DOI:10.11721/cqnuj20150116

双曲空间中俩有限簇全渐近非扩张映象的混合型迭代*

雷贤才，毕　丹
(宜宾学院 数学研究所，四川 宜宾 644000)

摘要:在 Hyperbolic 空间中,讨论关于一有限簇全渐近非扩张映象与另一有限簇全渐近非扩张非自映象公共不动点的问题,引入了一个混合型迭代序列 $\begin{cases}x_1\in K\\ x_{n+1}=W(S_i^n x_n, T_i(PT_i)^{n-1}y_n,\alpha_n), i=1,2,\cdots,k\\ y_n=W(S_j^n x_n, T_j(PT_j)^{n-1}x_n,\beta_n), j=1,2,\cdots,k, i\neq j, \forall n\geqslant 1\end{cases}$,并在适当的条件下证明了 Δ-收敛定理及混合型迭代序列$\{x_n\}\Delta$-收敛于 F 的一公共不动点。

关键词:双曲空间;全渐近非扩张非自映象;Δ-收敛;混合型迭代

中图分类号:O177.91　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2015)01-0081-06

1 预备知识

最近文献[1]研究了 $CAT(0)$空间中具有全渐近非扩张非自映象序列的 Δ-收敛问题

$$\begin{cases}x_1\in C\\ x_{n+1}=P((1-\alpha_n)S_1^n x_n\oplus\alpha_n T_1(PT_1)^{n-1}y_n), n\geqslant 1。\\ y_n=P((1-\beta_n)S_2^n x_n\oplus\beta_n T_2(PT_2)^{n-1}x_n)\end{cases}\tag{1}$$

许多学者都对 $CAT(0)$空间中的 Δ-收敛问题以及混合迭问题进行了广泛研究[1-22]。本文进一步在比 $CAT(0)$空间更一般的完备一致凸双曲空间 X 中,证明了带一有限簇全渐近非扩张非自映象和另一有限簇全渐近非扩张映象混合迭代序列的 Δ-收敛定理。所得结果推广和改进了文献[1,21-22]的主要结果。

一个双曲空间[23]是一度量空间(X,d),连同映象 $W:X^2\times[0,1]\to X$ 满足:a) $d(u,W(x,y,\alpha))\leqslant\alpha d(u,x)+(1-\alpha)d(u,y)$;b) $d(W(x,y,\alpha),W(x,y,\beta))=|\alpha-\beta|d(x,y)$;c) $W(x,y,\alpha)=W(y,x,(1-\alpha))$;d) $d(W(x,z,\alpha),W(y,w,\alpha))\leqslant(1-\alpha)d(x,y)+\alpha d(z,w)$。对任意 $x,y,z,w\in X$ 和 $\alpha,\beta\in[0,1]$,双曲空间 X 的一非空子集 K 称为凸的,如果 $W(x,y,\alpha)\in K$ 对一切 $x,y\in K$ 且 $\alpha\in[0,1]$。双曲空间 X 有时也记为(X,d,W)。双曲空间类包含赋范空间和它的凸子集、具有双曲度量的希尔伯特球[4]、R-rees、Hadamard 流形以及 Gromov 意义下的 $CAT(0)$空间[23]。研究双曲空间已经很大程度上激发和主导双曲群问题成为几何群理论的主要研究对象[24]。

为了在完备一致凸的双曲空间 X 中定义 Δ-收敛概念,先给出一些基本概念。设$\{x_n\}$是一双曲空间的有界序列。对 $x\in X$,定义一连续函数 $r(\cdot,\{x_n\}):X\to[0,\infty):r(x,\{x_n\})=\limsup\limits_{n\to\infty}d(x,x_n)$。

给出$\{x_n\}$的渐近半径 $r(\{x_n\}):r(\{x_n\})=\inf\{r(x,\{x_n\}):x\in X\}$。一有界序列$\{x_n\}$的渐近中心依赖于 X 的子集 K 定义如下:$A_K(\{x_n\})=\{x\in X:r(x,\{x_n\})\leqslant r(y,\{x_n\})$对任意 $y\in K\}$。

这是函数 $r(\cdot,\{x_n\})$大于最小值的集合。如果渐近中心取依赖于 X,则它简单表示为 $A(\{x_n\})$,对一切 $x,y,z,w\in X$ 且 $a,b\in[0,1]$。如果双曲空间(X,d,W)仅满足条件 a),则它伴随着凸度量空间[24]。

一双曲空间(X,d,W)称为:i) 严格凸[24],如果对一切 $x,y\in X$ 且 $\lambda\in[0,1]$,存在唯一 $z\in X$ 使得 $d(z,x)=\lambda d(x,y)$,且 $d(z,y)=(1-\lambda)d(x,y)$;ii) 一致凸[25],如果对一切 $u,x,y\in X,r>0$ 且 $\varepsilon\in(0,2]$,存在一 $\delta\in(0,1]$使得

* **收稿日期**:2013-08-15　　**修回日期**:2014-09-18　　**网络出版时间**:2015-1-7 16:04
资助项目:高校自然科学研究 C 重点项目(No. 2012S19)
作者简介:雷贤才,男,副教授,研究方向为非线性泛函分析,E-mail:lxc0007@163.com
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20150107.1604.016.html

$$\left.\begin{array}{l}d(x,u)\leqslant r\\ d(y,u)\leqslant r\\ d(x,y)\geqslant \varepsilon r\end{array}\right\}\Rightarrow d\left(W\left(x,y,\frac{1}{2}\right),u\right)\leqslant(1-\delta)r。$$

映象 $\eta:(0,\infty)\times(0,2]\to(0,1]$ 有 $\delta=\eta(r,\varepsilon)$,对给定 $r>0$ 且 $\varepsilon\in(0,2]$,称为一致凸性模,称 η 单调如果它是减的具 r(对一固定 ε)。一致凸的双曲空间是严格凸的[24]。

定义 1[1] 设 X 是一完备一致凸双曲空间,K 是 X 的非空子集。有:1) 设 $P:X\to K$ 是一映象,如果 $P^2=P$,则称 P 是一个保核收缩。2) 若存在一个连续保核收缩 $P:X\to K$,使得 $Px=x$,$\forall x\in K$,则称 K 是 X 的一个收缩核。

定义 2[1] 一自映象 $T:K\to K$ 称为$(\{\upsilon_n\},\{\mu_n\},\zeta)$-全渐近非扩张的,如果存在非负序列$\{\mu_n\}$,$\{\upsilon_n\}$具有 $\mu_n\to 0$,$\upsilon_n\to 0$,并且一严格增的连续函数 $\zeta:[0,\infty)\to[0,\infty)$ 具有 $\zeta(0)=0$ 使得

$$d(T^nx,T^ny)\leqslant d(x,y)+\upsilon_n\zeta(d(x,y))+\mu_n,\ \forall n\geqslant 1,x,y\in K。$$

定义 3[1] $T:K\to X$ 称为$(\{\upsilon_n\},\{\mu_n\},\zeta)$-全渐近非扩张非自映象,如果存在非负序列$\{\mu_n\}$,$\{\upsilon_n\}$具有 $\mu_n\to 0$,$\upsilon_n\to 0$,并且一严格增的连续函数 $\zeta:[0,\infty)\to[0,\infty)$ 具有 $\zeta(0)=0$ 使得

$$d(T(PT)^{n-1}x,T(PT)^{n-1}y)\leqslant d(x,y)+\upsilon_n\zeta(d(x,y))+\mu_n,\ \forall n\geqslant 1,x,y\in K,$$

其中 P 是一 X 到 K 的保核收缩。

定义 4[1] 一非自映象 $T:K\to X$ 称为一致 L-Lipschitzian,如果存在一常数 $L>0$ 使得

$$d(T(PT)^{n-1}x,T(PT)^{n-1}y)\leqslant Ld(x,y),\ \forall n\geqslant 1,x,y\in K,$$

其中 P 是一 X 到 K 非扩张保核收缩。

最近,文献[1]在 $CAT(0)$空间提出混合 Agarwal-O'Regan-Sahu[22]型迭代方案(1)逼近两个全渐近非扩张映象$\{S_i:i=1,2\}$和两个全渐近非扩张非自映象$\{T_i:i=1,2\}$的一公共不动点,其中$\{\alpha_n\}$与$\{\beta_n\}$是$(0,1)$中的序列。P 是一 X 到 K 的非扩张收缩,并证明了 Δ-收敛定理,文献[1]的混合 Agarwal-O'Regan-Sahu 型迭代方案(1)也可以推广到双曲空间定义为:

$$\begin{cases}x_1\in K\\ x_{n+1}=W(S_i^nx_n,T_i(PT_i)^{n-1}y_n,\alpha_n),i=1,2,\cdots,k\\ y_n=W(S_j^nx_n,T_j(PT_j)^{n-1}x_n,\beta_n),j=1,2,\cdots,k,i\neq j,\forall n\geqslant 1\end{cases},\tag{2}$$

其中 K 是一完备一致凸双曲空间 X 非空闭凸子集,是一 X 到 K 的非扩张收缩,$\{T_i\}_i^k:K\to X$ 是一有限簇的一致 L-Lipschitzian 且$(\{\upsilon_n^{(i)}\},\{\mu_n^{(i)}\},\zeta^{(i)})$-全渐近非扩张非自映象(由定义 3 可得),且$\{S_i\}_i^k:K\to K$,是一有限簇的一致 L-Lipschitzian 且$(\{\upsilon_n^{(i)}\},\{\mu_n^{(i)}\},\zeta^{(i)})$-全渐近非扩张映象(由定义 2 可得),使得满足以下条件:1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\upsilon_n^{(i)}<\infty$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu_n^{(i)}<\infty$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\hat{\upsilon}_n^{(i)}<\infty$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\hat{\mu}_n^{(i)}<\infty$,$i=1,2,\cdots,k$;2) 存在一常数 $M^*>0$ 使得 $\zeta^{(i)}\leqslant M^*r$,$\hat{\zeta}^{(i)}\leqslant M^*r$,$\forall r\geqslant 0$。

注 1 不失一般性,可设$\{T_i\}_i^k:K\to X$ 且$\{S_i\}_i^k:K\to K$ 两者是 L-Lipschitzian,且$(\{\upsilon_n\},\{\mu_n\},\zeta)$-全渐近满足条件 1)与 2)。事实上,设 $\upsilon_n=\max\{\upsilon_n^{(i)},\hat{\upsilon}_n^{(i)},i=1,2,\cdots,k\}$,$\mu=\max\{\mu_n^{(i)},\hat{\mu}_n^{(i)},i=1,2,\cdots,k\}$,$L=\max\{L_i,\hat{L}_i,i=1,2,\cdots,k\}$且 $\zeta=\max\{\zeta^{(i)},\hat{\zeta}^{(i)},i=1,2,\cdots,k\}$,则$\{T_i\}_i^k:K\to X$,且$\{S_i\}_i^k:K\to K$ 是满足所要求条件的映象。

引理 1[26] 设$\{a_n\}$,$\{\lambda_n\}$及$\{c_n\}$是非负序列,使得 $a_{n+1}\leqslant(1+\lambda_n)a_n+c_n$,$n\geqslant 1$。若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda_n<\infty$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n<\infty$,则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在。进一步,若$\liminf\limits_{n\to\infty}a_n=0$,则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$。

引理 2[27] 设(X,d,W)是一致凸的双曲空间具单调一致凸性模 η。设 $x\in X$ 且$\{\alpha_n\}$是一$[a,b]$中的序列对一些 $a,b\in(0,1)$。如果$\{x_n\}$和$\{y_n\}$是 X 中的序列使得$\limsup\limits_{n\to\infty}d(x_n,x)\leqslant c$,并且$\lim\limits_{n\to\infty}d(W(x_n,y_n,\alpha),x)=c$,对一些 $c\geqslant 0$,则$\lim\limits_{n\to\infty}d(x_n,y_n)=0$。

引理 3[28] 设(X,d,W)是一完备一致凸双曲空间具单调一致凸性模。则 X 中的每一有界序列$\{x_n\}$依照 X 的任一非空闭凸子集 K 有唯一的渐近中心。称 X 中的序列$\{x_n\}$为 Δ-收敛于 $x\in X$,如果 x 是$\{x_n\}$的每一子序列$\{u_n\}$的唯一渐近中心。这种情况下记 Δ-$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$,并称 x 为序列$\{x_n\}$的 Δ-极限。

引理 4[1] 设$\{a_n\}$,$\{\lambda_n\}$和$\{c_n\}$是非负序列,使得 $a_{n+1}\leqslant(1+\lambda_n)a_n+c_n$,$n\geqslant 1$。如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda_n<\infty$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n<\infty$,

则$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$存在。如果存在一子序列$\{a_{n_i}\}\subset\{a_n\}$使得$a_{n_i}\to 0$,则$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$。

2 主要结果

定理 1 设K是一完备一致凸的双曲空间X的非空闭凸子集具单调一致凸性模η,并设$\{T_i\}_i^k:K\to X$,是一有限簇一致L-Lipschitzian 且$(\{\upsilon_n\},\{\mu_n\},\zeta)$-全渐近非扩张非自映象,再设$\{S_i\}_i^k:K\to K$是一有限簇一致$L$-Lipschitzian 且$(\{\upsilon_n\},\{\mu_n\},\zeta)$-全渐近非扩张映象,如果$F:=\bigcap_{i=1}^k F(T_i)\cap F(S_i)\neq\varnothing$并且满足下面的条件:i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\upsilon_n<\infty$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu_n<\infty$;ii) 存在常数$a,b,c\in(0,1)$满足$0<b(1-c)\leqslant\frac{1}{2}$使得$\{\alpha_n\},\{\beta_n\}\subset[a,b]$;iii) 存在一常数$M^*>0$使得$\zeta(r)\leqslant M^* r,r\geqslant 0$;iv) $d(S_ix,T_i(PT_i)^{n-1}y)\leqslant d(S_i^nx,T_i(PT_i)^{n-1}y)$对一切$x,y\in K$且$i=1,2,\cdots,k$。则由(2)式定义的序列$\{x_n\}$Δ-收敛于一点$p\in F$($T_i$与$S_i$的一公共不动点,$i=1,2,\cdots,k$)。

证明 i) 首先证对每一个$p\in F$以下极限存在

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,p)\text{且}\lim_{n\to\infty} d(x_n,F)。\tag{3}$$

事实上,因$p\in F,p=Pp$,且S_i与$T_i(i,j=1,2,\cdots,k,i\neq j)$是全渐近的,由条件 iii)有

$$\begin{aligned}d(y_n,p)&=d(W(S_j^nx_n,T_j(PT_j^{n-1})x_n,\beta_n),p)\leqslant(1-\beta_n)d(S_j^nx_n,p)+\beta_n d(T_j(PT_j)^{n-1}x_n,p)=\\&(1-\beta_n)d(S_j^nx_n,S_j^np)+\beta_n d(T_j(PT_j)^{n-1}x_n,T_j(PT_j)^{n-1}p)\leqslant(1-\beta_n)\{d(x_n,p)+\upsilon_n\zeta(d(x_n,p))+\mu_n\}+\\&\beta_n\{d(x_n,p)+\upsilon_n\zeta d((x_n,p))+\mu_n\}=d(x_n,p)+\upsilon_n\zeta(d(x_n,p))+\mu_n\leqslant(1+\upsilon_nM^*)d(x_n,p)+\mu_n\end{aligned}\tag{4}$$

$$\begin{aligned}d(x_{n+1},p)&=d(W(S_i^nx_n,T_i(PT_i^{n-1})y_n,\alpha_n),p)\leqslant(1-\alpha_n)d(S_i^nx_n,p)+\alpha_n d(T_i(PT_i)^{n-1}y_n,p)\leqslant\\&(1-\alpha_n)\{d(x_n,p)+\upsilon_n\zeta(d(x_n,p)+\mu_n\}+\alpha_n\{d(y_n,p)+\upsilon_n\zeta(d(y_n,p))+\mu_n\}\leqslant\\&(1-\alpha_n)\{(1+\upsilon_nM^*)d(x_n,p)+\mu_n\}+\alpha_n\{(1+\upsilon_nM^*)d(y_n,p)+\mu_n\}。\end{aligned}\tag{5}$$

将(4)式代入(5)式化简得

$$d(x_{n+1},p)\leqslant(1+\sigma_n)d(x_n,p)+\xi_n,\forall n\geqslant 1\text{ 且 }p\in F,\tag{6}$$

所以

$$d(x_{n+1},F)\leqslant(1+\sigma_n)d(x_n,F)+\xi_n,\forall n\geqslant 1,\tag{7}$$

其中$\sigma_n=\upsilon_nM^*(1+\alpha_n(1+\upsilon_nM^*))$,$\xi_n=(1+\alpha_n(1+\upsilon_nM^*))\mu_n$。由于 i),有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_n<\infty\text{ 且 }\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n<\infty。\tag{8}$$

由引理 1 可知,极限$\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,F)$与$\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,p)$对每一个$p\in F$存在。

ii) 接下来证明

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,T_ix_n)=0\text{ 且 }\lim_{n\to\infty} d(x_n,S_ix_n)=0,i=1,2,\cdots,k。\tag{9}$$

事实上依照(3)式对每一给定的$p\in F$,$\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,p)$存在。不失一般性,可设

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,p)=r\geqslant 0\tag{10}$$

由(4)式有

$$\liminf_{n\to\infty} d(y_n,p)\leqslant\limsup_{n\to\infty} d(y_n,p)\leqslant\lim_{n\to\infty}\{(1+\upsilon_nM^*)d(x_n,p)+\mu_n\}=r。\tag{11}$$

因为

$$\begin{aligned}d(T_i(PT_i)^{n-1}y_n,p)&=d(T_i(PT_i)^{n-1}y_n,T_i(PT_i)^{n-1}p)\leqslant d(y,p)+\upsilon_n\zeta(d(y_n,p))+\mu_n\leqslant\\&(1+\upsilon_nM^*)d(y_n,p)+\mu_n,\forall n\geqslant 1,\end{aligned}$$

并且

$$d(S_i^nx_n,p)\leqslant d(x_n,p)+\upsilon_n\zeta(d(x_n,p))+\mu_n\leqslant(1+\upsilon_nM^*)d(x_n,p)+\mu_n,\forall n\geqslant 1,$$

则有

$$\limsup_{n\to\infty} d(T_i(PT_i)^{n-1}y_n,p)\leqslant r,\tag{12}$$

且

$$\limsup_{n\to\infty} d(S_i^nx_n,p)\leqslant r。\tag{13}$$

此外,由(6)式可得

$$d(x_{n+1},p)=d(W(S_i^nx_n,T_i(PT_i)^{n-1}y_n,\alpha_n),p)\leqslant(1+\sigma_n)d(x_n,p)+\xi_n。\tag{14}$$

这意味着

$$\lim_{n\to\infty} d(W(S_i^nx_n,T_i(PT_i)^{n-1}y_n,\alpha_n),p)=r。\tag{15}$$

由(12)～(15)式和引理 2 得

$$\lim_{n\to\infty} d(S_i^n x_n, T_i(PT_i)^{n-1} y_n)=0, i=1,2,\cdots,k。\tag{16}$$

类似可证得

$$\lim_{n\to\infty} d(S_j^n x_n, T_j(PT_j)^{n-1} x_n)=0, j=1,2,\cdots,k。\tag{17}$$

由条件 iv),依照(16)、(17)式有

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, T_i(PT_i)^{n-1} y_n)\leqslant \lim_{n\to\infty} d(S_i^n x_n, T_i(PT_i)^{n-1} y_n)=0,\tag{18}$$

且

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, T_j(PT_j)^{n-1} y_n)\leqslant \lim_{n\to\infty} d(S_j^n x_n, T_j(PT_j)^{n-1} y_n)=0。\tag{19}$$

因为 $S_j^n x_n \in K, S_j^n x_n = PS_j^n x_n$。由(4)、(17)式有

$$\begin{gathered} d(y_n, S_j^n x_n)=d(W(S_j^n x_n, T_j(PT_j)^{n-1} x_n, \beta_n), S_j^n x_n)\leqslant \\ (1-\beta_n) d(S_j^n x_n, S_j^n x_n)+\beta_n d(T(PT)^{n-1} x_n, S_j^n x_n)\to 0(n\to\infty)。\end{gathered}\tag{20}$$

观察到 $d(x_n, y_n)\leqslant d(x_n, T_j(PT_j)^{n-1} x_n)+d(T_j(PT_j)^{n-1} x_n, S_j^n x_n)+d(S_j^n x_n, y_n)$。

从(19)、(20)式得

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)=0。\tag{21}$$

联合(18)式即

$$\begin{gathered} d(x_n, T_i(PT_i)^{n-1} x_n)\leqslant d(x_n, T_i(PT_i)^{n-1} y_n)+d(T_i(PT_i{}^{n-1} y_n, T_i(PT_i)^{n-1} x_n)= \\ d(x_n, T_i(PT_i)^{n-1} y_n)+d(x_n, y_n)+\upsilon_n \zeta(d(x_n, y_n))+\mu_n\leqslant \\ d(x_n, T_i(PT_i)^{n-1} y_n)+(1+\upsilon_n M^*) d(x_n, y_n)+\mu_n\to 0。\end{gathered}\tag{22}$$

另一方面,由条件 iv),$d(x_n, T_i(PT_i)^{n-1} x_n)\leqslant d(S_i^n x_n, T_i(PT_i)^{n-1} x_n)$。因此由(18)、(21)式得

$$\begin{gathered} d(S_i^n x_n, T_i(PT_i)^{n-1} x_n)\leqslant d(S_i^n x_n, T_i(PT_i)^{n-1} y_n)+d(T_i(PT_i)^{n-1} y_n, T_i(PT_i)^{n-1} x_n)\leqslant \\ d(S_i^n x_n, T_i(PT_i)^{n-1} y_n)+Ld(y_n, x_n)\to 0(n\to\infty)。\end{gathered}\tag{23}$$

由条件 iv),$d(x_n, T_i(PT_i)^{n-1} x_n)\leqslant d(S_i^n x_n, T_i(PT_i)^{n-1} x_n)$。因此由(23)式有

$$d(S_i^n x_n, x_n)\leqslant d(S_i^n x_n, T_i(PT_i)^{n-1} x_n)+d(T_i(PT_i)^{n-1} x_n, x_n)\to 0(n\to\infty),$$

连同(18)式表明

$$\begin{gathered} d(x_{n+1}, x_n)=d(W(S_i^n x_n, T_i(PT_i) y_n, \alpha_n), x_n)\leqslant \\ (1-\alpha_n) d(S_i^n x_n, x_n)+\alpha_n d(T_i(PT_i)^{n-1} y_n, x_n)\to 0(n\to\infty)。\end{gathered}\tag{24}$$

因此(19)、(22)、(24)式,对每一 $i=1,2,\cdots,k$,有

$$\begin{gathered} d(x_n, T_i x_n)\leqslant d(x_n, x_{n+1})+ \\ d(x_{n+1}, T_1(PT_1)^n x_{n+1})+d(T_i(PT_i)^n x_{n+1}, T_i(PT_i)^n x_n)+d(T_i(PT_i)^n x, Tx)\leqslant(1+L) d(x_n, x_{n+1})+ \\ d(x_{n+1}, T_i(PT_i)^n x_{n+1})+Ld((PT_i)^n x_n, x_n)=(1+L) d(x_n, x_{n+1})+d(x_{n+1}, T_i(PT_i)^n x_{n+1})+ \\ Ld(PT_i(PT)^{n-1} x_n, Px_n)\leqslant(1+L) d(x_n, x_{n+1})+d(x_{n+1}, T_i(PT_i)^n x)+Ld(T_i(PT_i)^{n-1} x_n, x_n)\to 0(n\to\infty)。\end{gathered}\tag{25}$$

由条件 iv)有 $d(S_i x_n, T_i(PT_i)^{n-1} x_n)\leqslant d(S_i^n x_n, T_i(PT_i)^{n-1} x_n)$。它根据(20)、(22)和(23)式有

$$\begin{gathered} d(x_n, S_i x_n)\leqslant d(x_n, T_i(PT_i)^{n-1} x_n)+d(S_i x_n, T_i(PT_i)^{n-1} x_n)\leqslant \\ d(x_n, T_i(PT_i)^{n-1} x_n)+d(S_i^n x_n, T_i(PT_i)^{n-1} x_n)\to 0(n\to\infty)。\end{gathered}\tag{26}$$

所以,方程(9)得证。

iii) 下面证明

$$\omega_W(x_n):=\bigcup_{\{u_n\}\subset\{x_n\}} A(\{u_n\})\subset F,\tag{27}$$

并且 $\omega_W(x_n)$ 仅由一个点构成。事实上,设 $u\in\omega_W(x_n)$,则存在一 $\{x_n\}$ 的子序列 $\{u_n\}$ 使得 $A(\{u_n\})=\{u\}$。由引理3,存在一 $\{u_n\}$ 的子序列 $\{v_n\}$ 使得 $\Delta\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} v_n=v\in K$。根据(9)式有,$\lim\limits_{n\to\infty} d(v_n, T_i v_n)=0$,$\lim\limits_{n\to\infty} d(v_n, S_i v_n)=0$,$i=1,2,\cdots,k$。由(24)式这表明 $\{x_n\}$ 是 K 中的一柯西列。则 $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, v)$ 存在,且 $\lim\limits_{n\to\infty}\inf d(x_n, v)=0$,由(14)式和引理1,则 $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, v)=0$,有 $v\in F(T)$。由引理3,$u=v$。意味着 $\omega_W(x_n)\subset F$。

下面证明 $\omega_W(x_n)$ 由一点构成。设 $\{u_n\}$ 是 $\{x_n\}$ 的一子序列具 $A(\{u_n\})=\{u\}$ 并设 $A(\{x_n\})=\{x\}$。因 $u\in\omega_W(x_n)\subset F$,由(9)式知此极限 $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, u)$ 存在。由引理3,有 $x=u$。结论得证。

iv) 最后证 $\{x_n\}$ Δ-收敛于 F 中的一点。

事实上,根据(3)式此序列 $\{d(x_n, p)\}$ 对每一 $p\in F$ 收敛。由(9)式和(27)式有,$\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, S_i x_n)=0$,$\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, T_i x_n)=0$,$\omega_W(x_n)\subset F$ 和 $\omega_W(x_n)$ 仅由一点构成。这表明 $\{x_n\}$ Δ-收敛于 F 中的一点。 证毕

下面的结果可以由定理1立即获得。

定理2　设 C 是一完备 $CAT(0)$ 空间 X 的有界闭凸子集，设 $T_i:C\to X, i=1,2$，是一致 L-Lipschitzian 且 $(\{\upsilon_n\},\{\mu_n\},\zeta)$-全渐近非扩张非自映象，并设 $S_i:C\to C, i=1,2$，是一致 L-Lipschitzian 且 $(\{\upsilon_n\},\{\mu_n\},\zeta)$-全渐近非扩张映象。如果 $F=\bigcap_{i=1}^{2}F(T_i)\cap F(S_i)\neq\varnothing$，并满足下面的条件：i) $\sum_{n=1}^{\infty}\upsilon_n<\infty$，$\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n<\infty$；ii) 存在常数 a，$b\in(0,1)$ 满足 $0<b(1-c)\leqslant\frac{1}{2}$ 使得 $\{\alpha_n\},\{\beta_n\}\subset[a,b]$；iii) 存在一常数 $M^*>0$ 使得 $\zeta(r)\leqslant M^*r, r\geqslant 0$；iv) $d(x,T_iy)\leqslant d(S_ix,T_iy)$，对任意 $x,y\in C$ 和 $i=1,2$。则由(1)式定义的序列 $\{x_n\}$ Δ-收敛于点 $p^*\in F(T_i$ 和 S_i 的公共不动点，$i=1,2)$。

证明　取 $i=1,2, K=C\subset CAT(0)X$，利用双曲空间对 $CAT(0)$ 空间的包含关系并简化定理1中的条件 iv) 为：$d(x,T_iy)\leqslant d(S_ix,T_iy)$，对任意 $x,y\in C$ 且 $i=1,2$。由凸结构可设(2)式为

$$\begin{cases}x_1\in K\\ x_{n+1}=W(S_i^nx_n,T_i(^PT_i)n-1y_n,\alpha_n)\overset{i=1}{=}P((1-\alpha_n)S_1^nx_n\oplus\alpha_nT_1(PT_1)^{n-1}y_n)\\ y_n=W(S_j^nx_n,T_j(^PT_j)n-1x_n,\beta_n)\overset{j=2}{=}P((1-\beta_n)S_2^nx_n\oplus\beta_nT_2(PT_2)^{n-1}x_n),\ \forall n=1。\end{cases}$$

显然(1)式是(2)式的特例，因此定理2的结论可以由定理1立即获得。　证毕

由定理2可得定理3。

定理3　设 C 是一完备 $CAT(0)$ 空间 X 的有界闭凸子集。设 $T_i:C\to C$ 和 $S_i:C\to C, i=1,2$，是一致 L-Lipschitzian 且 $(\{\upsilon_n\},\{\mu_n\},\zeta)$-全渐近非扩张映象。如果 $F=\bigcap_{i=1}^{2}F(T_i)\cap F(S_i)\neq\varnothing$，并且满足定理2中 i)～iv)，则如下定义序列 $\{x_n\}$

$$\begin{cases}x_1\in C\\ x_{n+1}=(1-\alpha_n)S_1^nx_n\oplus T_i^nx_n, n\geqslant 1\\ y_n=(1-\beta_n)S_2^nx_n\oplus T_2^nx_n\end{cases}\tag{28}$$

Δ-收敛于 T_i 和 S_i 的一公共不动点，$i=1,2$。

证明　因为 $T_i, i=1,2$ 是一从 C 到 C 的自映象，取 $P=I$(C 上恒等映象)，则 $T_i(PT_i)^{n-1}=T_i^n$。于是定理3的结论可以从定理2立即获得。　证毕

注2　定理2是文献[1]的主要结果定理3.5。

定理3证明和扩展了 Agawals-O'Regan-Sahu[22] 的从巴拿赫空间到 $CAT(0)$ 空间的结果，以及改进和扩展了 Sahin[21] 的主要结果。

参考文献：

[1] Chang S S, Wang L, Lee H W J, et al. Strong and Δ-convergence for mixed type total asymptotically nonexpansive mappings in $CAT(0)$ spaces[J]. Fixed Point Theory and Applications, 2013, 122(1): 1687-1812.

[2] Abdul R K, Hafiz F, Muhammad A A K. An implicit algorithm for two finite families of nonexpansive maps in hyperbolic spaces[J]. Fixed point theory and applications. com/content/2012/1/54. doi: 10.1186/1687-1812-2012-54.

[3] Goebel K, Kirk W A: Iteration processes for nonexpansive mappings Topological Methods in Nonlinear Functional Analysis[C]//Singh S P, Thomeier S, Watson B. Contemp Math Am Math Soc AMS, Providence, RI, 1983, 21: 115-123.

[4] Goebel K, Reich S. Uniform convexit, hyperbolic geometry, and nonexpansive mappings[M]. New York: Marcel Dekker, 1984.

[5] Dhompongsa S, Panyanak B. On Δ-convergence theorems in $CAT(0)$ spaces[J]. Comput Math Appl, 2008, 56(10): 2572-2579.

[6] Kirk W A, Panyanak B. A concept of convergence in geodesic spaces[J]. Nonlinear Anal, Theory Methods Appl, 2008, 68(12): 3689-3696.

[7] Espinola R, Fernandez-Leon A. $CAT(k)$-spaces, weak convergence and fixed points[J]. J Math Anal Appl, 2009, 353(1): 410-427.

[8] Laowang W, Panyanak B. Strong and Δ-convergence theorems for multivalued mappings in $CAT(0)$ spaces[J]. J Inequal Appl, 2009, 2009: 730132.

[9] Shahzad N. Invariant approximations in $CAT(0)$ spaces[J]. Nonlinear Anal, Theory Methods Appl, 2009, 70(12): 4338-4340.

[10] Nanjaras B, Panyanak B, Phuengrattana W. Fixed point theorems and convergence theorems for Suzuki-generalized nonexpansive mappings in $CAT(0)$ spaces[J]. Nonlinear Anal Hybrid Syst, 2010, 4(1): 25-31.

[11] Laowang W, Panyanak B. Approximating fixed points of

nonexpansive nonself mappings in $CAT(0)$ spaces[J]. Fixed Point Theory Appl, 2010, doi: 10.1155/2010/367274.

[12] Leustean L. A quadratic rate of asymptotic regularity for $CAT(0)$-spaces[J]. J Math Anal Appl, 2007, 325(1): 386-399.

[13] Cho Y J, Ciric L, Wang S H. Convergence theorems for nonexpansive semigroups in $CAT(0)$ spaces[J]. Nonlinear Anal, 2011, doi: 10.1016/j.na.2011.05.082.

[14] Abkar A, Eslamian M. Fixed point and convergence theorems for different classes of generalized nonexpansive mappings in $CAT(0)$ spaces[J]. Comput Math Appl, 2011, doi: 10.1016/j.camwa.2011.12.075.

[15] Nanjaras B, Panyanak B. Demiclosed principle for asymptotically nonexpansive mappings in $CAT(0)$ spaces[J]. Fixed Point Theory Appl, 2010, doi: 10.1155/2010/268780.

[16] He J S, Fang D H, Lopez G, et al. Mann's algorithm for nonexpansive mappings in $CAT(0)$ spaces[J]. Nonlinear Anal, 2012, 75: 459-468.

[17] Khan S H, Abbas M. Strong and Δ-convergence of some iterative schemes in $CAT(0)$ spaces[J]. Comput Math Appl, 2011, 61: 109-116.

[18] Khan A R, Khamsi M A, Fukharuddin H. Strong convergence of a general iteration scheme in $CAT(0)$ spaces[J]. Nonlinear Anal, 2011, 74: 783-791.

[19] Chang S S, Wang L, Lee J, Chan H W, et al: Demiclosed principle and Δ-convergence theorems for totalasymptotically nonexpansive mappings in $CAT(0)$ spaces[J]. Appl Math Comput, 2012, 219: 2611-2617.

[20] Tang J F, Chang S S, Lee J, et al: Iterative algorithm and Δ-convergence theorems for total asymptotically nonexpansive mappings in $CAT(0)$ spaces[J]. Abstr Appl Anal, 2012, doi: 10.1155/2012/965751.

[21] Sahin A, Basarir M. On the strong convergence of modified S-iteration process for asymptotically quasi-nonexpansive mappings in $CAT(0)$ space[J]. Fixed Point Theory Appl, 2013, doi: 10.1186/1687-1812-2013-12.

[22] Agarwal R P, O'Regan D, Sahu D R. Iterative construction of fixed points of nearly asymptotically nonexpansive mappings[J]. J Nonlinear Convex Anal, 2007, 8(1): 61-79.

[23] Bridson M, Haeiger A. Metric spaces of Non-Positive Curvature[M]. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1999.

[24] Takahashi W. A convexity in metric spaces and nonexpansive mappings[J]. Kodai Math Sem Rep, 1970, 22: 142-149.

[25] Shimizu T, Takahashi W. Fixed points of multivalued mappings in certain convex metric spaces[J]. Topol Methods Nonlinear Anal, 1996, 8: 197-203.

[26] Chidume C E, Ofoedu E U. A new iteration process for approximation of common fixed points for finite families of total asymptotically nonexpansive mappings[J]. International Joumal of mathematics and Mathematical Sciences, doi: 10.1155/2009/615107.

[27] Khan A R, Fukhar-ud-din H, Khan M A A. An implicit algorithm for two finite families of nonexpansive maps in hyperbolic spaces[J]. Fixed Point Theory Appl, 2012, doi: 10.1186/1687-1812-2012-54.

[28] Leustean L. Nonexpansive iterations in uniformly convex W-hyperbolic spaces[EB/OL]. (2010-05-19)[2013-08-01]. http://www.researchgate.net/publication/228740327_Nonexpansive_iterations_in_uniformly_convex_W_-hyperbolic_spaces.

Mixed Type for Two Finite Family of Total Asymptotically Nonexpansive Mappings in Hyperbolic Spaces

LEI Xiancai, BI Dan

(Institute for Mathematics, Yibin University, Yibin Sichuan 644000, China)

Abstract: The problem on the common fixed points of a finite family of total asymptotically nonexpansive mappings and another total asymptotically nonexpansive nonself mappings is discussed in Hyperbolic spaces: propose the following iterative scheme: $\begin{cases} x_1 \in K \\ x_{n+1} = W(S_i^n x_n, T_i(^P T_i)n-1 y_n, \alpha_n), i=1,2,\cdots,k \\ y_n = W(S_j^n x_n, T_j(^P T_j)n-1 x_n, \beta_n), j=1,2,\cdots,k, i\neq j, \forall n\geqslant 1 \end{cases}$. The proof of Δ-convergence theorem is divide into four steps, proved the mixed iterative sequence $\{x_n\}$ Δ-converges to a common fixed point of F.

Key words: hyperbolic space; total asymptotically nonexpansive nonself mappings; Δ-convergence; mixed type iterative scheme

(责任编辑 黄 颖)