=\boldsymbol{V}_{M^2}\boldsymbol{U}_{(Mk_1,Mk_2)}\boldsymbol{V}_{M^2}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{H}_{(Mk_1+\alpha,Mk_2+\beta)}=\boldsymbol{O}\ (\alpha^2+\beta^2\neq0,0\leqslant\alpha,\beta\leqslant M-1)。$$

证明

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi}_M(x_1,x_2)&=(\phi_0(x_1,x_2)\quad\phi_1(x_1,x_2)\quad\cdots\quad\phi_{M^2-1}(x_1,x_2))^{\mathrm{T}}=\\&\left(\sum_{m=0}^{M^2-1}v_{0m}\varphi_m(x_1,x_2)\quad\sum_{m=0}^{M^2-1}v_{1m}\varphi_m(x_1,x_2)\quad\cdots\quad\sum_{m=0}^{M^2-1}v_{(M^2-1)m}\varphi_m(x_1,x_2)\right)^{\mathrm{T}}=\\&\boldsymbol{V}_{M^2}(\varphi_0(x_1,x_2)\quad\varphi_1(x_1,x_2)\quad\cdots\quad\varphi_{M^2-1}(x_1,x_2))^{\mathrm{T}}\\&(\varphi_0(x_1,x_2)\quad\varphi_1(x_1,x_2)\quad\cdots\quad\varphi_{M^2-1}(x_1,x_2))^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{V}_{M^2}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}_M(x_1,x_2)\,。\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}\varphi_{Mi+j}(x_1,x_2)&=\varphi(x_1-i,x_2-j)=\sum_{\tilde{k}_1\in\mathbf{Z}}\sum_{\tilde{k}_2\in\mathbf{Z}}h_{(\tilde{k}_1,\tilde{k}_2)}\varphi(Mx_1-Mi-\tilde{k}_1,Mx_2-Mj-\tilde{k}_2)=\\&\sum_{l_1\in\mathbf{Z}}\sum_{l_2\in\mathbf{Z}}\sum_{i_0=0}^{M-1}\sum_{j_0=0}^{M-1}h_{(Ml_1+i_0,Ml_2+j_0)}\varphi(Mx_1-Mi-Ml_1-i_0,Mx_2-Mj-Ml_2-j_0)=\\&\sum_{k_1\in\mathbf{Z}}\sum_{k_2\in\mathbf{Z}}\sum_{i_0=0}^{M-1}\sum_{j_0=0}^{M-1}h_{(Mk_1-Mi+i_0,Mk_2-Mj+j_0)}\varphi_{Mi_0+j_0}(Mx_1-Mk_1,Mx_2-Mk_2)=\\&\sum_{k_1\in Z}\sum_{k_2\in Z}(h_{(Mk_1-Mi,Mk_2-Mj)},h_{(Mk_1-Mi,Mk_2-Mj+1)},\cdots,h_{(Mk_1-Mi,Mk_2-Mj+M-1)},\\&h_{(Mk_1-Mi+1,Mk_2-Mj)},h_{(Mk_1-Mi+1,Mk_2-Mj+1)},\cdots,h_{(Mk_1-Mi+1,Mk_2-Mj+M-1)},\cdots,\\&h_{(Mk_1-Mi+M-1,Mk_2-Mj)},h_{(Mk_1-Mi+M-1,Mk_2-Mj+1)},\cdots,h_{(Mk_1-Mi+M-1,Mk_2-Mj+M-1)})\cdot\end{aligned}$$

$(\varphi_0(Mx_1-Mk_1,Mx_2-Mk_2),\varphi_1(Mx_1-Mk_1,Mx_2-Mk_2),\cdots,\varphi_{M^2-1}(Mx_1-Mk_1,Mx_2-Mk_2))^{\mathrm{T}}$

所以

$$\boldsymbol{\Phi}_M(x_1,x_2)=\boldsymbol{V}_{M^2}\left(\varphi_0(x_1,x_2)\quad \varphi_1(x_1,x_2)\quad \cdots \quad \varphi_{M^2-1}(x_1,x_2)\right)^{\mathrm{T}}=$$
$$\sum_{k_1\in\mathbf{Z}}\sum_{k_2\in\mathbf{Z}}\boldsymbol{V}_{M^2}\boldsymbol{U}_{(Mk_1,Mk_2)}V_{M^2}^{T}\boldsymbol{\Phi}_M(Mx_1-Mk_1,Mx_2-Mk_2)。$$

从而

$$\boldsymbol{H}_{(Mk_1,Mk_2)}=\boldsymbol{V}_{M^2}U_{(Mk_1,Mk_2)}\boldsymbol{V}_{M^2}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{H}_{(Mk_1+\alpha,Mk_2+\beta)}=\boldsymbol{O}\ (\alpha^2+\beta^2\neq 0,0\leqslant\alpha,\beta\leqslant M-1)。$$ 证毕

3 构造算例

3.1 一元情形

对 $M=3$,取尺度函数 $\varphi(x)$,它满足两尺度方程 $\varphi(x)=\sum_{k=0}^{8}h_k\varphi(3x-k)$,其中

$$h_0=h_8=-\frac{1}{81},h_1=h_7=-\frac{4}{81},h_2=h_6=\frac{8}{81},h_3=h_5=\frac{20}{81},h_4=\frac{35}{81},h_k=0(k<0,\text{或 }k>9)。$$

$\varphi(x)$关于点 $x=2$ 对称,支撑于[0,4],并有正交的整平移[7]。取3阶正交阵

$$V_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

定义

$$\phi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{3}}[\varphi_0(x)+\varphi_1(x)+\varphi_2(x)],$$
$$\phi_1(x)=\frac{1}{\sqrt{6}}[\varphi_0(x)-2\varphi_1(x)+\varphi_2(x)],$$
$$\phi_2(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}[\varphi_0(x)-\varphi_2(x)],$$

由定理1知 $\phi_0(x)$,$\phi_1(x)$关于 $x=3$ 对称,而 $\phi_2(x)$关于 $x=3$ 反对称。

设 $\boldsymbol{\Phi}_3(x)=\left(\phi_0(x)\quad \phi_1(x)\quad \phi_2(x)\right)^{\mathrm{T}}$,则 $\boldsymbol{\Phi}_3(x)$为3带对称反对称3重多尺度函数,且满足两尺度方程 $\boldsymbol{\Phi}_3(x)=\sum_{k=0}^{4}\boldsymbol{H}_{3k}\boldsymbol{\Phi}_3(3x-3k)$,其中

$$\boldsymbol{H}_0=\boldsymbol{V}_3\begin{pmatrix}h_0 & h_1 & h_2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\boldsymbol{V}_3^{\mathrm{T}},\boldsymbol{H}_3=\boldsymbol{V}_3\begin{pmatrix}h_3 & h_4 & h_5\\ h_0 & h_1 & h_2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\boldsymbol{V}_3^{\mathrm{T}},\boldsymbol{H}_6=\boldsymbol{V}_3\begin{pmatrix}h_6 & h_7 & h_8\\ h_3 & h_4 & h_5\\ h_0 & h_1 & h_2\end{pmatrix}\boldsymbol{V}_3^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{H}_9=\boldsymbol{V}_3\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ h_6 & h_7 & h_8\\ h_3 & h_4 & h_5\end{pmatrix}\boldsymbol{V}_3^{\mathrm{T}},\boldsymbol{H}_{12}=\boldsymbol{V}_3\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ h_6 & h_7 & h_8\end{pmatrix}\boldsymbol{V}_3^{\mathrm{T}}。$$

3.2 二元情形

为简便记,考虑 $M=2$ 情形。取关于点(0,0)对称的紧支单尺度函数 $\varphi(x_1,x_2)$,它满足两尺度方程[8]:

$$\varphi(x_1,x_2)=\sum_{k_1=-3}^{3}\sum_{k_2=-1}^{1}h_{(k_1,k_2)}\varphi(2x_1-k_1,2x_2-k_2),$$

其中

$$h_{(-3,1)}=h_{(3,-1)}=h_{(-2,0)}=h_{(2,0)}=h_{(-2,1)}=h_{(2,-1)}=h_{(-1,-1)}=h_{(1,1)}=0,h_{(0,0)}=1,$$

其余 $h_{(k_1,k_2)}=\frac{1}{4}$。

取四阶正交阵

$$\boldsymbol{V}_4=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&-1&1\\1&-1&1&-1\end{pmatrix},$$

令

$$\phi_0(x_1,x_2)=\frac{1}{2}[\varphi_0(x_1,x_2)+\varphi_1(x_1,x_2)+\varphi_2(x_1,x_2)+\varphi_3(x_1,x_2)],$$

$$\phi_1(x_1,x_2)=\frac{1}{2}[\varphi_0(x_1,x_2)+\varphi_1(x_1,x_2)-\varphi_2(x_1,x_2)-\varphi_3(x_1,x_2)],$$

$$\varphi_2(x_1,x_2)=\frac{1}{2}[\phi_0(x_1,x_2)-\phi_1(x_1,x_2)-\phi_2(x_1,x_2)+\phi_3(x_1,x_2)],$$

$$\phi_3(x_1,x_2)=\frac{1}{2}[\varphi_0(x_1,x_2)-\varphi_1(x_1,x_2)+\varphi_2(x_1,x_2)-\varphi_3(x_1,x_2)],$$

由定理 3,$\phi_0(x_1,x_2)$和 $\phi_2(x_1,x_2)$关于$\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$对称,而 $\phi_1(x_1,x_2)$和 $\phi_3(x_1,x_2)$关于$\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$反对称。

设 $\boldsymbol{\Phi}_2(x_1,x_2)=\left(\phi_0(x_1,x_2)\quad\phi_1(x_1,x_2)\quad\phi_2(x_1,x_2)\quad\phi_3(x_1,x_2)\right)^{\mathrm{T}}$,则 $\boldsymbol{\Phi}_2(x_1,x_2)$为 2 带对称反对称 4 重多尺度函数,且满足两尺度方程 $\boldsymbol{\Phi}_2(x_1,x_2)=\sum\limits_{k_1=-1}^{2}\sum\limits_{k_2=-1}^{1}H_{(2k_1,2k_2)}\boldsymbol{\Phi}_2(2x_1-2k_1,2x_2-2k_2)$。利用定理 4 可计算出相应的系数矩阵为

$$\boldsymbol{H}_{(0,0)}=\boldsymbol{V}_4\begin{pmatrix}4&1&1&0\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}\boldsymbol{V}_4^{\mathrm{T}},\boldsymbol{H}_{(2,0)}=\boldsymbol{V}_4\begin{pmatrix}0&1&1&1\\0&0&0&0\\4&1&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{V}_4^{\mathrm{T}},\boldsymbol{H}_{(-2,0)}=\boldsymbol{V}_4\begin{pmatrix}0&0&1&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{V}_4^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{H}_{(4,0)}=\boldsymbol{V}_4\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\boldsymbol{V}_4^{\mathrm{T}},\boldsymbol{H}_{(0,2)}=\boldsymbol{V}_4\begin{pmatrix}0&0&0&0\\4&1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}\boldsymbol{V}_4^{\mathrm{T}},\boldsymbol{H}_{(0,-2)}=\boldsymbol{V}_4\begin{pmatrix}0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\boldsymbol{V}_4^{\mathrm{T}},$$

其余 $\boldsymbol{H}_{(2k_1,2k_2)}=\boldsymbol{O}$。

4 结论

从紧支对称的单尺度函数出发,分别对一元情形和多元情形的 M 带尺度函数进行研究,通过选择行对称反对称的正交阵,可以方便地构造出紧支对称的多尺度函数,从而为构造相应的多小波提供了依据。从上述所讨论的情形来看,二元情形是一元的推广,因此读者还可以类似研究一般高维 M 带对称反对称多尺度函数的构造。限于篇幅,不再赘述。

参考文献:

[1] Gernonimo J, Hardin D P, Massopust A P. Fractal functions and wavelet expansions based in several scaling function[J]. J Approx Theory,1994,78: 373-401.

[2] 吴国昌,田新现,李登峰.对称反对称复合伸缩多小波的构造[J].数学学报, 2011, 54(5):731-738.
Wu G C,Tian X X,Li D F. The construction of symmetric or antisymmetric multiwavele ts with composite dilations [J]. Actam Mathematical Sincia:Chinese Series,2011,54(5):731-738.

[3] 杨守志,李尤发.对称的高逼近阶多小波的构造[J].中国科学 A 辑,2009,39(6): 709-718.
Yang S Z,Li Y F. Construction of symmetric multiwavelets with high approximation order[J]. Science in China:Series A,2009,39(6):709-718.

[4] 李尤发,杨守志,覃韬.多小波采样定理的拓展[J].数学学报,2012,55(4):577-588.
Li Y F,Yang S Z,Qin T. Extension of multiwavelet sampling theorem[J]. Actam Mathematical Sincia:Chinese Se-

ries,2012, 55(4):577-588.

[5] 冯阿芳,张新,邓彩霞.紧支撑对称正交多小波的构造[J].哈尔滨理工大学学报,2009(3):75-78.
Feng A F,Zhang X, Deng C X. Construction of compactly supported symmetric orthonormal multiwavelet[J]. Journal of Harbin University of Science and Technology,2009(3):75-78.

[6] 吕军,王刚.紧支撑对称反对称双向多小波的构造[J].山西师范大学学报:自然科学版,2012(2): 17-24。
LÜ J,Wang G. Construction of compactly supported symmetric-antisymmetric two direction multiwavelet[J]. Journal of Shanxi Normal University:Natural Science Edition,2012(2):17-24.

[7] 黄达人,毕宁,孙欣彧.多进制小波分析[M].浙江:浙江大学出版社,2001.
Huang D R,Bi L,Sun X Y. Multi-band wavelet analysis [M]. Zhejiang:Zhejiang University Press, 2001.

[8] 谢长珍.二维插值对称小波的构造[J].宁夏大学学报:自然科学版,2005(4):303-305.
Xie C Z. Construction of two dimensional symmetric interpolation wavelets[J]. Journal of Ningxia University:Natural Science Edition, 2005(4):303-305.

Construction of Compactly Supported Symmetric-Antisymmetric Multiscaling Function with Band M

MAO Yibo[1], ZHANG Bishan[2]

(1. Institute of Mathematics and Economics, Chongqing University of Arts and Sciences, Yongchuan Chongqing 402160;
2. School of Mathematics and Computing Sciences of Guilin University of Electronic technology, Guilin Guangxi 541004, China)

Abstract: By selecting an symmetric or antisymmetric unitary matrix based row vector, this paper investigates construction of compactly supported symmetric-antisymmetric multiscaling function with band M in one dimension and two-dimension. Two examples about construction of multiscaling function are also given. It is easy to construct multiscaling function and corresponding multi-wavelet bases by previous method.

Key words: compactly supported; symmetric-antisymmetric; single scaling function; multi-scaling function; construction

(责任编辑 游中胜)