DOI:10.11721/cqnuj20150117

时间尺度上半正三点边值问题多个正解的存在性*

王　颖，高智中
(安徽科技学院 数理与信息工程学院数学系，安徽 滁州 233100)

摘要:研究了时间尺度上半正三点边值问题 $u^{\Delta\nabla}(t)+f(t,u(t))=0,t\in(0,T)\subset T,\beta u(0)-\gamma u^{\Delta}(0)=0,\ u^{\Delta}(T)=\alpha u(\eta)$ 的正解的存在性问题。利用 Leggett-Williams 不动点定理,得到了时间尺度上二阶三点边值问题在非线性项 f 有一个负的下界(即 $f(t,u)\geqslant -M,M>0$)的情况下至少有两个正解存在的结果,并举了一个例子验证得到的主要结论。此结论推广了以往研究大部分是在 f 非负的情况下得到的结果。

关键词:正解;半正;时间尺度
中图分类号:O175.8　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2015)01-0087-05

本文将研究以下时间尺度上二阶三点边值问题正解的存在性

$$u^{\Delta\nabla}(t)+f(t,u(t))=0,\ t\in(0,T)\subset T,\tag{1}$$

$$\beta u(0)-\gamma u^{\Delta}(0)=0,\ u^{\Delta}(T)=\alpha u(\eta)。\tag{2}$$

假设以下条件成立:

(H_1) $\beta\geqslant 0,\gamma>0,\eta\in(0,T),0<\alpha<\dfrac{\beta}{\gamma},d=\beta-\alpha\beta\eta-\alpha\gamma>0$;

(H_2) $f:C_{ld}([0,T]\times[0,\infty))\rightarrow[0,\infty)$;

(H_3) 存在常数 $M>0$,对任意的$(t,u)\in[0,T]\times[0,+\infty)$,有 $f(t,u)\geqslant -M$。

近年来,时间尺度上边值问题正解的研究已成为热点,见文献[1-6],这些研究大部分是在 f 非负的情况下展开的,而允许非线性项 f 有一个负的下界,即 f 在半正的情况下研究时间尺度上边值问题的正解却不是很多,见文献[7-9]。

在文献[6]中,作者探讨了时间尺度上边值问题(1)和(2)在 f 非负的情况下正解的存在性,通过 Twin 不动点定理,得到了至少有两个正解存在的结论。

本文在 $f(t,u)\geqslant -M$ 的情况下继续研究边值问题(1),(2),并利用 Leggett-Williams[10] 不动点定理得到至少有两个正解存在的新的存在性定理,推广了文献[6]及其他类似文献的研究结果。

1 预备知识

关于时间尺度的一些基本定义和定理可见 Atici,Guseinov[11] 及 Bohner,Peterson[12]。本节只给出结论要用到的常见引理和不动点定理。

考虑三点边值问题

$$u^{\Delta\nabla}(t)+y(t)=0,\ t\in(0,T)\subset T,\tag{3}$$

$$\beta u(0)-\gamma u^{\Delta}(0)=0,\ u^{\Delta}(T)=\alpha u(\eta),\tag{4}$$

其中 $y(t)\in C_{ld}(T,\mathbf{R}^{+})$。

引理 1[6]　如 $d\neq 0$,则边值问题(3)和(4)有唯一解

$$u(t)=-\int_0^t(t-s)f(s,u(s))\,\nabla s+\frac{\beta t+\gamma}{d}\int_0^T f(s,u(s))\,\nabla s-$$

* **收稿日期**:2013-09-17　**修回日期**:2014-03-12　**网络出版时间**:2015-1-7　16:04
资助项目:安徽科技学院自然科学研究一般项目(No. ZRC2014441)
作者简介:王颖,女,副教授,研究方向为泛函微分方程,E-mail:wyshy@sina.com
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20150107.1604.017.html

$$\frac{\alpha(\beta t+\gamma)}{d}\int_0^\eta(\eta-s)f(s,u(s))\,\nabla s。$$

引理 2[6] 如 $0<\alpha<\dfrac{\beta}{\gamma}$,$d>0$,则边值问题(3),(4)的唯一解 u 满足 $u(t)\geqslant 0$,$t\in[0,T]$。

引理 3[6] 如 $0<\alpha<\dfrac{\beta}{\gamma}$,$d>0$,则唯一解 $u(t)\geqslant\dfrac{t}{T}\|u\|$,$t\in[0,T]$,其中 $\|u\|=\sup\limits_{t\in[0,T]}|u(t)|$。

引理 4 设 ω 是边值问题

$$u^{\Delta\nabla}(t)+1=0,\ t\in(0,T)\subset T, \tag{5}$$

$$\beta u(0)-\gamma u^{\Delta}(0)=0,\ u^{\Delta}(T)=\alpha u(\eta) \tag{6}$$

的唯一解,那么 $\omega(t)\leqslant LR(t)$,其中 $L=\dfrac{A}{r}$,$r=\min\limits_{t\in(0,T)}R(t)$,$R(t)=\dfrac{t}{T}$,$t\in[0,T]$,$A=\dfrac{T\beta+\gamma}{d}\displaystyle\int_0^T\nabla s$。

证明 由引理1得

$$\omega(t)=-\int_0^t(t-s)\,\nabla s+\frac{\beta t+\gamma}{d}\int_0^T\nabla s-\frac{\alpha(\beta t+\gamma)}{d}\int_0^\eta(\eta-s)\,\nabla s\leqslant$$

$$\frac{\beta t+\gamma}{d}\int_0^T\nabla s\leqslant\frac{\beta T+\gamma}{d}\int_0^T\nabla s。$$ 证毕

设 $0<a<b$ 为给定常数,φ 是锥 P 中非负连续凹函数,定义凸集 P_r,$\overline{P}_r$,$P(\varphi,a,b)$ 为

$$P_r=\{y\in P|\ \|y\|<r\},\ \overline{P}_r=\{y\in P|\ \|y\|\leqslant r\},P(\varphi,a,b)=\{y\in P|a\geqslant\varphi(y),\ \|y\|\leqslant b\}。$$

引理 5[10] (Leggett-Williams 不动点定理)设 $T:\overline{P}_c\to\overline{P}_c$ 是完备连续算子,且 φ 是 P 中非负连续凹函数,任取 $y\in\overline{P}_c$,有 $\varphi(y)\leqslant\|y\|$。假设存在常数 $0<a<b<d\leqslant c$,使得

(i) $\{(y\in P(\varphi,b,d)|\varphi(y)>b\}\neq 0$,$\varphi(Ty)>b$,$y\in P(\varphi,b,d)$;

(ii) $\|Ty\|<a$,$\|y\|\leqslant a$;

(iii) $\varphi(Ty)>b$,$y\in P(\varphi,b,d)$,$\|Ty\|>d$。

则 T 在$\overline{P}_c$ 中至少存在3个点 y_1,y_2,y_3 满足 $\|y_1\|<a$,$\varphi(y_2)>b$,$\|y_3\|>a$,$\varphi(y_3)<b$。

2 主要结论

设 $E=C_{ld}[0,T]$ 且 $\|u\|=\sup\limits_{t\in[0,T]}|u(t)|$。定义锥 $P\subset E$,$P=\left\{u\in E|u\text{ 是非负递增函数},u(t)\geqslant\dfrac{t}{T}\|u(t)\|,\right.$ $\left.t\in[0,T]\right\}$。记

$$h=\frac{\beta T+\gamma}{d}\int_0^T\nabla s,\ l=\frac{\gamma}{d}\int_\eta^T\nabla s。$$

定理 1 假设条件(H_1)~(H_3)成立,存在常数 a,b,c 且 $LM<a<a+LM<b<r^2c$,使得

(A_1) $f(t,u)<\dfrac{a}{h}-M$,$0\leqslant t\leqslant T$,$0\leqslant u\leqslant a$;

(A_2) $f(t,u)\geqslant\dfrac{b}{l}-M$,$0\leqslant t\leqslant T$,$b-LM\leqslant u\leqslant\dfrac{b}{r^2}$;

(A_3) $f(t,u)\leqslant\dfrac{c}{h}-M$,$0\leqslant t\leqslant T$,$0\leqslant u\leqslant c$。

则边值问题(1),(2)至少有两个正解存在。

证明 令 $x=M\omega$,其中 ω 是边值问题(5)和(6)的唯一解。由引理4,有 $x(t)=M\omega(t)\leqslant AM\leqslant LM<a$。易证边值问题(1)和(2)有正解 u 当且仅当 $\bar{u}:=u+x$ 是

$$-u^{\Delta\nabla}(t)=h(t,u-x),\ t\in(0,T)\subset T \tag{7}$$

及边值(2)的解且$\bar{u}>x$,$t\in(0,T)$,其中 $h:[0,T]\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}^+$,

$$h(t,y)=\begin{cases}f(t,y)+M,\ (t,y)\in[0,T]\times[0,+\infty)\\ f(t,0)+M,\ (t,y)\in[0,T]\times[-\infty,0)\end{cases}。$$

设 $v\in P$,记

$$Tv(t)=-\int_0^t(t-s)h(s,v-x)\nabla s+\frac{\beta t+\gamma}{d}\int_0^T h(s,v-x)\nabla s-\frac{\alpha(\beta t+\gamma)}{d}\int_0^\eta(\eta-s)h(s,v-x)\nabla s。$$

由引理 1 可知 Tv 为(7)式和(2)式的唯一解。

据引理 2 和引理 3 可知 $T(P)\subset P$，由 Arzela-Ascoli 定理易知 $T:P\to P$。

接下来，要证定理 1 的所有条件满足引理 5。

首先，设非负连续凹函数 $\varphi:P\to[0,+\infty)$，$\varphi(u)=\min\limits_{t\in[0,T]}u(t)$，$u\in P$。

显然，任取 $u\in P$，$\varphi(u)\leqslant\|u\|$。如 $v\in\overline{P}_c$，则 $\|v\|\leqslant c$。

当 $v(t)\geqslant x(t)$ 时，有 $0\leqslant v(t)-x(t)\leqslant v(t)\leqslant c$，故

$$h(t,v(t)-x(t))=f(t,u(t))+M\geqslant 0。$$

由(A_3)，得

$$h(t,v(t)-x(t))\leqslant\frac{c}{h},\ t\in[0,T]。$$

当 $v(t)<x(t)$ 时，$v(t)-x(t)<0$，则 $h(t,v(t)-x(t))=f(t,0)+M\geqslant 0$。再由($A_3$)，得

$$h(t,v(t)-x(t))\leqslant\frac{c}{h},\ t\in[0,T],$$

即当 $v\in\overline{P}_c$ 时，有 $h(t,v(t)-x(t))\leqslant\frac{c}{h}$，$t\in[0,T]$。从而

$$\|Tv(t)\|=\max_{t\in[0,T]}|Tv(t)|=Tv(T)=-\int_0^T(T-s)h(s,v-x)\nabla s+\frac{\beta T+\gamma}{d}\int_0^T h(s,v-x)\nabla s-$$

$$\frac{\alpha(\beta T+\gamma)}{d}\int_0^\eta(\eta-s)h(s,v-x)\nabla s\leqslant\frac{\beta T+\gamma}{d}\int_0^T h(s,v-x)\nabla s\leqslant\frac{c(\beta T+\gamma)}{dh}\int_0^T\nabla s\leqslant c。$$

因此，$T:\overline{P}_c\to\overline{P}_c$。同理，如 $v\in\overline{P}_a$，由(A_1)，同样方法可证得 $T:\overline{P}_a\to P_a$。因此引理 5 的条件(ii)满足。

接下来，验证定理 1 满足引理 5 的条件(i)。取 $v(t)=\frac{b}{r^2}$，则 $v\in P\left(\varphi,b,\frac{b}{r^2}\right)$，$\varphi(v)=\frac{b}{r^2}>b$，故 $\left\{v\in P\left(\varphi,b,\frac{b}{r^2}\right)\middle|\varphi(v)>b\right\}\neq\varnothing$。

如 $v\in P\left(\varphi,b,\frac{b}{r^2}\right)$，则 $b\leqslant v(t)\leqslant\frac{b}{r^2}$，$t\in[0,T]$。因此

$$b-M\omega\leqslant v(t)-x(t)\leqslant v(t)\leqslant\frac{b}{r^2},\ t\in[0,T]。$$

由条件(A_2)，$h(t,v-x)\geqslant\frac{b}{l}$，$t\in[0,T]$。又由 φ 的定义和引理 3，有

$$\varphi(Tv)=\min_{t\in[0,T]}Tv(t)=Tv(0)=\frac{\gamma}{d}\int_0^T h(s,v-x)\nabla s-\frac{\alpha\gamma}{d}\int_0^\eta(\eta-s)h(s,v-x)\nabla s=$$

$$\frac{\gamma}{d}\left[\int_0^\eta(1-\alpha\eta+s\alpha)h(s,v-x)\nabla s+\int_\eta^T h(s,v-x)\nabla s\right]。$$

由 $0<\alpha<\frac{\beta}{\gamma}$，有 $0<\alpha\eta<\frac{\beta\eta}{\beta\eta+\gamma}<1$，故

$$\varphi(Tv)>\frac{\gamma}{d}\int_\eta^T h(s,v-x)\nabla s>\frac{b\gamma}{dl}\int_\eta^T\nabla s>b,$$

即 $\varphi(Tv)>b$，$\forall v\in P\left(\varphi,b,\frac{b}{r^2}\right)$。因此引理 5 的条件(i)满足。

最后，说明引理 5 的条件 (iii) 也满足。假设 $v\in P(\varphi,b,c)$ 且 $\|Tv\|\geqslant\frac{b}{r^2}$，由引理 3 有

$$\varphi(Tv)=\min_{t\in[0,T]}Tv(t)\geqslant\frac{t}{T}\|Tv\|>r\|Tv\|>\frac{b}{r}>b。$$

因此，引理 5 的所有条件均满足。故 T 至少有 3 个正的定点 $\overline{u}_1,\overline{u}_2,\overline{u}_3$ 且 $\|\overline{u}_1\|<a$，$\varphi(\overline{u}_2)>b$，$\|\overline{u}_3\|>a$，$\varphi(\overline{u}_3)<b$。

进而，$u_i=\overline{u}_i-x$ $(i=1,2,3)$ 是(1)和(2)式的解，且

$$\overline{u}_2(t)\geqslant\frac{t}{T}\|\overline{u}_2(t)\|=R(t)\|\overline{u}_2(t)\|\geqslant R(t)\varphi(\overline{u}_2(t))\geqslant bR(t)>LMR(t)>M\omega(t)=x(t);\overline{u}_3(t)\geqslant$$

$$\frac{t}{T}\|\overline{u}_3(t)\|>aR(t)>LMR(t)>M\omega(t)=x(t)。$$

故 $u_2=\overline{u}_2-x$，$u_3=\overline{u}_3-x$ 是边值问题(1)、(2)的正解。 证毕

例 令 $T=\left\{\frac{1}{2^n}:n\leqslant 4\in\mathbf{N}_0\right\}$。在 T 中考虑边值问题

$$u^{\Delta\nabla}(t)+\left(t+\frac{1}{4}\right)\varphi(u(t))-\frac{1}{640}=0,\ t\in(0,1)\subset T, \tag{8}$$

$$u^{\Delta}(0)=u(0),\ u^{\Delta}(1)=\frac{1}{3}u\left(\frac{1}{2}\right), \tag{9}$$

其中

$$\varphi(u)=\begin{cases}\frac{u}{10},0\leqslant u\leqslant\frac{3}{10}\\ \frac{197}{10}u-\frac{147}{25},\frac{3}{10}\leqslant u\leqslant\frac{2}{5}\\ \frac{103}{319}u+\frac{2\ 984}{1\ 595},\frac{2}{5}\leqslant u\leqslant 128\\ \frac{u}{16}+\frac{176}{5},128\leqslant u\leqslant 256\\ \frac{u}{5},u\geqslant 256\end{cases}。$$

令 $\beta=1,\gamma=1,\eta=\frac{1}{2},\alpha=\frac{1}{3}$。则 $0<\alpha<\frac{\beta}{\gamma}$，$d=\frac{1}{2}>0$。取 $M=\frac{1}{640}$，计算得

$$r=\min_{t\in(0,1)}\left\{\frac{t}{T}\right\}=\frac{1}{16},\ L=\frac{A}{r}=\frac{1}{r}\cdot\frac{T\beta+\gamma}{d}\int_0^T\nabla s=64,\ l=\frac{\gamma}{d}\int_\eta^T\nabla s=1,\ h=\frac{T\beta+\gamma}{d}\int_0^T\nabla s=4。$$

选取 $a=\frac{3}{10},b=\frac{1}{2},c=256$，则 $LM=\frac{1}{10}<a<a+LM<b<r^2c$。当 $t\in(0,1)\times[0,+\infty)$ 时，$f(t,u)=\left(t+\frac{1}{4}\right)\varphi(u(t))-\frac{1}{640}\geqslant -M$。又

1) 当 $t\in(0,1)$，$0\leqslant u\leqslant\frac{3}{10}$ 时，有

$$f(t,u)=\left(t+\frac{1}{4}\right)\varphi(u(t))-M\leqslant\frac{5}{4}\times\frac{1}{10}\times\frac{3}{10}-M=\frac{1}{8}a-M<\frac{a}{4}-M=\frac{a}{h}-M。$$

2) 当 $t\in(0,1)$，$b-LM=\frac{2}{5}\leqslant u\leqslant\frac{b}{r^2}=128$ 时，有

$$f(t,u)=\left(t+\frac{1}{4}\right)\varphi(u(t))-M\geqslant\frac{1}{4}\times\left(\frac{103}{319}\times\frac{2}{5}+\frac{2\ 984}{1\ 595}\right)-M=\frac{1}{2}-M=\frac{b}{l}-M。$$

3) 当 $t\in(0,1)$，$0\leqslant u\leqslant 256$ 时，有

$$f(t,u)=\left(t+\frac{1}{4}\right)\varphi(u(t))-M\leqslant\frac{5}{4}\left(\frac{1}{16}\times 256+\frac{76}{5}\right)-M=\frac{c}{h}-M。$$

定理1的所有条件都满足，由定理1可知边值问题(8)和(9)至少有两个正解存在。

参考文献：

[1] Kaufmann E R. Positive solutions of a three-point boundary value problem on a time scale[J]. Electron J Differential Equations, 2003(2003): 1-11.

[2] Anderson D R, Avery R I. An even order three-point boundary value problem on time scales[J]. J Math Anal Appl, 2004(291): 514-525.

[3] Sun H R, Li W T. Positive solutions for nonlinear three-point boundary value problems on time scales[J]. J Math Anal Appl, 2004 (299): 508-524.

[4] Feng M, Zhang X, Ge W. Positive solutions for a class of boundary value problems on time scales[J]. Comput and Math with Appl, 2007(54): 467-475.

[5] Wang D B. Three positive solutions of three-point boundary value problems for p-Laplacian dynamic equations on time

scales[J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods, Applications, 2008(68): 2172-2180.

[6] Wang P G, Wang Y. Existencce of two solutions of a three-point boundary value problem for second order dynamic equations on time scales[J]. Acta Math Sinica, Chinese Series, 2007(50): 701-706.

[7] Bai D Y, Yu J S. Positive solutions of semipositone BVPs for differential systems on time scales[EB/OL]. [2013-09-10]. http://www.paper.edu.cn.

[8] Zhang X G, Sun Y P, Wang X Q. Existence result for semipositone second-order three point boundary value problem [J]. J Math Study, 2004(37): 123-128.

[9] Chen Y. Multiple positive solutions for semipositone m-point boundary value problem[J]. Chinese J Engineering Math, 2009(26): 349-356.

[10] Leggett R W, Williams L R. Multiple positive fixed points of nonlinear operators on ordered banach spaces[J]. Indiana Univ Math J, 1979(28): 673-688.

[11] Bohner M, Peterson A. Dynamic equations on time scales: an introduction with applications[M]. MA: Birkhauser Boston, 2001.

[12] Atici F M, Guseinov G S. On Green's functions and positive solutions for boundary value problems on time scales [J]. J Comput Appl Math, 2002(141): 75-99.

The Existence of Multiple Positive Solutions for Semipositone Three-point Boundary Value Problem on Time Scales

WANG Ying, GAO Zhigong

(Department of Mathematics of College of Mathematic, Physics and Information Engineering, Anhui Science and Technology University, Chuzhou Anhui 233100, China)

Abstract: This paper considers the existence of positive solutions for semipositone three-point boundary value problem on time scales. That is $u^{\Delta\nabla}(t)+f(t,u(t))=0$, $t\in(0,T)\subset T$, $\beta u(0)-\gamma u^{\Delta}(0)=0$, $u^{\Delta}(T)=\alpha u(\eta)$. By applying the Leggett-Williams fixed point theorem, some conditions guaranteeing the existence of at least two positive solutions for second-order three-point boundary value problem on time scales is established under the nonlinear term f has a lower bound (be $f(t,u)\geqslant -M$, $M>0$). As an application, an example is given to demonstrate the main result. The result generalized the past research is mostly in the case of f nonnegative.

Key words: positive solutions; semipositone; time scales

(责任编辑 游中胜)