

基于终端滑模和自适应反馈方法的一类混沌系统稳定性分析*

邱国英, 杨德刚

(重庆师范大学 计算机信息与科学学院, 重庆 401331)

摘要:针对终端滑模和自适应反馈方法的优缺点,本文设计了一个优化组合的方案,该方案可以控制一类混沌系统实现半有限时间稳定,极大地扩展了两种方法在混沌控制领域的应用范围;通过对经典混沌 Lorenz 系统的控制并仿真,验证了其有效性和可行性。

关键词:混沌控制;Lorenz 系统;终端滑模控制;自适应反馈控制

中图分类号:TP271

文献标志码:A

文章编号:1672-6693(2014)06-0092-05

由于电子器件的延时和非线性等特点,在很多物理和动力系统中,混沌现象是一种常见而又无法避免的现象。但是非线性、混沌现象不是人们所希望看到的,而是要极力避免的,所以在理论及实际应用中,人们设计出了各种控制混沌现象的方法,以加强系统的稳定性。

在许多复杂工业过程中,由于设备的电磁特性,在系统中时滞和噪音是无法避免的。随着混沌理论的产生和发展,人们认识到这是一种只能控制而不能忽略的混沌现象。因而有必要研究如何控制混沌。

从总体上看,人们的研究主要集中在两个方面:第一,如何利用混沌学的思想来分析复杂的电气系统或电子系统,发现和证明系统中存在有混沌现象;第二,当系统中出现混沌现象时,如何对它进行控制,以满足人们的需要。

接下来本文会介绍两种经典并且发展较为成熟的混沌控制方法终端滑模^[1-3]和自适应反馈^[4-9]方法,并结合两种混沌控制方法的优劣,设计一种组合方案来实现对一类混沌系统的稳定性控制,实现两种方法的扩展应用。

滑模控制具有较好的收敛率,但其控制计算开销偏大,并且只能对耦合在滑模面上的系统状态量进行控制;而自适应反馈控制有着更强的通用性和鲁棒性,结构简单,控制开销小,但其只能实现混沌状态的渐进稳定。结合两种方法性能的优劣,本文设计了一种二者性能互补的控制方案:TSM 控制系统主元实现有限时间稳定,AFC 控制没能耦合在滑模面的系统次元实现渐进稳定,最终实现混沌系统的半有限时间稳定。在文章的最后,通过对蔡氏振荡器的实例仿真,该设计方案的控制效果可以得到充分证明。

1 准备工作

定义 1 有限时间稳定:本文中用 $x(t) \in \mathbf{R}^n$ 来表示系统状态。如果存在常数 $T > 0$,使得 $\lim_{t \rightarrow T} (\|x\|) = 0$,并且 $t \geq T, \|x(t)\| = 0$,则称系统实现有限时间稳定。

定义 2 半有限时间稳定:对于一个混沌系统来说,如果其一部分状态分量实现的是有限时间稳定,剩余部分实现的是渐进稳定,则称该系统实现的是半有限时间稳定。

引理 1^[1] 如果存在一个连续、正定的向量函数 $V(t)$ 满足如下微分不等式:

$$\dot{V}(t) \leq -cV^\tau(t), \forall t \geq t_0, V(t_0) \geq 0 \quad (1)$$

其中常数 $c > 0, 0 < \tau \leq 1$,那么对于任意给定的 $t_0, V(t)$ 满足结果 $V(t) = 0, \forall t \geq t_1$,其中 t_1 由如下公式给出

$$t_1 = t_0 + \frac{V^{1-\tau}(t_0)}{c(1-\tau)} \quad (2)$$

* 收稿日期:2013-12-23 修回日期:2014-03-20 网络出版时间:2014-11-19 21:49

资助项目:国家自然科学基金(No. 10971240);重庆市自然科学基金(No. cstc2012jjA40052;No. cstc2013jcyjA80013;No. cstc2013jcyjA0973);重庆市教委科学技术研究项目(No. KJ120615;No. KJ120630;No. KJ130611;No. KJ1400505);重庆师范大学校级基金(No. 13XLZ01;No. 201334;No. xyjg13010);重庆高校创新团队建设计划资助(No. KJTD201308)

作者简介:邱国英,男,研究方向为混沌控制等,E-mail: 706715341@qq.com;通讯作者:杨德刚,E-mail: ydg42@163.com

网络出版地址: <http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20141119.2149.020.html>

2 稳定性分析

2.1 系统结构

本文中作者针对可以组织成以下结构形式的混沌系统进行稳定性分析:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 = f_1(x_1, x_2, x_3) + \phi(u_1) \\ \dot{x}_3 = f_2(x_1, x_2, x_3) + u_2 \end{cases} \quad (3)$$

其中 $x_1 = (y_1, \dots, y_r)^T$, $x_2 = (y_{r+1}, \dots, y_s)^T$, $x_3 = (y_{s+1}, \dots, y_t)^T$, $y = (y_1, \dots, y_t)^T$ 表示系统状态分量, f_1, f_2 为 x_2, x_3 动态中的非线性部分。

本文中 TSM 控制器 $\phi(u_1)$ 控制 x_1, x_2 有限时间稳定, AFC 控制器 u_2 作为补充对剩余部分实现渐进稳定, 最后系统(3)趋于半有限时间稳定。

2.2 滑模面设计及滑模控制

对系统(3), 取出前两部分, 并且添加控制器有如下结构:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 = f_1(x_1, x_2, x_3) + \phi(u_1) \end{cases} \quad (4)$$

其中 $\phi(u_1)$ 在区域 $[\rho, \zeta]$ 中是一个连续非线性函数: $\rho u_1^2 \leq u_1 \phi(u_1) \leq \zeta u_1^2$, $\zeta \geq \rho \geq 0$ 。

一般来说, 终端滑模控制大体分为两步: 第一步, 建立非奇异的终端滑模面, 耦合系统中线性关系的状态分量; 第二步, 设计终端滑模控制器, 控制耦合在滑模面上的系统状态分量有限时间稳定。

2.2.1 终端滑膜面设计 本文中作者设计如下滑模面:

$$s = x_1 + x_2 + x_1^{\frac{q}{p}} \quad (5)$$

定理 1 在系统(4)中, 作者加入如下控制器:

$$F = \left(1 + \frac{q}{p} x_1^{\frac{q-p}{p}}\right) (A_1 x_1 + A_2 x_2) + f_1(x_1, x_2, x_3) \quad (6)$$

$$u_1 = -\frac{(\|F\| + \delta)s}{\rho \|s\|} \quad (7)$$

其中 $\delta > 0$, 那么耦合在滑模面上的系统状态分量会收敛于滑模面 $s=0$ 上。

证明 引入如下 Lyapunov 函数 V_1 :
$$V_1 = \frac{1}{2} s^T s \quad (8)$$

对以上函数沿滑模面求导, 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 = s^T \dot{s} = s^T \left[\left(1 + \frac{q}{p} x_1^{\frac{q-p}{p}}\right) (A_1 x_1 + A_2 x_2) + f_1(x_1, x_2, x_3) + \phi(u_1) \right] = \\ s^T F + s^T \phi(u_1) \leq -\delta \|s\| = -\sqrt{2} \delta V_1^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (9)$$

由引理 1 和定义 1 可得, 滑模面会在有限时间内收敛到零面。

2.2.2 滑膜控制下系统状态稳定性分析 当滑膜面收敛到零面时

$$\begin{cases} s = 0 \\ \dot{s} = 0 \end{cases} \quad (10)$$

然后

$$x_2 = -x_1 - x_1^{\frac{q}{p}} \quad (11)$$

则有如下的滑模动态系统:

$$\dot{x}_1 = (A_1 - A_2)x_1 - A_2 x_1^{\frac{q}{p}} \quad (12)$$

定理 2 对于微分方程(12), 如果存在一个正定对称矩阵 P , 满足如下条件:

$$\begin{cases} P(A_1 - A_2) + (A_1 - A_2)^T P < 0 \\ PA_2 = \text{diag}\{b_i\}, b_i > 0, i = 1, L, r \end{cases} \quad (13)$$

则系统(4)是有限时间稳定的。

证明 引入 Lyapunov 函数 V_2 :
$$V_2 = x_1^T P x_1 \quad (14)$$

其中正定对称矩阵 P 满足条件(14)。

很容易得出
$$\|x_1\| \geq \sqrt{\frac{V(x_1)}{\lambda}}, \lambda = \lambda_{\max}(P) \tag{15}$$

其中 $\lambda_{\max}(P)$ 是 P 的最大特征值。

对系统(12)求导可以得出：
$$\dot{V}_2 = 2x_1^T P \dot{x}_1 = 2x_1^T P [(A_1 - A_2)x_1 - A_2 x_1^{\frac{q}{p}}] =$$

$$x_1^T [P(A_1 - A_2) + (A_1 - A_2)^T P]x_1 - 2x_1^T P A_2 x_1^{\frac{q}{p}} \leq -2 \sum_{i=1}^r b_i (x_{1i}^2)^{\frac{q+p}{2p}} \leq -2b \|x_1\|^{\frac{q+p}{p}} \leq -\frac{2b}{\lambda^{\frac{q+p}{2p}}} V(x_1)^{\frac{q+p}{2p}}$$
 (16)

于是微分方程是指数稳定的,由引理 1 可知系统有限时间稳定,即有限时间趋于 0;通过关系(10), x_2 随着 x_1 也会趋于 0。于是作者就完成了预期目标,即控制耦合在滑模面上的系统状态分量 x_1, x_2 有限时间内稳定在平衡状态。 证毕

2.3 自适应反馈控制设计

在系统(4)有限时间收敛后,系统(3)转变为：
$$\dot{x}_3 = f(x_3) \tag{17}$$

用 x 来表示 x_3 中任意 y 。所以系统(3)中任意项可用以下形式表示：

$$\dot{x} = f(x) \tag{18}$$

定理 3 如果满足 $\|f(x)\| \leq \sum_{k=1}^m l_k \|x\|^k, l_k (k=1, \dots, m)$ 是未知的正常量,其中 $\|x\| = \max |y_i| (i = s+1, \dots, t)$ 。设计如下 AFC 控制器,添加系统的右侧：

$$u_2 = \sum_{k=1}^m \beta_k x^{2k-1} \tag{19}$$

其中自适应参数 $\beta_k (k=1, \dots, m)$ 的适应规则如下：

$$\dot{\beta}_k = - \sum_{j=1}^n \gamma_{kj} x^{2(j+k)-2} \tag{20}$$

最后,转变为如下形式的控制系统：
$$\dot{x} = f(x) + u_2 \tag{21}$$
 是渐进稳定的。

证明 引入 Lyapunov 函数 V_3 ：
$$V_3 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} x^{2j} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \frac{1}{\gamma_k} (\beta_k + L)^2 \tag{22}$$

其中参数 L 是大于 $\left[\frac{m}{2}\right] + l_{2k-1} (k=1, 2, \dots, \left[\frac{m+1}{2}\right])$ 和 $\left[\frac{m}{2}\right] + \frac{nl_{2k}^2}{4} (k=1, 2, \dots, \left[\frac{m}{2}\right])$ 的最大值的常数, $\left[\frac{m}{2}\right]$ 是不大于 $\frac{m}{2}$ 的最大整数,即对 $\frac{m}{2}$ 取整。

对 V_3 求导：

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 &= \sum_{j=1}^n x^{2j-1} \dot{x} + \sum_{k=1}^m \frac{1}{\gamma_k} (\beta_k + L) \dot{\beta}_k \leq \sum_{j=1}^n |x|^{2j-1} \sum_{k=1}^m l_k \|x\|^k - L \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n |x|^{2(j+k)-2} = \\ & \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{\left[\frac{m+1}{2}\right]} |x|^{2j-1} l_{2k-1} \|x\|^{2k-1} + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{\left[\frac{m}{2}\right]} |x|^{2j-1} l_{2k} \|x\|^{2k} - L \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m |x|^{2(j+k)-2} \leq \\ & \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{\left[\frac{m+1}{2}\right]} l_{2k-1} |x|^{2(j+k)-2} + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{\left[\frac{m}{2}\right]} |x|^{4j-2} + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \frac{l_{2k}^2}{4} |x|^{4k} - L \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m |x|^{2(j+k)-2} \leq \\ & \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{\left[\frac{m+1}{2}\right]} l_{2k-1} |x|^{2(j+k)-2} + \left[\frac{m}{2}\right] \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m |x|^{2(j+k)-2} + \frac{nl_{2k}^2}{4} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{\left[\frac{m}{2}\right]} |x|^{2(j+k)-2} - L \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m |x|^{2(j+k)-2} \leq \\ & - \sum_{k=1}^{\left[\frac{m+1}{2}\right]} \left(L - \left[\frac{m}{2}\right] - l_{2k-1} \right) \sum_{j=1}^m |x|^{2(j+k)-2} - \sum_{k=1}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \left(L - \left[\frac{m}{2}\right] - \frac{nl_{2k}^2}{4} \right) \sum_{j=1}^m |x|^{2(j+k)-2} \leq 0 \end{aligned} \tag{23}$$

所以当且仅当 $x=0, \dot{V}_3=0$, 系统的渐进稳定性得到证明。 证毕

3 实例仿真

Lorenz 系统是 1963 年美国著名气象学家 E. N. Lorenz 提出用来反映热对流不稳定的模型,即 Lorenz 系统

模型。1998 年, K. Mischaikow 和 M. Mrozek 用 Conley 指标理论和严格的计算机辅助计算方法证明了 Lorenz 系统存在混沌行为。1999 年, W. Tucker 用规范型理论和严格的数值计算方法证明了 Lorenz 吸引子的存在。

Lorenz 系统正则后的方程为^[10]:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 = cx_1 - x_1x_3 - x_2 \\ \dot{x}_3 = x_1x_2 - bx_3 \end{cases} \quad (24)$$

其中 a, b, c 为系统参数。运用 Matlab 中 Ode45 对 Lorenz 系统微分方程进行仿真, 如图 1、图 2。系统参数设定为: $a=10, b=\frac{8}{3}, c=28$, 初始条件设为: $(x_1(t_0), x_2(t_0), x_3(t_0))^T = (5, 5, 5)^T$ 。

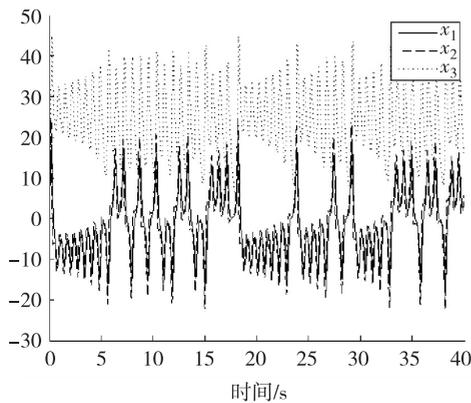


图 1 混沌状态的 Lorenz 的系统状态时序

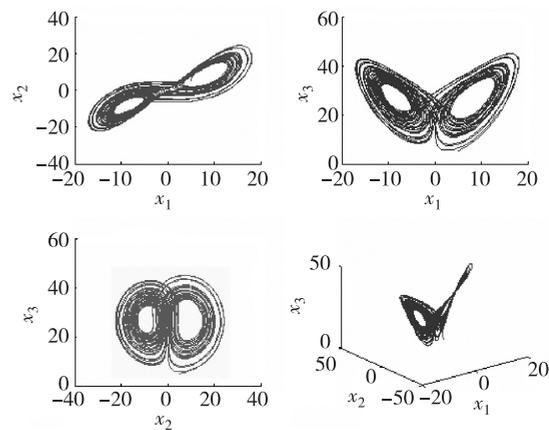


图 2 混沌状态的 Lorenz 的系统 2/3 维动态奇异吸引子

理论分析之后, 作者用本文设计的方法理论对 Lorenz 系统进行实例仿真。在(5)式中取 $p=3, q=1$ 。代入系统(4), 加入 u_2 前, Lorenz 系统仿真如图 3 所示。在 x_1, x_2 收敛之后, 在公式(24)中只剩下 $\dot{x}_3 = -0.01x_3$, 所以在公式(19)、(20)中取 $m=1, n=2, \gamma_{kj}=1$, 于是就得到了控制器 u_2 , 添加进系统(3), Lorenz 系统仿真的控制效果如图 4 所示。

从仿真结果可以看出: 对比图 1 和图 3 得到, 由 TSM 方法可以有效控制耦合在滑模面上的系统状态分量, 即系统的前两项状态, 控制它们指数收敛实现了有限时间稳定, 而第三项, 在前两项指数稳定后, 其自身满足稳定, 但其收敛率偏低; 对比图 3 和图 4 得出, AFC 控制器对剩余项状态提供了有效控制实现了渐进稳定。最终系统整体实现了半有限时间稳定, 完成了预期目标; 从图 4 中可以清晰地发现 AFC 所能实现的渐进稳定收敛率明显比 TSM 所实现的指数收敛率低。通过以上三方面比较充分实现了本文的设计思想。

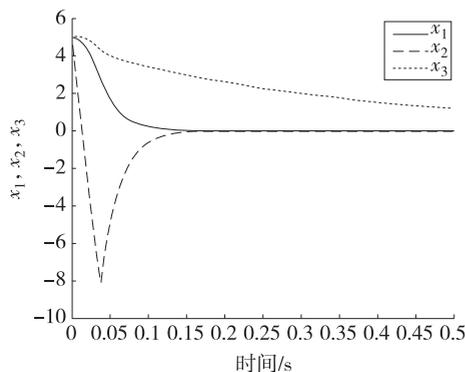


图 3 加入 TSM 控制器 $\phi(u_1)$, 系统状态动态仿真时序

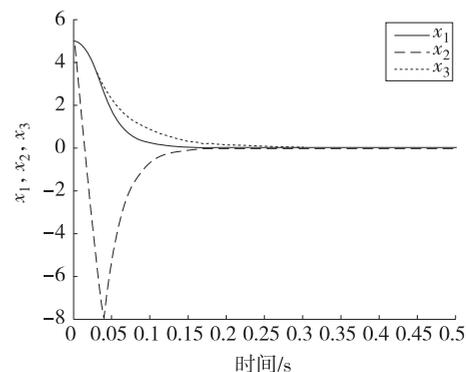


图 4 再加入 AFC 控制器 u_2 后, 系统动态仿真时序

4 结束语

两种经典方法对系统初始条件都具有较好的鲁棒性, 对系统结构都具有较好的通用性。终端滑模方法可以

对耦合在滑模面上的系统状态实现有限时间稳定,收敛率较高,效果较为明显,但是相对自适应反馈方法的控制设计,它的控制过程较为复杂,其系统计算量较大,并且只能对耦合在滑模面上的系统状态进行有限时间稳定性控制;自适应反馈控制方法具有比滑模控制更为广泛的通用性,对不同的系统结构都具有很好的适应性,对初始条件具有更好的鲁棒性,但其只能实现渐进稳定,收敛率较低。

本文中提出了一个动态滑模与自适应反馈控制相结合的新方案,来控制一类系统中线性稳定性要求较高,非线性部分要求较低的混沌系统。在控制过程中两种方法相互补充,共同完成对系统的稳定控制。TSM方法可以对系统主元实现有限时间控制,而后用 AFC 方法控制剩余状态渐进稳定,或者让其自身收敛。TSM 在该方案中起着主体、至关重要的作用,但是简单易行的 AFC 方法,起着补充、辅助作用,但也同样扩展了 TSM 在混沌控制中的应用范围。二者的相互合作补充,不仅减少了系统控制开销,也扩展了两种方法在混沌控制领域的应用范围。

本文中,对 Lorenz 系统动态混沌吸引子控制的有效仿真结果,极好地证明了文中设计方案的可行性和有效性。该方案也同样适用于许多经典混沌系统,如 Liu 混沌系统、蔡氏混沌系统等。

参考文献:

- [1] Wang H, Zhang X L, Wang X H, et al. Finite time chaos control for a class of chaotic systems with input nonlinearities via TSM scheme[J]. *Nonlinear Dyn*, 2012(69): 1941-1947.
- [2] Utkin V I. Sliding mode control design principles and applications to electric drives [J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 1993(40): 23-36.
- [3] Palm R. Sliding mode fuzzy control[C]//Proceedings of the IEEE conference on fuzzy systems. Germany: Berlin, 1992:519-526.
- [4] Guo W P, Liu D T. Adaptive control of chaos in Chua's circuit[J]. *Hindawi Publishing Corporation Mathematical Problems in Engineering*, 2011(2): 14-26.
- [5] Wang D J, Zheng Y G. Stabilizing a class of chaotic systems by using adaptive feedback control[C]//2012 International conference on applied physics and industrial engineering[S. l.]: Sciverse Science Direct Physics Procedia, 2012(24): 1922-1927.
- [6] Hong Y G, Yang G U, Linda B, et al. Global finite-time stabilization: from state feedback to output feedback[C]//Proceedings of the 39th IEEE conference on decision and control. Australia: Sydney, 2000: 2908-2913.
- [7] Dessoky M M E, Yassen M T. Adaptive feedback control for chaos control and synchronization for new chaotic dynamical system[J]. *Hindawi Publishing Corporation Mathematical Problems in Engineering*, 2012(12): 8-21.
- [8] Zhang R X, Yang S P. Stabilization of fractional-order chaotic system via a single state adaptive-feedback controller [J]. *Nonlinear Dyn*, 2012(68): 45-51.
- [9] Feki M. An adaptive feedback control of linearizable chaotic systems[J]. *Chaos Solitons and Fractals*, 2003(15): 883-890.
- [10] Yu Y B, Yu J B. Impulsive modeling and stability study on nonlinear circuits and systems[D]. Chengdu: Electronic Science and Technology University, 2008.

Stabilization of a Class of Chaotic Systems Based on TSM and AFC

QIU Guoying, YANG Degang

(College of Computer and Information Science, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: Based on the research of Terminal Sliding Mode control and Adaptive Feedback control, according to the advantages and disadvantages of two methods, this paper designed an optimization scheme to control a class of chaotic systems semifinite-time stable, greatly expanded the application scope of two methods in chaotic controlling field, finally, through the simulation of classical chaotic Lorenz systems, verified its effectiveness and feasibility.

Key words: chaos control; Lorenz system; terminal sliding mode (TSM); adaptive feedback control (AFC)

(责任编辑 游中胜)