2015 年 1 月　　重庆师范大学学报(自然科学版)　　Jan. 2015
第 32 卷 第 1 期　　Journal of Chongqing Normal University (Natural Science)　　Vol. 32 No. 1

运筹学与控制论　　DOI:10.11721/cqnuj20150103

ε-真有效解的非线性标量化*

夏远梅，张万里，赵克全
(重庆师范大学 数学学院，重庆 401331)

摘要: 本文利用基于点闭凸锥的经典非线性标量化函数 Δ_{-K} 对向量优化问题 ε-真有效解的非线性标量化性质进行了研究。首先证明了向量优化问题(VP)的 ε-真有效解蕴含标量化问题(P_y)的 $d_{\varepsilon+K}(0)$-近似解，并通过例子说明了这一结论的逆不一定成立。进一步，证明了标量化问题(P_y)的严格 β-近似解蕴含向量优化问题(VP)的 ε-真有效解，并举例说明了如果集合 $f(S)+\varepsilon+K-f(\bar{x})$ 的锥包不是闭集，这一结论不一定成立以及标量化问题(P_y)的 β-近似解不一定蕴含向量优化问题(VP)的 ε-真有效解。

关键词: 向量优化；ε-真有效解；非线性标量化

中图分类号: O221.6　　**文献标志码:** A　　**文章编号:** 1672-6693(2015)01-0012-04

向量优化问题的近似解研究是最优化理论中十分重要的研究方向。近年来，许多学者提出了各种不同类型的近似解概念[1-5]。特别地，1979 年，Kutateladze 在文献[1]中首次提出了近似解的概念。2006 年，Gutiérrez 等人在文献[2]中提出了一类新的近似解概念－$C(\varepsilon)$-(弱)有效解的概念，并研究了这类有效解的一些线性与非线性标量化性质。这类近似解统一了一些已有的近似解概念。2011 年，Chicco 等人在文献[3]中引入了改进集并利用改进集提出了 E-有效解的概念。2012 年，Gutiérrez 等人在文献[4]中进一步将改进集和 E-有效解概念推广到了一般的拓扑线性空间并研究了这类解的一些性质。进一步，Zhao 等人在文献[5]中提出了集值优化问题的弱 E-有效解的概念并研究了集值向量优化问题弱 E-有效解的一些线性标量化性质及拉格朗日乘子定理等。为了对向量优化问题的近似有效解集进行限制，2000 年，Rong 和 Ma 在文献[6]中提出了一类近似真有效解的概念—ε-真有效解，并建立了这类近似真有效解的一些线性标量化结果、拉格朗日乘子定理、鞍点定理以及对偶性结果等。2013 年，Hausdorff 实局部凸拓扑向量空间中，Zhao 和 Yang 在文献[7]中提出了 E-Benson 真有效性的概念并建立了 E-Benson 真有效性的一些线性标量化定理和拉格朗日乘子定理等。

受文献[6,8]等研究工作的启发，本文利用一类非线性标量化函数建立了 ε-真有效解的一些非线性标量化结果。

1 预备知识

设 X 是线性空间，Y 是实赋范线性空间。设 $A\subset Y$，$\mathrm{int}\,A$，$\mathrm{cl}\,A$，∂A 和 $Y\backslash A$ 分别表示 A 的拓扑内部、闭包、边界和补集。A 的生成锥 $\mathrm{cone}\,A=\{\lambda a\mid a\in A,\lambda\geqslant 0\}$。如果锥 A 满足 $A\cap(-A)=\{0\}$，则称 A 是点的。设 K 是 Y 中具有非空拓扑内部的点闭凸锥。对任意的 $x,y\in Y$，定义 $x\in K,y\Leftrightarrow y-x\in K$。

考虑下面的向量优化问题：(VP) $\min\limits_{x\in S} f(x)$，其中 $f:X\to Y$，$S\subset X$ 且 $S\neq\varnothing$。

定义 1[6]　设 K 是 Y 中的点闭凸锥，$\varepsilon\in K$。如果 $\bar{x}\in S$ 满足

$$\mathrm{cl\,cone}\,(f(S)+\varepsilon+K-f(\bar{x})\cap(-K))=\{0\},$$

则称 $\bar{x}$ 是问题(VP)的 ε-真有效解。问题(VP)的 ε-真有效解全体记为 $\varepsilon\text{-}PE(f(S),K)$。

考虑下面的标量化问题：(P) $\min\limits_{x\in Z}\varphi(x)$，其中 $\varphi:X\to\mathbf{R}$，$Z\subset X$ 且 $Z\neq\varnothing$。设 $\varepsilon\geqslant 0$ 且 $\bar{x}\in Z$。若对任意的 $x\in S$，$\varphi(x)\geqslant\varphi(\bar{x})-\varepsilon$，则称 $\bar{x}$ 为问题(P)的一个 ε-近似解。若对任意 $x\in S$，$\varphi(x)>\varphi(\bar{x})-\varepsilon$，则称 $\bar{x}$ 为问题(P)的严

* 收稿日期：2014-02-01　修回日期：2014-09-10　网络出版时间：2015-1-7 16:04
资助项目：国家自然科学基金(No. 11301574)；第二批重庆市高等学校青年骨干教师资助计划；重庆师范大学博士基金(No. 13XLB029)
作者简介：夏远梅，女，研究方向为向量优化理论，E-mail：mathymxia@163.com；通讯作者：赵克全，E-mail：kequanz@163.com
网络出版地址：http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20150107.1604.003.html

格 ε-近似解。问题(P)的所有 ε-近似解和严格 ε-近似解分别记为 AMin(φ,ε)和 SAMin(φ,ε)。

函数 $\Delta_A:Y\to\mathbf{R}\cup\{\pm\infty\}$定义为 $\Delta_A(y)=d_A(y)-d_{Y\setminus A}(y)$，其中 $d_\varnothing(y)=+\infty$，$d_A(y)=\inf\limits_{z\in A}\|z-y\|$。

引理 1[8]　设 A 是 Y 中的真子集，则：i) 若 $y\in\operatorname{int}A$，$\Delta_A(y)<0$；若 $y\in\partial A$，$\Delta_A=0$；若 $y\notin\operatorname{cl}A$，$\Delta_A(y)>0$；ii) 若 A 是凸集，Δ_A 是凸函数；iii) 若 A 是锥，Δ_A 是正齐次函数。

本文考虑下面的标量化问题：$(\mathrm{P}_y)\ \min\limits_{x\in S}\Delta_{-K}(f(x)-y)$，其中 $y\in Y$。标量化问题(P_y)的 ε-近似解全体和严格 ε-近似解全体分别记为 AMin$(\Delta_{-K}f(x)-y,\varepsilon)$和 SAMin$(\Delta_{-K}f(x)-y,\varepsilon)$。

2 ε-真有效解的 Δ_{-K} 函数标量化

本部分建立了问题(VP)的 ε-真有效解的一些非线性标量化结果。

定理 1　设 $K\subset Y$ 是点闭凸锥，$\varepsilon\in Y$，则

$$\bar{x}\in\varepsilon-PE(f(S),K)\Rightarrow\bar{x}\in\mathrm{AMin}(\Delta_{-K}f(x)-f(\bar{x}),d_{\varepsilon+K}(0))。$$

证明　由 $\bar{x}\in\varepsilon-PE(f(S),K)$可知$(f(S)+\varepsilon+K-f(\bar{x}))\cap(-K\setminus\{0\})=\varnothing$。即对任意的 $x\in S$，任意的 $k\in K$，$f(x)+\varepsilon+k-f(\bar{x})\notin-K\setminus\{0\}$。因为 $0\in\partial K$，所以

$$d_{Y\setminus(-K)}(f(x)+\varepsilon+k-f(\bar{x}))=d_{Y\setminus(-K\setminus\{0\})}(f(x)+\varepsilon+k-f(\bar{x}))=0。$$

从而对任意的 $x\in S$ 和任意的 $k\in K$，

$$\begin{aligned}\Delta_{-K}(f(x)+\varepsilon+k-f(\bar{x}))&=d_{-K}(f(x)+\varepsilon+k-f(\bar{x}))-d_{Y\setminus -K}(f(x)+\varepsilon+k-f(\bar{x}))=\\&d_{-K}(f(x)+\varepsilon+k-f(\bar{x}))\geqslant0。\end{aligned}\tag{1}$$

由 K 是凸锥及(1)式、引理 1 可得对任意的 $x\in S$ 和任意的 $k\in K$，

$$\Delta_{-K}(f(x)-f(\bar{x}))\geqslant\Delta_{-K}(f(x)+\varepsilon+k-f(\bar{x}))-\Delta_{-K}(\varepsilon+k)\geqslant-\Delta_{-K}(\varepsilon+k)。$$

因此

$$\Delta_{-K}(f(x)-f(\bar{x}))\geqslant-\inf_{k\in K}\Delta_{-K}(\varepsilon+k),\ \forall x\in S。\tag{2}$$

下面计算$-\inf\limits_{k\in K}\Delta_{-K}(\varepsilon+k)$。由 K 是点凸锥及 $k\in K$ 有

$$\varepsilon+k\subset K+K=K。\tag{3}$$

可验证 $K\subset(Y\setminus(-K))\cup\{0\}$。若不然，设存在 $\hat{k}\in K\setminus\{0\}$且 $\hat{k}\notin Y\setminus(-K)$，则$-\hat{k}\in K\setminus\{0\}$，从而

$$0=\hat{k}-\hat{k}\in K\setminus\{0\}+K\setminus\{0\}=K\setminus\{0\},$$

产生矛盾。因此，由(3)式可得

$$\begin{aligned}\inf_{k\in K}\Delta_{-K}(\varepsilon+k)&=\inf_{k\in K}(d_{-K}(\varepsilon+k)-d_{Y\setminus -K}(\varepsilon+k))=\inf_{k\in K}(d_{-K}(\varepsilon+k)-d_{(Y\setminus -K)\cup\{0\}}(\varepsilon+k))=\\&\inf_{k\in K}d_{-K}(\varepsilon+k)=\inf_{k_1\in K}\inf_{k_2\in K}\|\varepsilon+k_1+k_2\|=\inf_{k_1\in\varepsilon+K}\inf_{k_2\in K}\|k_1+k_2\|。\end{aligned}\tag{4}$$

进一步能够证明$\inf\limits_{k_1\in\varepsilon+K}\inf\limits_{k_2\in K}\|k_1+k_2\|=\inf\limits_{k_1'\in\varepsilon+K}\|k_1'\|$。事实上，因为对任意的 $k_1\in\varepsilon+K$，$k_1+K\subset\varepsilon+K+K=\varepsilon+K$，所以$\inf\limits_{k_2\in K}\|k_1+k_2\|\geqslant\inf\limits_{k_1'\in\varepsilon+K}\|k_1'\|$，$\forall k_1\in\varepsilon+K$。此外，对任意的 $\alpha>0$，由$\inf\limits_{k_1'\in\varepsilon+K}\|k_1'\|$及下确界的定义可知存在 $\bar{k}_1\in\varepsilon+K$，使得$\|\bar{k}_1\|<\inf\limits_{k_1'\in\varepsilon+K}\|k_1'\|+\varepsilon$。由 $\varepsilon+K$ 满足 $\varepsilon+K+K=\varepsilon+K$，则存在 $\hat{k}_1\in\varepsilon+K$，$\hat{k}_2\in K$ 使得 $\bar{k}_1=\hat{k}_1+\hat{k}_2$，故$\inf\limits_{k_1\in\varepsilon+K}\inf\limits_{k_2\in K}\|k_1+k_2\|\leqslant\inf\limits_{k_2\in K}\|\hat{k}_1+k_2\|<\|\hat{k}_1+\hat{k}_2\|=\|\bar{k}_1\|<\inf\limits_{k_1'\in\varepsilon+K}\|k_1'\|+\alpha$。故

$$\inf_{k_1\in\varepsilon+K}\inf_{k_2\in K}\|k_1+k_2\|=\inf_{k_1'\in\varepsilon+K}\|k_1'\|=d_{\varepsilon+K}(0)。\tag{5}$$

又 $0\in\partial K$，故由引理 1 的 i)可得 $\Delta_{-K}(f(\bar{x})-f(\bar{x}))=\Delta_{-K}(0)=0$，从而由(2)、(4)～(5)式可得 $\Delta_{-K}(f(x)-f(\bar{x}))\geqslant\Delta_{-K}(f(\bar{x})-f(\bar{x}))-d_{\varepsilon+K}(0)$，即 $\bar{x}\in\mathrm{AMin}(\Delta_{-K}f(x)-f(\bar{x}),d_{\varepsilon+K}(0))$。　证毕

注 1　定理 1 的逆不一定成立，下面的例子可以解释这一点。

例 1　令 $X=Y=\mathbf{R}^2$，$\|\cdot\|=\|\cdot\|_2$，$K=\mathbf{R}^2_+$，$\varepsilon=(1,1)\in K$，$f(x)=(x_1+1,2x_2)$，且 $S=\left\{(x_1,x_2)\,\middle|\,x_1\in\mathbf{R},x_2\geqslant-\dfrac{1}{2}\right\}$。显然，K 是点闭凸锥，$d_{\varepsilon+K}(0)=\sqrt{2}$，$f(S)=\{(x_1,x_2)\mid x_1\in\mathbf{R},x_2\geqslant-1\}$。令 $\bar{x}=(-1,0)\in S$，因为对任意的 $x\in S$，有

$$\Delta_{-K}(f(x)-f(\overline{x}))=\Delta_{-K}(f(x))=d_{-K}(f(x))-d_{Y\backslash -K}(f(x))\geqslant -1>$$
$$-\sqrt{2}=\Delta_{-K}(f(\overline{x})-f(\overline{x}))-d_{\varepsilon+K}(0)。$$

所以 $\overline{x}\in \mathrm{AMin}(\Delta_{-K}f(x)-f(\overline{x}),d_{\varepsilon+K}(0))$。然而,

$$\mathrm{cl\ cone}\ (f(S)+\varepsilon+K-f(\overline{x}))\cap(-K)=$$
$$\{(x_1,x_2)\mid x_1\in\mathbf{R},x_2\geqslant 0\}\cap(-\mathbf{R}^2_+)=\{(x_1,x_2)\mid x_1\leqslant 0,x_2=0\}\neq\{0\}。$$

故 $\overline{x}\notin -PE(f(S),K)$,即定理1的逆不成立。

定理2 设 $K\subset Y$ 是点闭凸锥,$\varepsilon\in K$,$\mathrm{cone}\ (f(S)+\varepsilon+K-f(\overline{x}))$ 是闭集,$\beta=\inf\limits_{k\in\varepsilon+K}d_{\partial K}(k)$,则

$$\overline{x}\in \mathrm{SAMin}\ (\Delta_{-K}f(x)-f(\overline{x}),\beta)\Rightarrow\overline{x}\in\varepsilon-PE(f(S),K)。$$

证明 若存在 $d\neq 0,d\in -K$ 且 $d\in \mathrm{cl\ cone}\ (f(S)+\varepsilon+K-f(\overline{x}))$。由 $\mathrm{cone}\ (f(S)+\varepsilon+K-f(\overline{x}))$ 的闭性及锥包的定义可知存在 $\lambda>0,\hat{x}\in S,\hat{k}\in K$ 使得 $d=\lambda(f(\hat{x})+\hat{k}+\varepsilon-f(\overline{x}))\in -K$。

由 K 是锥可得 $f(\hat{x})+\hat{k}+\varepsilon-f(\overline{x})\in -K$,从而由引理1和 $\varepsilon+K\subset K$ 可得

$$\Delta_{-K}(f(\hat{x})-f(\overline{x}))\leqslant\Delta_{-K}(f(\hat{x})+\hat{k}+\varepsilon-f(\overline{x}))+\Delta_{-K}(-\hat{k}-\varepsilon)\leqslant$$
$$-d_{Y\backslash -K}(-\hat{k}-\varepsilon)=-d_{\partial(-K)}(-\hat{k}-\varepsilon)=-d_{\partial K}(\hat{k}+\varepsilon)\leqslant-\inf_{k\in\varepsilon+K}d_{\partial K}(k)=-\beta。\tag{6}$$

另一方面,由 $\overline{x}\in \mathrm{SAMin}\ (\Delta_{-K}f(x)-f(\overline{x}),\beta)$,$0\in\partial K$ 及引理1中的i)可得

$$\Delta_{-K}(f(\hat{x})-f(\overline{x}))>\Delta_{-K}(f(\overline{x})-f(\overline{x}))-\beta=-\beta。$$

这与(6)式矛盾。故 $\overline{x}\in\varepsilon-PE(f(S),K)$。 证毕

注2 若 $\mathrm{cone}\ (f(S)+\varepsilon+K-f(\overline{x}))$ 不是闭集,定理2不一定成立,下面的例子可以解释这一点。

例2 令 $X=Y=\mathbf{R}^2$,$\|\cdot\|=\|\cdot\|_2$,$K=\mathbf{R}^2_+$,$\varepsilon=(1,1)\in K$,$f(x)=x$ 且 $S=\{(x_1,x_2)\mid x_1<0,x_2>0\}\cup\{(0,0)\}$。显然,$K$ 是点闭凸锥且 $\beta=1$,令 $\overline{x}=(0,0)\in S$。容易验证

$$\mathrm{cone}\ (f(S)+\varepsilon+K-f(\overline{x}))=\{(x_1,x_2)\mid x_1\in\mathbf{R},x_2>0\}\cup\{(0,0)\}$$

不是闭集。因为对任意的 $x\in S$,有

$$\Delta_{-K}(f(x)-f(\overline{x}))=\Delta_{-K}(f(x))=d_{-K}(f(x))-d_{Y\backslash -K}(f(x))\geqslant 0>-1=\Delta_{-K}(f(\overline{x})-f(\overline{x}))-\beta.$$

所以 $\overline{x}\in \mathrm{SAMin}\ (\Delta_{-K}f(x)-f(\overline{x}),\beta)$。然而

$$\mathrm{cl\ cone}\ (f(S)+\varepsilon+K-f(\overline{x}))\cap(-K)=$$
$$\{(x_1,x_2)\mid x_1\in\mathbf{R},x_2\geqslant 0\}\cap(-\mathbf{R}^2_+)=\{(x_1,x_2)\mid x_1\leqslant 0,x_2=0\}\neq\{0\}。$$

故 $x\notin\varepsilon-PE(f(S),K)$,即定理2不成立。

注3 若 $\overline{x}\notin \mathrm{SAMin}\ (\Delta_{-K}(f(x)-f(\overline{x})))$,定理2不一定成立,下面的例子可以解释这一点。

例3 令 $X=Y=\mathbf{R}^2$,$\|\cdot\|=\|\cdot\|_2$,$K=\mathbf{R}^2_+$,$\varepsilon=(1,1)\in K$,$f(x)=x$ 且 $S=\{(x_1,x_2)\mid x_1\leqslant 0,x_2\geqslant -1\}$。显然,$K$ 是点闭凸锥且 $\beta=1$。令 $\overline{x}=(0,0)\in S$。因为存在 $\hat{x}=(-1,-1)\in S$,使得

$$\Delta_{-K}(f(\hat{x})-f(\overline{x}))=\Delta_{-K}(f(\hat{x}))=d_{-K}(f(\hat{x}))-d_{Y\backslash -K}(f(\hat{x}))=-1=-\beta。$$

所以 $\overline{x}\notin \mathrm{SAMin}\ (\Delta_{-K}f(x)-f(\overline{x}),\beta)$。容易验证 $\mathrm{cone}\ (f(S)+\varepsilon+K-f(\overline{x}))=\{(x_1,x_2)\mid x_1\in R,x_2\geqslant 0\}$ 是闭集。然而

$$\mathrm{cl\ cone}\ (f(S)+\varepsilon+K-f(\overline{x}))\cap(-K)=$$
$$\{(x_1,x_2)\mid x_1\in\mathbf{R},x_2\geqslant 0\}\cap(-\mathbf{R}^2_+)=\{(x_1,x_2)\mid x_1\leqslant 0,x_2=0\}\neq\{0\}。$$

故 $\overline{x}\notin\varepsilon-PE\ (f(S),K)$,即定理2不成立。

参考文献:

[1] Kutateladze S S. Convex ε-programming[J]. Soviet Mathematics Doklady,1979,20(2):391-393.

[2] Gutierrez C,Jimenez B,Novo V. A unified approach and optimality conditions for approximate solutions of vector optimization problems[J]. SIAM Journal on Optimization,2006,17(3):688-710.

[3] Chicoo M,Mignanego F,Pusillo L,et al. Vector optimization problem via improvement sets[J]. Journal of Optimization Theory and Applications,2011,150(3):516-529.

[4] Gutierrez C,Jimenez B,Novo V. Improvement sets and vector optimization[J]. European Journal of Operational Research,2012,223(2):304-311.

[5] Zhao K Q,Yang X M,Peng J W. Weak E-optimal solution in vector optimization[J]. Taiwanese Journal of Mathemat-

ics, 2013, 17(4): 1287-1302.

[6] Rong W D, Ma Y. ε-properly efficient solutions of vector optimization problems with set-valued maps[J]. OR Transactions, 2000, 4(4): 21-32.

[7] Zhao K Q, Yang X M. E-Benson proper efficiency in vector optimization[J]. Optimization, doi: 10.1080/02331934.2013.798321, 2013.

[8] Zaffaroni A. Degrees of efficiency and degrees of minimality [J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 2003, 42 (3): 1071-1086.

Operations Research and Cybernetics

Nonlinear Scalarization of ε-Properly Efficient Solutions

XIA Yuanmei, ZHANG Wanli, ZHAO Kequan

(Department of Mathematics, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: In this paper, we study some nonlinear scalarization characterizations of ε-properly efficient solutions for vector optimization problems via the classical nonlinear scalarization function Δ_{-K} obtained by using a pointed closed convex cone. We first prove that ε-properly efficient solutions of the vector optimization problem (VP) implies $d_{\varepsilon+K}(0)$-approximate solutions of the scalarization problem (P_y) and give an example to illustrate the fact that the converse of this conclusion may not be valid. Furthermore, we also prove that strictly β-approximate solutions of the scalarization problem (P_y) implies ε-properly efficient solutions of the vector optimization problem (VP), and propose some examples to illustrate the facts that this conclusion may not be true if the cone hull of the set $f(S)+\varepsilon+K-f(\overline{x})$ is not closed, and β-approximate solutions of the scalarization problem (P_y) does not imply ε-properly efficient solutions of the vector optimization problem (VP).

Key words: vector optimization; ε-properly efficient solutions; nonlinear scalarization

(责任编辑 黄 颖)