运筹学与控制论

DOI:10.11721/cqnuj20150105

带有机器维修和多个工期的单机排序问题*

李韦萱，赵传立

(沈阳师范大学 数学与系统科学学院，沈阳 110034)

摘要:针对具有恶化工件和机器维修的单机排序模型,讨论了多个工期的指派问题。在这一模型中,机器在加工过程中产生恶化使效率降低,工件的实际加工时间是关于开始加工时间的线性递增函数;机器的维修区间是关于开始维修时间的线性递增函数,维修工作完成后,机器将恢复到初始状态,工件的恶化也重新开始。目标是确定最优排序、最优工期和最优维修位置以便极小化工件的提前、延误和工期的总费用。对于这一问题,给出了最优解的一些相关性质,证明了这个问题是多项式时间可解的。

关键词:单机;排序;线性恶化;多个工期;维修活动

中图分类号:O223　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2015)01-0022-06

近年来,工期指派问题受到越来越多的关注。若工件恰好在工期时刻完工,则不产生惩罚费用,若工件在其工期之前或之后完工,则会产生相应的提前或延误费用。Li S. S. 等人[1]研究了带有恶化工件和工期指派的单机排序问题,他们对 CON 和 SLK 两种工期指派问题给出了多项式算法。Kuo W. H. 和 Yang D. L.[2]研究了带有恶化工件和一个共同工期的单机排序问题,工件的加工时间是其开始加工时间的递增函数,他们对该问题做了详细的分析,并给出了多项式算法。郭玲等[3]讨论了带有公共交货期和加工时间可控的单机排序问题,目标是极小化总完工时间、提前时间、延误时间、交货期的结束时间和资源分配的总费用,证明了这个问题是多项式时间可解的。范雁鹏等[4]讨论了加工时间可控并且每个工件都有一个交货期的单机排序问题,目标是确定最优排序,最优资源分配,极小化提前时间、延误时间、交货期的开始时间、交货期和资源消耗的总费用,最后给出了多项式算法。Lu Y. Y. 等人[5]对带有学习效应和资源控制的两个模型进行分析,分别对 CON 和 SLK 两种工期指派问题给出了多项式算法。Chang P. C. 等人[6]介绍了带有学习/恶化效应和工期的单机排序问题。Chand 和 Chhajed[7]研究了带有多个工期的单机排序问题,目标是确定最优工期和工件的最优排序,最后给出了多项式算法。Wang J. B. 和 Wang M. Z.[8]将 Chand 和 Chhajed[7]所研究的问题推广到具有学习效应的情况。Yang S. J. 等人[9]将 Chand 和 Chhajed[7]所研究的问题推广到工件的加工时间是关于位置和资源分配的函数的情况。Gordon 等[10]对一些特殊条件下的工期指派问题进行了归纳总结。

另一方面,在实际生活中,机器需要按时进行保养或维修。因此,在排序问题中,考虑机器维修情况是有必要的[11-14]。Mosheiov 和 Sidney[15]研究了带有恶化维修的单机排序问题,维修后工件的加工时间变小,最后设计了多项式算法。Hsu 等[16]介绍了带有恶化工件、维修活动和工期的单机排序问题,目标是确定最优维修位置和最优工期,极小化提前、延误和工期的总费用,最后给出了多项式算法。

本文讨论具有多个工期和恶化维修的单机排序问题,这一模型是 Chand 和 Chhajed[7]的模型和 Mosheiov 和 Sidney[15]的模型的推广。给出了一些最优解的相关性质,证明了该问题是多项式可解的。

1 问题描述

假设有 n 个工件的工件集 $\{J_1, J_2, \cdots, J_n\}$ 在一台机器上加工,全部工件零时刻到达,加工不可中断,且机器在同一时刻只能加工一个工件。对于工件 $J_j, j=1,2,\cdots,n$ 的实际加工时间是关于开始时间 t 的线性递增函数,$p_j=a_j+bt$,其中 a_j 是工件 J_j 的基本加工时间,$b>0$ 表示工件的恶化率,t 表示工件 J_j 的开始加工时间。对于一个给定的排序 $\pi=(J_{[1]}, J_{[2]}, \cdots, J_{[n]})$,$a_{[j]}$ 表示排在第 j 个位置的工件的基本加工时间,$p_{[j]}$ 表示排在第 j 个位置的工件的实际加工时间。$d_{[j]}$ 是工件 $J_{[j]}$ 的工期,$C_{[j]}$ 是工件 $J_{[j]}$ 的完工时间,$E_{[j]}=\max\{0, d_{[j]}-C_{[j]}\}$,$T_{[j]}=$

* **收稿日期**:2013-11-15　**修回日期**:2014-10-07　**网络出版时间**:2015-1-7 16:04

作者简介:李韦萱,女,研究方向为排序理论,E-mail: 296055605@qq.com;**通讯作者**:赵传立,E-mail: zhaochuanli@synu.edu.cn

网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20150107.1604.005.html

$\max\{0, C_{[j]} - d_{[j]}\}$ 分别为 $J_{[j]}$ 的提前和延误时间。工件加工过程中，机器可以进行一次维修，维修时间为 $T_{MA} = T_0 + \delta t$，T_0 为基本维修时间，$\delta > 0$，t 为维修的开始时间。假设维修工作完成后，工件的加工状况将恢复到初始状态且恶化重新开始，若 J_j 是维修后加工的第一个工件，则它的开始加工时间变为 0，即 $t = 0$。

假设工件有 $m(1 \leqslant m \leqslant n)$ 个工期：D_i，$i = 1, 2, \cdots, m$，$D_1 \leqslant D_2 \leqslant \cdots \leqslant D_m$。对于 $i = 1, 2, \cdots, m$，指定工期为 D_i 的工件个数为 n_i，$n = \sum_{i=1}^{m} n_i$，记 I_i 为工期 D_i 的工件集，$|I_i| = n_i$；每个指定工期的工件个数是已知的，即 n_i 为定值。令 $N_i = \sum_{k=1}^{i} n_k$，$N_0 = 0$，N_i 表示指派给前 i 个工期的工件总个数，由于 n_i 为定值，所以相应的 N_i 也是已定的常数。

目标是找到最优的 $D = \{D_1, D_2, \cdots, D_m\}$，$I = \{I_1, I_2, \cdots, I_m\}$ 和最优的维修位置与最优工件排序，极小化目标函数 $Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j \in I_i} (\alpha E_{[j]} + \beta T_{[j]} + \gamma D_{[i]})$。$d_j = D_i$，$J_j \in I_i$。其中 $\alpha > 0$，$\beta > 0$，$\gamma > 0(\beta > \gamma)$ 分别为工件的提前、延误和工期的单位费用，问题可表示为 $1 \mid T_{MA}, p_j = a_j + bt \mid \sum_{i=1}^{m} \sum_{j \in I_i} (\alpha E_{[j]} + \beta T_{[j]} + \gamma D_{[i]})$。

2 相关性质

Chand 和 Chhajed[7] 对工件加工时间为常数的多个工期指派问题给出了最优解的一些性质，根据 Chand 和 Chhajed[7] 中的分析，当加入维修活动后下面的性质 1 和性质 2 仍成立。

性质 1　对任意的排序 π 和 $D = \{D_1, D_2, \cdots, D_m\}$，存在最优的 $I = \{I_1, I_2, \cdots, I_m\}$ 使得 $I_i = \{\pi_{[N_{i-1}+1]}, \pi_{[N_{i-1}+2]}, \cdots, \pi_{[N_i]}\}$，$i = 1, 2, \cdots, m$。其中 $\pi_{[r]}$ 表示在排序 π 中排在第 r 个位置的工件。

这个性质说明在排序 π 中有一个最优工件集分派给工期 D_i，这个最优工件集是 n_i 个连续的工件（在第 $N_{i-1}+1$ 到第 N_i 个位置）。

性质 2　对于任意给定的排序 π，存在最优的工期 $D = \{D_1, D_2, \cdots, D_m\}$，$D_i = C_{[k_i]}$，其中 $k_i = N_{i-1} + \lceil \frac{n_i(\beta - \gamma)}{\alpha + \beta} \rceil$，$i = 1, 2, \cdots, m$。

引理 1[17]　两个分别拥有元素 x_i 和 y_i 且个数相等的序列，若这两个序列按相反（相同）的单调顺序排列，则对应元素乘积的和 $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ 最小（大）。

3 主要结果

对于一个给定的排序 $\pi = (J_{[1]}, J_{[2]}, \cdots, J_{[h]}, J_{[h+1]}, \cdots, J_{[n]})$，若机器在第 h 个工件完工后维修，则工件的实际加工时间可以写为

$$p_{[1]} = a_{[1]},\ p_{[2]} = a_{[2]} + bt = a_{[2]} + ba_{[1]},\ p_{[3]} = a_{[3]} + b[a_{[2]} + (1+b)a_{[1]}],$$

$$\cdots$$

$$p_{[h]} = a_{[h]} + b[a_{[h-1]} + (1+b)a_{[h-2]} + \cdots + (1+b)^{h-2}a_{[1]}],\ p_{[h+1]} = a_{[h+1]},\ p_{[h+2]} = a_{[h+2]} + bt = a_{[h+2]} + ba_{[h+1]},$$

$$\cdots$$

$$p_{[n]} = a_{[n]} + b[a_{[n-1]} + (1+b)a_{[n-2]} + \cdots + (1+b)^{n-h-2}a_{[1]}]。$$

由性质 2 可知，工期 D_i，$i = 1, 2, \cdots, m$ 的最优位置可以确定。如果机器在工期 $D_l(1 \leqslant l \leqslant m)$ 前进行维修活动，即 $N_{l-1} + 1 \leqslant h < k_l$，下面分别对工件 $J_j \in (I_1, I_2, \cdots, I_{l-1})$，$I_l$，$(I_{l+1}, I_{l+2}, \cdots, I_m)$ 的 3 种情况进行分析。

1) $J_j \in (I_1, I_2, \cdots, I_{l-1})$。在 $(I_1, I_2, \cdots, I_{l-1})$ 中的工件的总费用 Z_1 为

$$Z_1 = \sum_{i=1}^{l-1} \Big[n_i \gamma C_{[k_i]} + \sum_{j=N_{i-1}+1}^{k_i} \alpha (C_{[k_i]} - C_{[j]}) + \sum_{j=k_i+1}^{N_i} \beta (C_{[j]} - C_{[k_i]}) \Big] = \sum_{j=1}^{N_{l-1}} w_j p_{[j]},$$

其中，对于 $i = 1, 2, \cdots, l-1$，有 $w_j = \begin{cases} \alpha(j - 1 - N_{i-1}) + \gamma(n - N_{i-1}), j = N_{i-1} + 1, \cdots, k_i \\ \beta(N_i - j + 1) + \gamma(n - N_i), j = k_i + 1, \cdots, N_i \end{cases}$。

因为 $p_{[j]} = a_{[j]} + bt$，所以 $(I_1, I_2, \cdots, I_{l-1})$ 中工件的总费用可以写成如下形式

$$Z_1 = w_1 a_{[1]} + w_2(a_{[2]} + ba_{[1]}) + w_3[a_{[3]} + b(a_{[2]} + (1+b)a_{[1]})] + \cdots +$$

$$w_{N_{l-1}}[a_{[N_{l-1}]} + b(a_{[N_{l-1}-1]} + (1+b)a_{[N_{l-1}-2]} + \cdots + (1+b)^{N_{l-1}-2}a_{[1]})] = W_1 a_{[1]} + W_2 a_{[2]} + \cdots + W_{N_{l-1}} a_{[N_{l-1}]},$$

其中
$$\begin{cases}W_1=w_1+w_2b+w_3b(1+b)+\cdots+w_{N_{l-1}}b(1+b)^{N_{l-1}-2}\\W_2=w_2+w_3b+w_4b(1+b)+\cdots+w_{N_{l-1}}b(1+b)^{N_{l-1}-3}\\\cdots\\W_{N_{l-1}-1}=w_{N_{l-1}-1}+w_{N_{l-1}}b\\W_{N_{l-1}}=w_{N_{l-1}}\end{cases}。\tag{1}$$

2) $J_j\in I_l$。I_l 中提前完成的工件 J_j,$j=k_l,k_l-1,\cdots,N_{l-1}+1$,其总提前费用 Z_j 为

$$Z_{k_l}=0,Z_{k_l-1}=\alpha p_{[k_l]},Z_{k_l-2}=\alpha(p_{[k_l]}+p_{[k_l-1]}),\cdots,Z_{h+1}=\alpha(p_{[k_l]}+p_{[k_l-1]}+\cdots+p_{[h+2]}),$$
$$Z_h=\alpha[p_{[k_l]}+p_{[k_l-1]}+\cdots+p_{[h+2]}+p_{[h+1]}+T_0+\delta(p_{[1]}+\cdots+p_{[h]})],$$
$$Z_{h-1}=\alpha[p_{[k_l]}+p_{[k_l-1]}+\cdots+p_{[h+2]}+p_{[h+1]}+T_0+\delta(p_{[1]}+\cdots+p_{[h]})+p_{[h]}],\cdots,$$
$$Z_{N_{l-1}+1}=\alpha[p_{[k_l]}+p_{[k_l-1]}+\cdots+p_{[h+2]}+p_{[h+1]}+T_0+\delta(p_{[1]}+\cdots+p_{[h]})+p_{[h]}+\cdots+p_{[N_{l-1}+2]}]。$$

I_l 中延误完成的工件 J_j, $j=k_l+1,k_l+2,\cdots,N_l$,其总延误费用 Z_j 为

$$Z_{k_l+1}=\beta p_{[k_l+1]},Z_{k_l+2}=\beta(p_{[k_l+1]}+p_{[k_l+2]}),\cdots,Z_{N_l}=\beta(p_{[k_l+1]}+p_{[k_l+2]}+\cdots+p_{[N_l]})。$$

I_l 中工件的总工期费用 Z_{d_l} 为 $Z_{d_l}=n_l\gamma[p_{[1]}+\cdots+p_{[h]}+T_0+\delta(p_{[1]}+\cdots+p_{[h]})+p_{[h+1]}+\cdots+p_{[k_l]}]$。

由上面推导可得,I_l 中工件提前、延误和工期的总费用 Z_2 可以表示为

$$\begin{aligned}Z_2=&\sum_{j=N_{l-1}+1}^{N_l}Z_j+Z_{d_l}=\alpha\sum_{j=N_{l-1}+1}^{k_l}(j-1-N_{l-1})p_{[j]}+(h-N_{l-1})\alpha[T_0+\delta(p_{[1]}+\cdots+p_{[h]})]+\beta\sum_{j=k_l+1}^{N_l}(N_l-j+1)p_{[j]}=\\&\alpha\sum_{j=N_{l-1}+1}^{k_l}(j-1-N_{l-1})p_{[j]}+(h-N_{l-1})\alpha[T_0+\delta(p_{[1]}+\cdots+p_{[h]})]+\beta\sum_{j=k_l+1}^{N_l}(N_l-j+1)p_{[j]}+\\&n_l\gamma[p_{[1]}+\cdots+p_{[h]}+T_0+\delta(p_{[1]}+\cdots+p_{[h]})+p_{[h+1]}+\cdots+p_{[k_l]}]=\sum_{j=1}^{N_{l-1}}[n_l\gamma+\delta n_l\gamma+(h-N_{l-1})\alpha\delta]p_{[j]}+\\&\sum_{j=N_{l-1}+1}^{h}[\alpha(j-1-N_{l-1})+n_l\gamma+\delta n_l\gamma+(h-N_{l-1})\alpha\delta]p_{[j]}+\sum_{j=h+1}^{k_l}[\alpha(j-1-N_{l-1})+n_l\gamma]p_{[j]}+\\&\beta\sum_{j=k_l+1}^{N_l}(N_l-j+1)p_{[j]}+[(h-N_{l-1})\alpha+n_l\gamma]T_0=\sum_{j=1}^{N_l}\tilde{w}_jp_{[j]}+[(h-N_{l-1})\alpha+n_l\gamma]T_0,\end{aligned}$$

其中
$$\tilde{w}_j=\begin{cases}(\delta+1)n_l\gamma+(h-N_{l-1})\alpha\delta,j=1,\cdots,N_{l-1}\\\alpha(j-1-N_{l-1})+(1+\delta)n_l\gamma+(h-N_{l-1})\alpha\delta,j=N_{l-1}+1,\cdots,h\\\alpha(j-1-N_{l-1})+n_l\gamma,j=h+1,\cdots,k_l\\\beta(N_l-j+1),j=k_l+1,\cdots,N_l\end{cases}。$$

因为 $p_{[j]}=a_{[j]}+bt$,所以 I_l 中工件的总费用可以写成如下形式

$$\begin{aligned}Z_2=&\tilde{w}_1a_{[1]}+\tilde{w}_2(a_{[2]}+ba_{[1]})+\tilde{w}_3[a_{[3]}+b(a_{[2]}+(1+b)a_{[1]})]+\cdots+\tilde{w}_h[a_{[h]}+b(a_{[h-1]}+(1+b)a_{[h-2]}+\cdots+\\&(1+b)^{h-2}a_{[1]})]+\tilde{w}_{h+1}a_{[h+1]}+\tilde{w}_{h+2}(a_{[h+2]}+ba_{[h+1]})+\cdots+\tilde{w}_{N_l}[a_{[N_l]}+b(a_{[N_l-1]}+(1+b)a_{[N_l-2]}+\cdots+\\&(1+b)^{N_l-h-2}a_{[h+1]})]+[(h-N_{l-1})\alpha+n_l\gamma]T_0=\tilde{W}_1a_{[1]}+\tilde{W}_2a_{[2]}+\cdots+\tilde{W}_{N_l}a_{[N_l]}+[(h-N_{l-1})\alpha+n_l\gamma]T_0,\end{aligned}$$

其中
$$\begin{cases}\tilde{W}_1=\tilde{w}_1+\tilde{w}_2b+\tilde{w}_3b(1+b)+\cdots+\tilde{w}_hb(1+b)^{h-2}\\\tilde{W}_2=\tilde{w}_2+\tilde{w}_3b+\tilde{w}_4b(1+b)+\cdots+\tilde{w}_hb(1+b)^{h-3}\\\cdots\\\tilde{W}_{h-1}=\tilde{w}_{h-1}+\tilde{w}_hb\\\tilde{W}_h=\tilde{w}_h\\\tilde{W}_{h+1}=\tilde{w}_{h+1}+\tilde{w}_{h+2}b+\tilde{w}_{h+3}b(1+b)+\cdots+\tilde{w}_{N_l}b(1+b)^{N_l-h-2}\\\tilde{W}_{h+2}=\tilde{w}_{h+2}+\tilde{w}_{h+3}b+\tilde{w}_{h+4}b(1+b)+\cdots+\tilde{w}_{N_l}b(1+b)^{N_l-h-3}\\\cdots\\\tilde{W}_{N_l-1}=\tilde{w}_{N_l-1}+\tilde{w}_{N_l}b\\\tilde{W}_{N_l}=\tilde{w}_{N_l}\end{cases}。\tag{2}$$

3) $J_j \in (I_{l+1}, I_{l+2}, \cdots, I_m)$。在 $(I_{l+1}, I_{l+2}, \cdots, I_m)$ 中的工件的总费用 Z_3 为

$$Z_3 = \sum_{i=l+1}^{m} [n_i \gamma C_{[k_i]} + \sum_{j=N_{i-1}+1}^{k_i} \alpha(C_{[k_i]} - C_{[j]}) + \sum_{j=k_i+1}^{N_i} \beta(C_{[j]} - C_{[k_i]})] = \sum_{j=1}^{n} \overline{w}_j p_{[j]} + \gamma(n - N_l) T_0,$$

其中，对于 $i = l+1, l+2, \cdots, m$，有 $\overline{w}_j = \begin{cases} n - N_l, j = 1, \cdots, h \\ \gamma(n - N_{i-1}), j = h+1, \cdots, N_{i-1} \\ \gamma(n - N_{i-1}) + \alpha(j - 1 - N_{i-1}), j = N_{i-1}+1, \cdots, k_i \\ \beta(N_i - j + 1), j = k_i + 1, \cdots, N_i \end{cases}$。

因为 $p_{[j]} = a_{[j]} + bt$，所以 $(I_{l+1}, I_{l+2}, \cdots, I_m)$ 中工件的总费用可以写成如下形式

$$Z_3 = \overline{w}_1 a_{[1]} + \overline{w}_2 (a_{[2]} + b a_{[1]}) + \overline{w}_3 [a_{[3]} + b(a_{[2]} + (1+b) a_{[1]})] + \cdots + \overline{w}_h [a_{[h]} + b(a_{[h-1]} + (1+b) a_{[h-2]} + \cdots + (1+b)^{h-2} a_{[1]})] + \overline{w}_{h+1} a_{[h+1]} + \overline{w}_{h+2} (a_{[h+2]} + b a_{[h+1]}) + \cdots + \overline{w}_n [a_{[n]} + b(a_{[n-1]} + (1+b) a_{[n-2]} + \cdots + (1+b)^{n-h-2} a_{[h+1]})] + \gamma(n - N_l) T_0 = \overline{W}_1 a_{[1]} + \overline{W}_2 a_{[2]} + \cdots + \overline{W}_n a_{[n]} + \gamma(n - N_l) T_0,$$

其中

$$\begin{cases} \overline{W}_1 = \overline{w}_1 + \overline{w}_2 b + \overline{w}_3 b(1+b) + \cdots + \overline{w}_h b(1+b)^{h-2} \\ \overline{W}_2 = \overline{w}_2 + \overline{w}_3 b + \overline{w}_4 b(1+b) + \cdots + \overline{w}_h b(1+b)^{h-3} \\ \cdots \\ \overline{W}_{h-1} = \overline{w}_{h-1} + \overline{w}_h b \\ \overline{W}_h = \overline{w}_h \\ \overline{W}_{h+1} = \overline{w}_{h+1} + \overline{w}_{h+2} b + \overline{w}_{h+3} b(1+b) + \cdots + \overline{w}_n b(1+b)^{n-h-2} \\ \overline{W}_{h+2} = \overline{w}_{h+2} + \overline{w}_{h+3} b + \overline{w}_{h+4} b(1+b) + \cdots + \overline{w}_n b(1+b)^{n-h-3} \\ \cdots \\ \overline{W}_{n-1} = \overline{w}_{n-1} + \overline{w}_n b \\ \overline{W}_n = \overline{w}_n \end{cases} \quad (3)$$

综上，当 $N_{l-1} + 1 \leqslant h < k_l (1 \leqslant l \leqslant m)$ 时，所有工件 $I = \{I_1, I_2, \cdots, I_m\}$ 的总费用可以表示为

$$Z = W_1 a_{[1]} + W_2 a_{[2]} + \cdots + W_{N_{l-1}} a_{[N_{l-1}]} + \widetilde{W}_1 a_{[1]} + \widetilde{W}_2 a_{[2]} + \cdots + \widetilde{W}_{N_l} a_{[N_l]} + [(h - N_{l-1})\alpha + n_l \gamma] T_0 + \overline{W}_1 a_{[1]} + \overline{W}_2 a_{[2]} + \cdots + \overline{W}_n a_{[n]} + \gamma(n - N_l) T_0。$$

当 $k_l \leqslant h \leqslant N_l (1 \leqslant l \leqslant m)$ 时，显然 Z_1 和 Z_3 部分与 $N_{l-1} + 1 \leqslant h < k_l$ 时是一样的，此时 Z_2 可表示为

$$Z_2 = \sum_{j=N_{l-1}+1}^{N_l} Z_j + Z_{d_l} = \alpha \sum_{j=N_{l-1}+1}^{k_l} (j - 1 - N_{l-1}) p_{[j]} + \beta \sum_{j=k_l+1}^{N_l} (N_l - j + 1) p_{[j]} + \beta(N_l - h)[T_0 + \delta(p_{[1]} + \cdots + p_{[h]})] + n_l \gamma (p_{[1]} + \cdots + p_{[k_l]}) = \sum_{j=1}^{N_{l-1}} [n_l \gamma + \beta(N_l - h)\delta] p_{[j]} + \sum_{j=N_{l-1}+1}^{k_l} [\alpha(j - 1 - N_{l-1}) + n_l \gamma + \beta(N_l - h)\delta] p_{[j]} + \sum_{j=k_l+1}^{h} [\beta(N_l - j + 1) + \beta(N_l - h)\delta] p_{[j]} + \sum_{j=h+1}^{N_l} \beta(N_l - j + 1) p_{[j]} + \beta(N_l - h) T_0 = \sum_{j=1}^{N_l} w'_j p_{[j]} + \beta(N_l - h) T_0,$$

其中 $w'_j = \begin{cases} n_l \gamma + \beta(N_l - h)\delta, j = 1, 2, \cdots, N_{l-1} \\ \alpha(j - 1 - N_{l-1}) + n_l \gamma + \beta(N_l - h)\delta, j = N_{l-1}+1, \cdots, k_l \\ \beta(N_l - j + 1) + \beta(N_l - h)\delta, j = k_l + 1, \cdots, h \\ \beta(N_l - j + 1), j = h+1, \cdots, N_l \end{cases}$。

相似地，将 $p_{[j]} = a_{[j]} + bt$ 代入，得到

$$Z_2 = w'_1 a_{[1]} + w'_2 (a_{[2]} + b a_{[1]}) + w'_3 [a_{[3]} + b(a_{[2]} + (1+b) a_{[1]})] + \cdots + w'_h [a_{[h]} + b(a_{[h-1]} + (1+b) a_{[h-2]} + \cdots + (1+b)^{h-2} a_{[1]})] + w'_{h+1} a_{[h+1]} + w'_{h+2} (a_{[h+2]} + b a_{[h+1]}) + \cdots + w'_{N_l} [a_{[N_l]} + b(a_{[N_l-1]} + (1+b) a_{[N_l-2]} + \cdots + (1+b)^{N_l-h-2} a_{[h+1]})] + \beta(N_l - h) T_0 = W'_1 a_{[1]} + W'_2 a_{[2]} + \cdots + W'_{N_l} a_{[N_l]} + \beta(N_l - h) T_0,$$

其中
$$\begin{cases}W'_1=w'_1+w'_2b+w'_3b(1+b)+\cdots+w'_hb(1+b)^{h-2}\\W'_2=w'_2+w'_3b+w'_4b(1+b)+\cdots+w'_hb(1+b)^{h-3}\\\cdots\\W'_{h-1}=w'_{h-1}+w'_hb\\W'_h=w'_h\\W'_{h+1}=w'_{h+1}+w'_{h+2}b+w'_{h+3}b(1+b)+\cdots+w'_{N_l}b(1+b)^{N_l-h-2}\\W'_{h+2}=w'_{h+2}+w'_{h+3}b+w'_{h+4}b(1+b)+\cdots+w'_{N_l}b(1+b)^{N_l-h-3}\\\cdots\\W'_{N_l-1}=w'_{N_l-1}+w'_{N_l}b\\W'_{N_l}=w'_{N_l}\end{cases}\text{。}\tag{4}$$

综上,当 $k_l\leqslant h\leqslant N_l(1\leqslant l\leqslant m)$ 时,所有工件 $I=\{I_1,I_2,\cdots,I_m\}$ 的总费用可以表示为
$$Z=W_1a_{[1]}+W_2a_{[2]}+\cdots+W_{N_{l-1}}a_{[N_{l-1}]}+W'_1a_{[1]}+W'_2a_{[2]}+\cdots+W'_{N_l}a_{[N_l]}+\beta(N_l-h)T_0+\overline{W}_1a_{[1]}+\overline{W}_2a_{[2]}+\cdots+\overline{W}_na_{[n]}+\gamma(n-N_l)T_0\text{。}$$

综合1)~3)可得工件 $I=\{I_1,I_2,\cdots,I_m\}$ 的总费用可表示为 $Z=\sum\limits_{j=1}^{n}W_ja_{[j]}+M$。其中
$$W_j=\begin{cases}W_j+\hat{W}_j+\overline{W}_j,j=1,2,\cdots,N_{l-1}\\\hat{W}_j+\overline{W}_j,j=N_{l-1}+1,\cdots,N_l\\\overline{W}_j,j=N_l+1,\cdots,n\end{cases},\hat{W}_j=\begin{cases}\widetilde{W}_j,N_{l-1}+1\leqslant h<k_l\\W'_j,k_l\leqslant h\leqslant N_l\end{cases},j=1,2,\cdots,N_l,$$
$$M=\begin{cases}[\alpha(h-N_{l-1})+n_l\gamma+\gamma(n-N_l)]T_0,N_{l-1}+1\leqslant h<k_l\\[\beta(N_l-h)+\gamma(n-N_l)]T_0,k_l\leqslant h\leqslant N_l\end{cases}\text{。}$$
$W_j(j=1,2,\cdots,N_{l-1})$ 由(1)式确定,$\widetilde{W}_j(j=1,2,\cdots,N_l)$ 由(2)式确定,$W'_j(j=1,2,\cdots,N_l)$ 由(4)式确定,$\overline{W}_j(j=1,2,\cdots,n)$ 由(3)式确定。

定理1　问题 $1|T_{MA},p_j=a_j+bt|\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j\in I_i}(\alpha E_{[j]}+\beta T_{[j]}+\gamma D_{[i]})$ 可以在 $O(n^2\log n)$ 时间内求得最优解。

证明　一旦维修位置确定,即 h 的值确定,又因为 N_i 是定值,$i=1,2,\cdots,m$,所以 M 是已定的常数。进而极小化 $Z=\sum\limits_{j=1}^{n}W_ja_{[j]}+M$ 的问题就可转化为极小化 $\sum\limits_{j=1}^{n}W_ja_{[j]}$。求出不同位置的 W_j,并按非增的顺序排列,将工件按照 $a_{[j]}$ 按非减的顺序排列 $(j=1,2,\cdots,n)$,由引理1,将两个序列元素对应相乘即可使目标函数值最小,所以问题可以在 $O(n\log n)$ 时间内求得最优解,而维修的位置最多有 n 个选择,因此该问题可以在 $O(n^2\log n)$ 时间内得到最优解。　证毕

4 结论

本文讨论了带有恶化工件、维修活动和多个相同工期指派的单机排序问题,证明了该问题在 $O(n^2\log n)$ 时间内可得到最优解。对于多次维修的情况,还有待进一步讨论。

参考文献:

[1] Li S S,Ng C T,Yuan J J. Scheduling deteriorating jobs with CON/SLK due date assignment on a single machine[J]. International Journal of Production Economics,2011,131(2):747-751.

[2] Kuo W H,Yang D L. A note on due-date assignment and single-machine scheduling with de-teriorating jobs[J]. Journal of the Operational Research Society,2008,59(6):857-859.

[3] 郭玲,赵传立.带有公共交货期窗口和加工时间可控的单机排序问题[J].重庆师范大学学报:自然科学版,2012(6):9-12.

Guo L,Zhao C L. Single machine scheduling with common due-window assignment and controllable processing times [J]. Journal of Chongqing Normal University: Natural Science, 2012(6):9-12.

[4] 范雁鹏,赵传立.带有交货期和加工时间可控的单机排序问题[J].重庆师范大学学报:自然科学版,2013(3):5-8.
Fan Y P, Zhao C L. Single machine scheduling with date of delivery assignment and controllable processing times[J]. Journal of Chongqing Normal University: Natural Science, 2013(3):5-8.

[5] Lu Y Y, Li G, Wu Y B, et al. Optimal due-date assignment problem with learning effect and resource-dependent processing times[J]. Optimization Letters, 2012, DOI: 10.1007/s11590-012-0467-7.

[6] Chang P C, Chen S H, Mani V. A note on due-date assignment and single machine scheduling with a learning/aging effect[J]. International Journal of Production Economics, 2009, 117(1):142-149.

[7] Chand S, Chhajed D. A single machine model for determination of optimal due dates and sequence[J]. Operations Research, 1992, 40(3):596-602.

[8] Wang J B, Wang M Z. Single machine multiple common due dates scheduling with learning-effects[J]. Computers & Mathematics with Applications, 2010, 60(11):2998-3002.

[9] Yang S J, Lee H T, Guo J Y. Multiple common due dates assignment and scheduling problems with resource allocation and general position-dependent deterioration effect[J]. The International Journal Advanced Manufacturing Technology, 2013, 67(1/2/3/4):181-188.

[10] Gordon V, Strusevich V, Dolgui A. Scheduling with due date assignment under special conditions on job processing[J]. Journal of Scheduling, 2012, 15(4):447-456.

[11] Mosheiov G, Oron D. Due-date assignment and maintenance activity scheduling problem[J]. Mathematical and Computer Modelling, 2006, 44(11/12):1053-1057.

[12] Yang S J, Hsu C J, Yang D L. Single-machine scheduling with due-date assignment and aging effect under a deteriorating maintenance activity consideration[J]. International Journal of Information and Management Sciences, 2010, 21(2):177-195.

[13] Hsu C J, Low C Y, Su C T. A single-machine scheduling problem with maintenance activities to minimize makespan[J]. Applied Mathematics and Computation, 2010, 215(11):3929-3935.

[14] Gordon V S, Tarasevich A A. Common due date assignment for a single machine scheduling with the rate-modifying activity[J]. Computers & Operations Research, 2009, 36(2):325-328.

[15] Mosheiov G, Sidney J B. Scheduling a deteriorating maintenance activity on a single machine[J]. Journal of the Operational Research Society, 2010, 61(5):882-887.

[16] Hsu C J, Yang C J, Yang D L. Due-date assignment and optimal maintenance activity scheduling problem with linear deteriorating jobs[J]. Journal of Marine Science and Technology, 2011, 19(1):97-100.

[17] Littlewood G H, Polya J E, Hardy G. Inequalities[M]. London: Cambridge University Press, 1934.

Operations Research and Cybernetics

Multiple Common Due-date Assignment and Optimal Maintenance Scheduling with Linear Deteriorating Jobs

LI Weixuan, ZHAO Chuanli

(School of Mathematics and Systems Science, Shenyang Normal University, Shenyang 110034, China)

Abstract: Aiming at the single machine scheduling model with simple linear deterioration and machine maintenance activity, we discuss multiple due-date assignment problems. In this model, the machine deteriorates during the processing procedure making the efficiency of processing jobs lower and the actual processing time of jobs depend on the starting times. The length of the maintenance time is a linear function of its starting time. Once completing the maintenance, the machine restores the processing efficiency and the deterioration of jobs start again. The objective is to schedule the jobs, the due-date and the maintenance activity, so as to minimize the total cost including earliness, tardiness, and the due-date starting times and sizes. We provide some properties of optimal sequence and turn to solve the matching problem at last show that it remains polynomial time solvable.

Key words: single machine; scheduling; linear deteriorating; multiple common due-date; maintenance activity

(责任编辑 黄 颖)