

# 时滞 Lurie 复杂网络与网络间的混沌同步\*

毛北行, 王东晓

(郑州航空工业管理学院 数理系, 郑州 450015)

**摘要:**自 Pecora 和 Carroll 提出混沌系统的完全同步方法以来,混沌同步研究取得了巨大的进展,由于混沌同步在工程技术上的重要价值和较广阔的应用前景,它一直是非线性科学领域的研究热点问题之一。本文研究了时滞 Lurie 复杂网络之间的混沌同步问题,通过设计适当的控制输入,不但实现了两个时滞 Lurie 复杂网络之间的混沌同步,而且网络内部节点之间的耦合强度也被同时确定下来。数值算例说明了该方法的有效性。

**关键词:**复杂网络;Lurie 系统;混沌同步

**中图分类号:**O482.4

**文献标志码:**A

**文章编号:**1672-6693(2014)06-0083-04

混沌同步一直是非线性科学领域的研究热点问题之一,自 Pecora 和 Carroll 于 20 世纪 90 年代提出混沌系统的完全同步方法以来,混沌同步研究取得了巨大的进展。近年来,混沌同步的应用从物理学迅速扩展到自动化控制以及复杂网络同步控制。

由于复杂网络的同步性能有着广泛的应用价值,它逐步成为复杂网络理论研究的重要分支,到目前为止,关于网络同步的报道主要集中在网络内部各节点之间的混沌同步,其节点的状态方程可以是时间混沌系统,也可以是时空混沌系统,这种同步称为内同步<sup>[1-8]</sup>。然而,现实中存在着各种拓扑结构等价或者不等价的复杂网络,这些网络和网络之间往往也需要进行同步控制。例如利用激光系统进行远程通讯时,若干个激光系统作为中继系统构成的拓扑结构等价或者不等价的网络和网络之间信号的同步转换。这种网络与网络之间的同步称为外同步<sup>[9]</sup>,目前这种研究的相关报道相对较少。张檬、吕翎等研究了结构与参量不确定的网络与网络之间的混沌同步问题,但讨论的不是时滞系统,而网络时滞现象广泛存在。另一方面,Lurie 系统中包含控制系统中的多种非线性环节,能够概括工程问题中的许多实际问题。本文研究了时滞 Lurie 复杂网络之间的混沌同步问题,通过设计适当的控制输入,不但实现了两个时滞 Lurie 复杂网络之间的混沌同步,而且网络内部节点之间的耦合强度也被同时确定下来,数值算例说明了该方法的有效性。

## 1 主要结果

考虑如下时滞 Lurie 系统构成的复杂网络

$$\dot{x}_i(t) = \mathbf{A}x_i(t) + f(\mathbf{C}x_i(t)) + \alpha_i \sum_{j=1}^N b_{ij}x_j(t - \tau), \quad (1)$$

其中  $i=1,2,\dots,N$ ,  $\mathbf{A}, \mathbf{C}$  为适当维数的常数矩阵,  $\alpha_i$  是网络内部节点之间的耦合强度,  $b_{ij}$  是表示网络拓扑结构的耦合矩阵  $\mathbf{B}$  的矩阵元。

将(1)式描述的 Lurie 复杂网络作为目标网络,受控的响应网络取下列形式

$$\dot{y}_i(t) = \mathbf{A}y_i(t) + f(\mathbf{C}y_i(t)) + \beta_i \sum_{j=1}^N b_{ij}y_j(t - \tau) + u_i(t), \quad (2)$$

其中  $i=1,2,\dots,N$ ,  $\beta_i$  是响应网络内部节点之间的待定的耦合强度,  $u_i$  为控制输入。

\* 收稿日期:2013-05-03 修回日期:2013-07-04 网络出版时间:2014-11-19 21:49

资助项目:国家自然科学基金(No. 51072184);国家自然科学基金数学天元基金(No. 11226337)

作者简介:毛北行,男,副教授,研究方向为切换系统与混沌同步,E-mail: bxmao329@163.com

网络出版地址: <http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20141119.2149.018.html>

为了使响应网络同步于目标网络,定义两个网络节点状态变量之间的误差为

$$e_i(t) = y_i(t) - x_i(t), \quad (3)$$

则误差随时间的演化关系为

$$\dot{e}_i(t) = \dot{y}_i(t) - \dot{x}_i(t) = \mathbf{A}e_i(t) + f(\mathbf{C}y_i(t)) - f(\mathbf{C}x_i(t)) + \beta_i \sum_{j=1}^N b_{ij}y_j(t-\tau) - \alpha_i \sum_{j=1}^N b_{ij}x_j(t-\tau) + u_i(t).$$

**假设 1**  $\|f(\mathbf{C}y_i(t)) - f(\mathbf{C}x_i(t))\| \leq \eta_i \|\mathbf{C}(y_i(t) - x_i(t))\|$ ,  $\eta_i$  为大于零的常数。

**定理 1** 若满足矩阵不等式

$$\Psi = \begin{bmatrix} \mathbf{A} + \eta_i \mathbf{C} - (\rho_i - 1)\mathbf{I}_N & \frac{1}{2}\alpha_i \mathbf{B} \\ \frac{1}{2}\alpha_i \mathbf{B}^T & -\mathbf{I}_N \end{bmatrix} < 0 \quad (4)$$

设计控制输入

$$u_i(t) = -\hat{\beta}_i \sum_{j=1}^N b_{ij}y_j(t-\tau) - \rho_i e_i(t), \quad (5)$$

其中  $\rho_i$  为调控参量。响应网络中待定的耦合强度  $\beta_i$  的自适应律

$$\dot{\hat{\beta}}_i = [(\beta_i - \hat{\beta}_i - \alpha_i) \sum_{j=1}^N b_{ij}y_j(t-\tau) \times (\beta_i - \hat{\beta}_i - \alpha_i)^{-1}]^T e_i(t), \quad (6)$$

则两个时滞 Lurie 复杂网络(1)与(2)是混沌同步的。

**证明** 构造 Lyapunov 函数

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N e_i^T(t) e_i(t) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\beta_i - \hat{\beta}_i - \alpha_i)^T (\beta_i - \hat{\beta}_i - \alpha_i) + \sum_{i=1}^N \int_{t-\tau}^t e_i^T(s) e_i(s) ds,$$

则  $V$  的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \sum_{i=1}^N e_i^T(t) [\mathbf{A}e_i(t) + f(\mathbf{C}y_i(t)) - f(\mathbf{C}x_i(t)) + \beta_i \sum_{j=1}^N b_{ij}y_j(t-\tau) - \alpha_i \sum_{j=1}^N b_{ij}x_j(t-\tau) + u_i(t)] - \\ & \sum_{i=1}^N \dot{\hat{\beta}}_i (\beta_i - \hat{\beta}_i - \alpha_i) + \sum_{i=1}^N e_i^T(t) e_i(t) - \sum_{i=1}^N e_i^T(t-\tau) e_i(t-\tau). \end{aligned}$$

由  $\dot{\hat{\beta}}_i = [(\beta_i - \hat{\beta}_i - \alpha_i) \sum_{j=1}^N b_{ij}y_j(t-\tau) \times (\beta_i - \hat{\beta}_i - \alpha_i)^{-1}]^T e_i(t)$  得到

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \sum_{i=1}^N e_i^T(t) [\mathbf{A}e_i(t) + f(\mathbf{C}y_i(t)) - f(\mathbf{C}x_i(t)) + \hat{\beta}_i \sum_{j=1}^N b_{ij}y_j(t-\tau) + \alpha_i \sum_{j=1}^N b_{ij}e_j(t-\tau) + u_i(t)] + \\ & \sum_{i=1}^N e_i^T(t) e_i(t) - \sum_{i=1}^N e_i^T(t-\tau) e_i(t-\tau). \end{aligned}$$

设计控制输入  $u_i(t) = -\hat{\beta}_i \sum_{j=1}^N b_{ij}y_j(t-\tau) - \rho_i e_i(t)$ , 根据前面假设 1, 很容易得到

$$\dot{V} \leq \sum_{i=1}^N e_i^T \{ [\mathbf{A} + \eta_i \mathbf{C} - (\rho_i - 1)\mathbf{I}_N] e_i(t) + \alpha_i \sum_{j=1}^N b_{ij}e_j(t-\tau) \} - \sum_{i=1}^N e_i^T(t-\tau) e_i(t-\tau).$$

因为有以下式成立

$$\sum_{i=1}^N e_i^T(t) \cdot \alpha_i \sum_{j=1}^N b_{ij}e_j(t-\tau) = \alpha_i \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N \left[ \frac{b_{ij}}{2} e_i^T(t) e_j(t-\tau) + \frac{b_{ji}}{2} e_j^T(t-\tau) e_i(t) \right] + \alpha_i \sum_{i=1}^N b_{ii} e_i^T(t) e_i(t-\tau). \quad (7)$$

所以  $\dot{V} \leq \begin{bmatrix} \xi \\ \zeta \end{bmatrix}^T \Psi \begin{bmatrix} \xi \\ \zeta \end{bmatrix} < 0$ . 其中

$$\xi = [\|e_1(t)\|, \|e_2(t)\|, \dots, \|e_N(t)\|]^T, \zeta = [\|e_1(t-\tau)\|, \|e_2(t-\tau)\|, \dots, \|e_N(t-\tau)\|]^T,$$

$\mathbf{B} = (b_{ij})_{N \times N}$  为系统的耦合矩阵。

证毕

研究了时滞 Lurie 复杂网络之间的混沌同步问题, 基于 Lyapunov 稳定性理论, 通过设计适当的控制输入, 得到了网络之间同步的充分条件, 并确定出了响应网络待定的耦合强度。

## 2 数值算例

以物理中具有调制损耗的 CO<sub>2</sub> 激光器的状态方程为例。

$$\begin{cases} \frac{dI}{dt} = 2\gamma_c I (\delta D - 1) \\ \frac{dD}{dt} = -\gamma'_s (ID + D - 1) \\ \frac{d\gamma_c}{dt} = -\gamma'_0 m \sin t \end{cases} \quad (8)$$

具有调制损耗的 CO<sub>2</sub> 激光器参量  $\delta=2, f=2\pi/\omega=78.8 \text{ kHz}, \gamma'_s=10^3 \text{ s}^{-1}, \gamma'_0=7 \times 10^7 \text{ s}^{-1}$ 。取 CO<sub>2</sub> 激光器的状态方程(8)式作为目标网络和响应网络的节点,两个网络分别取两个节点,将两个 CO<sub>2</sub> 激光器的状态方程(8)式分别按照(1)、(2)式连接构成目标网络和响应网络,其耦合矩阵采用物理过程中常见的单向星型结构,网络内部的耦合矩阵为  $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ 。

选取参数  $\alpha_i=1, \eta_i=2, \rho_i=6$  进行网络耦合连接,并对响应系统实施控制输入,仿真模拟目标网络和响应网络节点电状态变量之间的误差随时间的演化规律如图 1、图 2 所示。

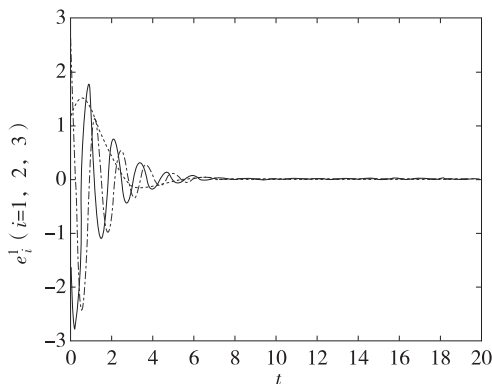


图 1 两个网络第一个节点之间的误差

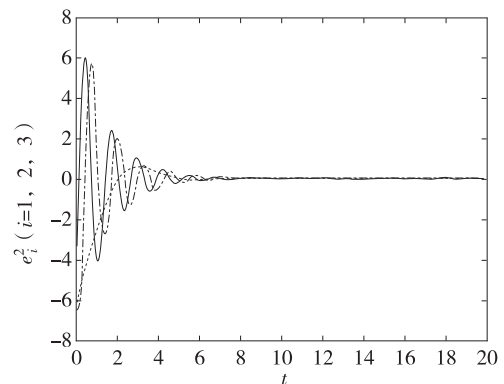


图 2 两个网络第二个节点之间的误差

从图 1、图 2 可以看出,网络在耦合连接初期,由于目标网络和响应网络各节点状态变量所取的初始值不同,因此其误差  $e_1^1 = (e_{11}, e_{12}, e_{13})^T, e_1^2 = (e_{21}, e_{22}, e_{23})^T$  随时间演化的差异十分明显,但经过一个暂态过程之后,两个网络中相对应的两个节点误差变量随时间的演化均趋于零,说明两个网络之间实现了混沌同步。

### 参考文献:

- [1] 吕翎,李纲,张檬,等. 全局耦合网络的参数辨识与时空混沌同步[J]. 物理学报,2011,60(9):5051-5056.  
Lü L, Li G, Zhang M, et al. Parameter identification and synchronization of spatiotemporal chaos in globally coupled network[J]. Acta phys Sin, 2011, 60(9): 5051-5056.
- [2] 吕翎,孟乐,郭丽,等. 激光时空混沌模型的加权网络投影同步[J]. 物理学报,2011,60(3):5061-5066.  
Lü L, Meng L, Guo L, et al. Projective synchronization of weighed network in a laser spationemporal chaos modle [J]. Acta phys Sin, 2011, 60(3): 5061-5066.
- [3] 吕翎,李纲,孟乐,等. 单项链式网络的激光混沌同步[J]. 中国激光,2010,37(10):2533-2536.  
Lü L, Li G, Meng L, et al. Synchronization of chaotic laser in unidirectional chain-connectionnetwork[J]. Chinese Journal of Lasers, 2010, 37(10): 2533-2536.
- [4] 吕翎,李雨珊,韦琳玲,等. 基于滑模控制法实现规则网络的混沌同步[J]. 物理学报,2012,61(12):5041-5047.  
Lü L, Li Y S, Wei L L, et al. Chaos synchronization of regular network based on sliding mode contron[J]. Acta phys Sin, 2011, 61(12): 5041-5047.
- [5] 赵岩岩,蒋国平. 一类输出耦合时延复杂动态网络故障诊断研究[J]. 物理学报,2011,60(11):2061-2066.  
Zhao Y Y, Jiang G P. Fault diagnosis for a class of output-coupling complex dynamical networks with time delay[J].

- Acta phys Sin, 2011, 60(11):2061-2066.
- [6] 郑海青, 井元伟, 刘晓平. 一类时滞加权动态复杂网络的牵制同步[J]. 东北大学学报: 自然科学版, 2010, 31(8):1065-1069.
- Zheng H Q, Jing Y W, Liu X P. Pinning synchronization of a class of weighted complex dynamical networks with time delay[J]. Journal of Northeastern University: Natural Science, 2010, 31(8):1065-1069.
- [7] 褚衍东, 李红敏, 张建刚, 等. 带有时变时滞和非线性耦合的复杂网络同步[J]. 安徽大学学报: 自然科学版, 2012, 36(2):9-14.
- Chu Y D, Li H M, Zhang J G, et al. Synchronization of nonlinear complex network with time-varying delays[J]. Journal of Anhui University: Natural Science, 2012, 36(2):9-14.
- [8] 张檬, 吕翎, 吕娜, 等. 结构与参量不确定的网络与网络之间的混沌同步[J]. 物理学报, 2012, 61(22):5081-5085.
- Zhang M, Lü L, Lü N, et al. Chaos synchronization between complex networks with uncertain structure and unknown parameters[J]. Acta phys Sin, 2012, 61(22):5081-5085.
- [9] 王绍明, 王安福. Liu 混沌系统的单状态变量控制与同步[J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2007, 31(3):285-288.
- Wang S M, Wang A F. Control and synchronization of Liu chaos system using single state variable[J]. Journal of Jiangxi Normal University: Natural Science, 2007, 31(3):285-288.

## Chaos Synchronization between Complex Networks of Time-delayed Lurie Systems

MAO Beixing, WANG Dongxiao

(Department of Mathematics and Physics, Zhengzhou Institute of Aeronautical Industry Management, Zhengzhou 450015, China)

**Abstract:** Chaos synchronization get great development since Pecaro and Carroll proposed fully Chaos synchronization approach. It is always hot research topics in the area of nonlinear science for its important merits and broad application prospects in engineering technology. Chaos synchronization between complex networks time-delayed Lurie system is studied in the paper. By designing appropriate control input, we achieved the synchronization between two complex networks of time-delayed Lurie systems. The coupling strength between the nodes are identified simultaneously in the process of synchronization. Numerical simulations example of chaotic system verify the effectiveness of the proposed method.

**Key words:** complex networks; Lurie systems; chaos synchronization

(责任编辑 黄 颖)