DOI:10.11721/cqnuj20150111

一类有限交换环上的广义单位 Cayley 图的若干性质*

熊腾飞[1], 简国明[2]
(1. 韶关学院 信息科学与工程学院; 2. 韶关学院 数学与统计学院, 广东 韶关 512005)

摘要:设 R 是一个含有非零单位元的有限交换环,$U(R)$是 R 的单位群,G 是 $U(R)$的一个乘法子群,S 是 G 的一个非空子集并且 $S^{-1}=\{s^{-1}|s\in S\}\subseteq S$。单位 Cayley 图 $Cay(R,U(R))$的顶点集是 R,两个顶点 x 和 y 相邻当且仅当 $x-y\in U(R)$;而广义单位 Cayley 图 $\Gamma(R,G,S)$的顶点集为 R,两个顶点 x 与 y 相邻当且仅当存在 $s\in S$,使得 $x+sy\in G$。容易看出,当 $G=U(R)$时,$\Gamma(R,G,\{-1\})$即为单位 Cayley 图。本文主要利用有限交换环的结构以及群与图的理论,研究了有限交换环上的广义单位 Cayley 图的一些性质,讨论了 $\Gamma(R,G,\{s\})$的正则性,以及 $\Gamma(R,U(R),\{s\})$中任意两点的公共邻接点个数和边着色数。

关键词:交换环;单位 Cayley 图;正则图;边着色数

中图分类号:O157.5 **文献标志码:**A **文章编号:**1672-6693(2015)01-0060-04

单位 Cayley 图是一个非常有趣的研究领域,它们内涵丰富,通过图性质的研究来讨论代数问题,提供了一种研究代数问题的新方法。

给定一个正整数 $n>1$,Z_n 即模 n 剩余类环。不少学者对 Z_n 上的单位 Cayley 图产生了浓厚的兴趣,文献[1-3]得到了一系列很好的结论。2009 年,R. Akhtar,M. Boggess[4]等学者提出了一般的有限交换环上单位的 Cayley 图 $Cay(R,U(R))$的定义:设 R 是一个含有非零单位元的有限交换环,$U(R)$为 R 的单位群,$Cay(R,U(R))$的顶点集是 R,顶点 x 和 y 相邻当且仅当 $x-y\in U(R)$。文献[4]讨论了 $Cay(R,U(R))$的直径、围长、自同构群、点连通度、边连通度、团数、着色数、边着色数,而且还解决了 $Cay(R,U(R))$的平面性和完美性等问题。在此之后许多专家对 $Cay(R,U(R))$的性质产生了浓厚的兴趣,文献[5-6]得出的一系列结论,使得该领域的成果丰富起来。

2011 年,K. Khashyarmanesh 和 M. R. Khorsandi[7]推广了单位 Cayley 图的概念:设 R 是一个含有非零单位元的有限交换环,$U(R)$是 R 的单位群,G 是 $U(R)$的一个乘法子群,S 是 G 的一个非空子集并且 $S^{-1}=\{s^{-1}|s\in S\}\subseteq S$,定义广义单位 Cayley 图 $\Gamma(R,G,S)$的顶点集为 R,顶点 x 与 y 相邻当且仅当存在 $s\in S$,使得 $x+sy\in G$。当 $G=U(R)$时,$\Gamma(R,G,\{-1\})$即为单位 Cayley 图。文献[7]把文献[4]中的一些结论推广到 $\Gamma(R,G,S)$中,范围更加宽广,内涵更为丰富。

文中所指的图都是简单图,即没有自环和重边的图。设 G 是一个图,$V(G)$和 $E(G)$分别表示图 G 的顶点集和边集;设 $a,b\in V(G)$,若 a,b 是一条边的两个端点,则称 a 与 b 是相邻的。用 $N(a)$表示与 a 相邻的所有顶点的集合;若顶点 c 既与 a 相邻,又与 b 相邻,则称 c 是 a 与 b 的公共邻接点,$N(a,b)$代表 a,b 的所有公共邻接点的个数。$\deg(a)$表示顶点 a 的度数。

本文研究了当 $S=\{s\}$时,广义单位 Cayley 图 $\Gamma(R,G,\{s\})$的若干性质:$\Gamma(R,G,\{s\})$的正则性、$\Gamma(R,U(R),\{s\})$的公共邻接点数及其边着色数。

1 定义及引理

定义 1[8] 设 R 是一个含单位元的交换环,$Max\,R$ 是 R 中所有极大理想组成的集合。环 R 中的理想 $J(R)=\{x\in R|1-xR\subseteq U(R)\}=\bigcap_{M\in\max R}M$,叫作环 R 的 Jacobson 根。

* **收稿日期:**2013-08-29 **修回日期:**2014-11-15 **网络出版时间:**2015-1-7 16:04
资助项目:国家自然科学基金(No. 11071089);广东省自然科学基金(No. 10151063201000005)
作者简介:熊腾飞,男,助教,研究方向为环论、代数图论,E-mail: sguxtf@tom.com
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20150107.1604.011.html

定义 2[9]　图 G 的一个因子是 G 的一个支撑子图。一个 k-因子是一个 k-正则支撑子图。

引理 1[8]　设 R 是一个含单位元的交换环。若 R 是 Artin 环，则 R 可以表示成有限个 Artin 局部环的直和：$R=\bigoplus_{i=1}^{t}R_i$（R_i 为 Artin 局部环）。如果又有 $R=\bigoplus_{i=1}^{t'}R_i'$（$R_i'$ 为 Artin 局部环），则 $t=t'$，并且有 $\{1,2,\cdots,t\}$ 的一个置换 σ，使得 $R_i\cong R'_{\sigma(i)}(1\leqslant i\leqslant t)$。

引理 2[9]　如果 G 是简单图，则 G 的边着色数 $\chi'(G)\leqslant\Delta(G)+1$，这里 $\Delta(G)$ 为图 G 所有顶点度数的最大值。

引理 3[7]　设 R 是一个含非零单位元的有限交换环，则 $1+1\in U(R)$ 当且仅当 $|R|$ 是奇数。

引理 4　若 R 是一个含非零单位元的有限交换环，则 R 中的元素或者是单位，或者是零因子。

证明　设 $x\in R$，$x\neq 0$ 且 $x\notin U(R)$，且集合 $A=\{rx\mid r\in R\}$。因为对于任意 $r\in R$，都有 $rx\neq 1$，所以 $1\notin A$，所以 A 是 R 的真子集。这样必存在 $r_1,r_2\in R$，且 $r_1\neq r_2$，使得 $r_1x=r_2x$，即 $(r_1-r_2)x=0$。实际上，若任意 $r_1\neq r_2$，均有 $r_1x\neq r_2x$，则 $|A|=|R|$，所以 $A=R$，与 A 是 R 的真子集矛盾。又由于 $r_1-r_2\neq 0$，所以 x 是 R 的零因子。

证毕

引理 5　设 R 是一个含单位元的交换环，如果 $x\in J(R)$，$y\in U(R)$，则 $x+y\in U(R)$。

证明　因为 $y\in U(R)$，所以 $x+y=y(1+xy^{-1})=y(1-x(-y^{-1}))$，由定义 1 知 $1-x(-y^{-1})\in U(R)$，所以 $y(1-x(-y^{-1}))\in U(R)$，即 $x+y\in U(R)$。　证毕

2 主要结果

根据 $\Gamma(R,G,S)$ 的定义，对于不同的点 x,y，若 x 与 y 相邻，则存在 $s\in S$，使得 $x+sy=g\in G\subseteq U(R)$，即 $y=s^{-1}g-s^{-1}x$，注意到 $s^{-1}g\in G$，$s^{-1}\in S$，知与 x 相邻的顶点均形如 $g'-s'x$，$s'\in S$，$g'\in G$，所以 $\deg(x)\leqslant|G||S|$。下面确定当 $S=\{s\}$ 时，$\Gamma(R,G,S)$ 中顶点的度数。

定理 1　设 R 是一个含非零单位元的有限交换环，$S=\{s\}$，则：1) 若 $1+s\notin U(R)$，则 $\Gamma(R,G,S)$ 是 $|G|$-正则的；2) 若 $1+s\in U(R)$，则 $\Gamma(R,G,S)$ 中含有 $|G|$ 个 $|G|-1$ 度的顶点，以及 $|R|-|G|$ 个 $|G|$ 度的顶点。

证明　1) 设 x 是 $\Gamma(R,G,S)$ 中的任意一点，则对于任何 $g\in G$，有 $x\neq g-sx$。若不然，$g=x+sx=(1+s)x$，因为 $1+s\notin U(R)$，由引理 4，存在 $y\in R$，$y\neq 0$，使得 $y(1+s)=0$，所以 $yg=y(1+s)x=0$。又因为 $g\in U(R)$，则存在 $z\in R$，使得 $zg=1$，所以 $(yg)z=y(zg)=y$，但是 $(yg)z=0$，这与 $y\neq 0$ 矛盾。综上述有 $N(x)=\{g-sx\mid g\in G\}$，故 $\Gamma(R,G,S)$ 是 $|G|$-正则的。

2) 因为 $1+s\in U(R)$，所以存在唯一的 $z\in R$，使得 $(1+s)z=1$，则 $z=1-sz$，即 $gz=g-sgz$，$g\in G$。在 $\Gamma(R,G,S)$ 中，对任意 $g\in G$，$\deg(gz)=|G|-1$。实际上，若 $g,g'\in G$，并且 $g'\neq g$，则 $gz\neq g'-sgz$，否则 $(1+s)zg=g'$，即 $g=g'$，矛盾。因此 $N(gz)=\{g'-sgz\mid g,g'\in G,g'\neq g\}$，故 $\deg(gz)=|G|-1$。

令 $A=\{gz\mid g\in G\}$，则任意 $a\in R-A$，均有 $a\neq g-sa$。否则就有 $(1+s)ag^{-1}=1$，这样就有 $ag^{-1}=z$，即 $a=gz$，矛盾。因此，在 $\Gamma(R,G,S)$ 中，$N(a)=\{g-sa\mid g\in G\}$，故 $\deg(a)=|G|$。　证毕

推论 1　设 R 是一个含非零单位元的有限交换环，$S=\{s\}$。$\Gamma(R,G,S)$ 是 $|G|$-正则图当且仅当 $1+s\notin U(R)$。

设 R 是一个有限交换环，由引理 1 知 $R=\bigoplus_{i=1}^{t}R_i$，则 $U(R)=\bigoplus_{i=1}^{t}U(R_i)$，其中 R_i 为 Artin 局部环，其唯一的极大理想记为 M_i，$i=1,2,\cdots,t$，这样任何 $x\in R$，都有 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_t)$。设 $f_i=|R_i/M_i|$，则可将 $\{1,2,\cdots,t\}$ 进行适当的置换，使得 $f_1\leqslant f_2\leqslant\cdots\leqslant f_t$。在以下的结论中，所使用的都是指经过如上置换以后的 f_i，$i=1,2,\cdots,t$。

定理 2　设 R 是一个含非零单位元的有限交换环，$R=\bigoplus_{i=1}^{t}R_i$，$x=(x_1,x_2,\cdots,x_t)$，$y=(y_1,y_2,\cdots,y_t)$，为 $\Gamma(R,U(R),\{s\})$ 中不同的两个顶点，$I=\{i\mid 1\leqslant i\leqslant t,x_i-y_i\in M_i\}$，$J=\{1,2,\cdots,t\}-I$。若 $1+s\notin U(R)$，则 $N(x,y)=|R|\prod_{i\in I}\left(1-\frac{1}{f_i}\right)\prod_{j\in J}\left(1-\frac{2}{f_j}\right)$。

证明　若 $z=(z_1,z_2,\cdots,z_t)$ 是 x 和 y 的公共邻接点，则对于 $k=1,2,\cdots,t$，都有 $z_k+M_k\notin\{-sx_k+M_k,-sy_k+M_k\}$。若 $-sx_k+M_k=-sy_k+M_k$，即 $sx_k-sy_k\in M_k$，$x_k-y_k\in M_k$，此时 $k\in I$。因为 z_k+M_k 可以取遍 R_k/M_k 中所有除 $-sx_k+M_k$ 以外的元素，所以 z_k+M_k 有 f_k-1 种选择，而 $|z_k+M_k|=\frac{|R_k|}{f_k}$，因此 z_k 共有 $\frac{|R_k|}{f_k}(f_k-1)$ 种取法。若 $-sx_k+M_k\neq -sy_k+M_k$，则 $x_k-y_k\notin M_k$，此时 $k\in J$，因为 z_k+M_k 可以取遍 R_k/M_k 中所有除 $-sx_k+M_k$ 以及 $-sy_k+M_k$ 以外的元素，所以 z_k+M_k 共有 f_k-2 种选择，因此 z_k 共有 $\frac{|R_k|}{f_k}(f_k-2)$ 种取

法。综上述,对 z 的取法共有

$$\prod_{i\in I}\frac{|R_i|}{f_i}(f_i-1)\prod_{j\in J}\frac{|R_j|}{f_j}(f_j-2)=|R|\prod_{i\in I}\left(1-\frac{1}{f_i}\right)\prod_{j\in J}\left(1-\frac{2}{f_j}\right)$$

种,即 $N(x,y)=|R|\prod_{i\in I}\left(1-\frac{1}{f_i}\right)\prod_{j\in J}\left(1-\frac{2}{f_j}\right)$。 证毕

注 若 $1+s\in U(R)$,以上结论是不成立的。例如,在 $\Gamma(Z/3Z,U(Z/3Z),\{1\})$ 中,$N(1,2)=1$,但是

$$|Z/3Z|\prod_{i\in I}\left(1-\frac{1}{f_i}\right)=2,\ N(1,2)\neq|Z/3Z|\prod_{i\in I}\left(1-\frac{1}{f_i}\right)。$$

推论2 设 R 是一个含非零单位元的有限交换环,$x=(x_1,x_2,\cdots,x_t)$,$y=(y_1,y_2,\cdots,y_t)$,为 $\Gamma(R,U(R),\{s\})$ 中不同的两个顶点,若 $1+s\notin U(R)$,则 $N(x)=N(y)$ 当且仅当 $x-y\in J(R)$。

证明 易知 $J(R)=\bigoplus_{i=1}^{t}M(R_i)$,$i=1,2,\cdots,t$。

若 $N(x)=N(y)$,因为 $1+s\notin U(R)$,所以 $\Gamma(R,U(R),\{s\})$ 是 $|U(R)|$-正则的,所以 $|N(x)|=|N(y)|=|U(R)|$,又由定理2有 $N(x,y)=|R|\prod_{i\in I}\left(1-\frac{1}{f_i}\right)\prod_{j\in J}\left(1-\frac{2}{f_j}\right)=|U(R)|$。对任意 $k\in\{1,2,\cdots,t\}$,由局部环的性质知,$|U(R_k)|=|R_k|-\frac{|R_k|}{f_k}=|R_k|\left(1-\frac{1}{f_k}\right)$,所以就有

$$N(x,y)=|U(R)|=\prod_{i=1}^{t}|U(R_i)|=|R|\prod_{i=1}^{t}\left(1-\frac{1}{f_i}\right),$$

即 $I=\{1,2,\cdots,t\}$。因此,对任意 $k\in\{1,2,\cdots,t\}$,都有 $x_k-y_k\in M_k$,故 $x-y\in J(R)$。

反过来,设 $s=\{s_1,s_2,\cdots,s_t\}$,若 $a=\{a_1,a_2,\cdots,a_t\}\in N(x)$,则 $a+sx\in U(R)$,即 $a_i+s_ix_i\in U(R_i)$,$i=1,2,\cdots,t$。若 $a+sy\notin U(R)$,则存在 $j\in\{1,2,\cdots,t\}$,使得 $a_j+s_jy_j\in M_j=J(R_j)$。一方面,因为 $x-y\in J(R)$,所以 $sx-sy\in J(R)$;另一方面,由引理5,$sx_j-sy_j=(a_j+s_jx_j)-(a_j+s_jy_j)\in U(R_j)$,因此 $sx_j-sy_j\notin J(R_j)$,这与 $sx-sy\in J(R)$ 矛盾,所以对任何 $a+sx\in U(R)$,都有 $a+sy\in U(R)$,即 $a\in N(y)$。同理可得,若 $b\in N(y)$,则 $b\in N(x)$。综上述,当 $x-y\in J(R)$ 时,$N(x)=N(y)$。 证毕

定理3 设 R 是一个含非零单位元的有限交换环,$S=\{s\}$。若 $1+s\notin U(R)$,则 $\Gamma(R,U(R),\{s\})$ 的边着色数 $\chi'(\Gamma(R,U(R),\{s\}))=\begin{cases}|U(R)|+1,|R|\text{是奇数}\\|U(R)|,|R|\text{是偶数}\end{cases}$。

证明 由引理2知,$\chi'(\Gamma(R,U(R),\{s\}))=|U(R)|$ 或 $|U(R)|+1$。

1)当 $|R|$ 是奇数时,$\Gamma(R,U(R),\{s\})$ 没有1-因子,所以对于任何一种真的边着色而言,其中任何一种颜色 C 不可能关联 $\Gamma(R,U(R),\{s\})$ 的所有顶点。假设颜色 C 不关联顶点 a,注意到 $\Gamma(R,U(R),\{s\})$ 是 $|U(R)|$-正则的,所以需要 $|U(R)|$ 种颜色与 a 相关联,又因为这 $|U(R)|$ 种颜色不包含 C,因此有 $\chi'(\Gamma(R,U(R),\{s\}))>|U(R)|$,所以 $\chi'(\Gamma(R,U(R),\{s\}))=|U(R)|+1$。

2)当 $|R|$ 是偶数时,将给出合适的边着色方法,使得该方法使用的颜色种类恰好等于 $|U(R)|$。

i)若 $s=1$,设 $E(\Gamma)$ 为 $\Gamma(R,U(R),\{s\})$ 的边集,则对于 $\{a_0,b_0\}\in E(\Gamma)$,用颜色 $C_{a_0+b_0}$ 给其上色,显然,E 中含有公共端点的两条边使用的颜色必不相同,这样对所有 $\Gamma(R,U(R),\{s\})$ 的边所使用的颜色不超过 $|U(R)|$ 种。由引理3知 $1+1\notin U(R)$,所以 $\Gamma(R,U(R),\{s\})$ 是 $|U(R)|$-正则的,所以 $\chi'(\Gamma(R,U(R),\{s\}))\geqslant|U(R)|$,故 $\chi'(\Gamma(R,U(R),\{s\}))=|U(R)|$。

ii)若 $s\neq1$,则对任何 $\{x,y\}\in E(\Gamma)$,都有 $x+sy\neq y+sx$。实际上,若存在 $\{x_0,y_0\}\in E(\Gamma)$,使得 $x_0+sy_0=y_0+sx_0$。令 $x_0+sy_0=u\in U(R)$,则 $y_0+sx_0=u$,所以 $y_0+s(u-sy_0)=u$,即 $su=u$,这样就有 $s=1$,这是一个矛盾。

对 $\Gamma(R,U(R),\{s\})$ 的每一条边 $\{x,y\}$,在 $x+sy$ 和 $y+sx$ 当中任取其中一个构成集合 V,使得 V 恰好包含 $x+sy$ 和 $y+sx$ 中的其中一个,易知 $|V|\leqslant\frac{|U(R)|}{2}$。

设 $n\in N$,取固定的 $u\in V$,$x_0\in R$,设 $W_u=x_0x_1\cdots x_n$,为图 $\Gamma(R,U(R),\{s\})$ 的一个迹,使得 $x_i+sx_{i+1}=u$,$i=0,1,\cdots,n-1$。设 W 是由所有这样的 W_u 所构成的集合,在 W 中取 $P_u=x_0x_1\cdots x_n$,使得任何 $W_u\in W$,P_u 的长度不小于 W_u。易知迹 P_u 至少含有3个互不相同的顶点,以下将证明 P_u 是一个圈。

a)任意 $i,j\in\{0,1,\cdots,n-1\}$ 且 $i\neq j$,都有 $x_i\neq x_j$。假设存在 $i,j\in\{0,1,\cdots,n-1\}$ 且 $i\neq j$,使得 $x_i=x_j$。由 $x_j+sx_{j+1}=u$,即 $x_i+sx_{j+1}=u$,注意到 $x_i+sx_{i+1}=u$,有 $x_{j+1}=x_{i+1}$,这样就有 $\{x_j,x_{j+1}\}$ 与 $\{x_i,x_{i+1}\}$ 是同一条边,

这与 P_u 是一个迹矛盾。

b) 在 $P_u=x_0x_1\cdots x_n$ 中，$x_n=x_0$。否则，若 $x_n=x_k$，$k=1,2,\cdots,n-1$，则 $x_{n-1}=x_{k-1}$，这是一个矛盾；若 $x_n\notin\{x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}\}$，则存在 $y\in R$，使得 $x_n+sy=u$，并且 $y\notin\{x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}\}$，所以 $x_0x_1\cdots x_ny$ 是一个迹，这与 P_u 长度的最大性矛盾。这样就有 $P_u=x_0x_1\cdots x_{n-1}x_0$，又因为 $x_0,x_1,\cdots,x_{n-1}$ 两两不相等，所以 P_u 是一个圈。

设 $|P_u|$ 为 P_u 的长度，则 $|P_u|$ 是一个偶数，若不然，令 $|P_u|=2m+1$，注意到 $x_k+sx_{k+1}=u$，$k=0,1,2,\cdots,n-1$，所以 $\sum_{i=0}^{n-1}x_k+s\sum_{i=0}^{n-1}x_k=(2m+1)u$，即 $(1+s)\sum_{i=0}^{n-1}x_k=2mu+u$，因为 $|R|$ 是偶数，由引理 3 和引理 4 知，所以存在 $r\in R$，$r\neq 0$，使得 $(1+1)r=0$。若 $r(s-1)=0$，则 $rs=r$，因为 $r+r=0$，所以 $rs=-r$，故 $r(s+1)=0$，这样就有 $2mru+ru=r(1+s)\sum_{i=0}^{n-1}x_k=0$，即 $ru=0$，$r=0$，矛盾；若 $r(s-1)\neq 0$，则 $r(s-1)2mu+r(s-1)u=r(s-1)(1+s)\sum_{i=0}^{n-1}x_k=0$，即 $r(s-1)u=0$，$r(s-1)=0$，矛盾。故 $|P_u|$ 是一个偶数。

对任意 $\{x_k,x_{k+1}\}\in P_u$，当 k 是偶数时，用颜色 $C_{u(1)}$ 给其上色；当 k 时奇数时，用颜色 $C_{u(2)}$ 给其上色，这样 P_u 需要 2 种颜色。由 P_u 的构造方法知，$\Gamma(R,U(R),\{s\})$ 的每条边都含在唯一的一个 P_u 内，因此对 $\Gamma(R,U(R),\{s\})$ 中所有的 P_u 都进行边着色即可完成对 $\Gamma(R,U(R),\{s\})$ 中所有边的着色。这样就有 $\chi'(\Gamma(R,U(R),\{s\}))\leqslant 2|V|\leqslant|U(R)|$。又因为 $\Gamma(R,U(R),\{s\})$ 是 $|U(R)|$-正则的，所以 $\chi'(\Gamma(R,U(R),\{s\}))\geqslant|U(R)|$，这样就有 $\chi'(\Gamma(R,U(R),\{s\}))=|U(R)|$。 证毕

参考文献：

[1] Klotz W, Sander T. Some properties of unitary Cayley graphs[J/OL]. Electron J Combin, 2007, 14: #R45.

[2] Ramaswamy H N, Veena C R. On the energy of Unitary Cayley Graphs[J/OL]. Electron J Combin, 2009, 16: #N24.

[3] Ilić A. The energy of unitary Cayley graphs[J]. Linear Algebra and its Applications, 2009, 431(10): 1881-1889.

[4] Akhtar R, Boggess M, Jackson-Henderson T, et al. On the unitary Cayley graph of a finite ring[J/OL]. Electron J Combin, 2009, 16: #R117.

[5] Liu X G, Zhou S M. Spectral properties of unitary Cayley graphs of finite commutative rings[J/OL]. Electron J Combin, 2012, 19(4): #P13.

[6] Kiani D, Aghaei M M H. On the unitary Cayley graph of a ring[J/OL]. Electron J Combin, 2012, 19(2): #P10.

[7] Khashyarmanesh K, Khorsandi M R. A generalization of the unit and unitary Cayley graphs of a commutative ring[J]. Acta Mathematica Hungarica, 2012, 137(4): 242-253.

[8] 冯克勤. 交换代数基础[M]. 北京：高等教育出版社，1986.
Feng K Q. Basic communicative algebra[M]. Beijing: Higher Education Press, 1986.

[9] West D B. Introduction to Graph theory[M]. 2nd ed. Upper Saddle River, New Jersey: Prentice Hall, 2000.

Some Properties of a Generalization of the Unitary Cayley Graphs of a Finite Commutative Ring

XIONG Tengfei[1], JIAN Guoming[2]

(1. School of Information Science and Engineering, Shaoguan University;
2. School of Mathematics and Statistics, Shaoguan University, Shaoguan Guangdong 512005, China)

Abstract: Let R be a finite commutative ring with non-zero identity and $U(R)$ be the unit group of R. Suppose that G is a multiplicative subgroup of $U(R)$, and S is a non-empty subset of G such that $S^{-1}=\{s^{-1}\mid s\in S\}\subseteq S$. Then the vertex set of unitary Cayley graph $Cay(R,U(R))$ is R, and two distinct vertices x and y are adjacent if and only if $x-y\in U(R)$. $\Gamma(R,G,S)$ is a graph whose vertex set is R, and vertices x and y are adjacent if and only if there exists $s\in S$ such that $x+sy\in G$. Obviously, if $G=U(R)$, then $\Gamma(R,G,\{-1\})$ is the unitary Cayley graph. By the structure of a finite commutative ring and the theory of group and graph, we study some properties of a generalization of the unitary Cayley graphs of a finite commutative ring. We consider the regularity of a generalization of the unitary Cayley graphs $\Gamma(R,G,\{s\})$, and determine the number of common neighbors of two distinct vertices of $\Gamma(R,U(R),\{s\})$. In addiction, evaluate the edge chromatic number of $\Gamma(R,U(R),\{s\})$.

Key words: commutative ring; unitary Cayley graphs; regular graph; edge chromatic number

（责任编辑 黄 颖）