DOI:10.11721/cqnuj20150209

求解自由边界问题的投影收缩算法*

张 守 贵

(重庆师范大学 数学学院,重庆 401331)

摘要:利用线性互补方法,得到了求解自由边界问题的投影收缩算法。采用差商对问题的近似导出系数矩阵正定的线性互补问题,得到了基于不动点理论的投影收缩算法。用投影和正定性质分析了算法收敛性。并给出了的算法实现过程,数值算例验证了该方法的可行性和有效性。

关键词:自由边界;差商;线性互补;不动点;投影;收缩算法

中图分类号:O241.182 **文献标志码:**A **文章编号:**1672-6693(2015)02-0050-03

障碍问题、渗流问题等自由边界问题广泛存在于工程和科学实际问题中。由于这类问题在所考虑区域内部是非线性的,通常需要通过数值方法求解。利用变分不等式理论,文献[1]等研究了这类问题解的适定性。差分法[2-4]和有限元法[5-6]是目前求解这类问题的主要数值方法。利用二阶差商可将问题转化为有限维线性互补问题或向量变分不等式[2-4],从而可用各种投影迭代算法求解这类问题[2-4,7-11]。本文利用二阶中心差商对问题近似后导出标准的正定线性互补问题,再用不动点方法得到投影收缩算法及其收敛性结论[11],并给出了具体的算例分析。

1 数学模型及离散形式

有如下非线性问题

$$\begin{cases}-\Delta v(x)\geqslant f(x),x\in\Omega,\\ v(x)\geqslant 0,x\in\Omega,\\ v(x)(-\Delta v(x)-f(x))=0,x\in\Omega,\\ v(x)=g(x),x\in\Gamma。\end{cases}\tag{1}$$

其中 Ω 是 $\mathbf{R}^2$ 中的一有界区域,其边界 $\Gamma=\partial\Omega$,f 和 g 为已知函数。如果 $f\in L^2(\Omega)$,$g\in L^2(\Gamma)$,则问题(1)存在唯一解[1]。采用差商近似表示问题(1),则得

$$\begin{cases}-\Delta_h u(x)\geqslant f(x),x\in\Omega,\\ u(x)\geqslant 0,x\in\Omega,\\ u(x)(-\Delta_h u(x)-f(x))=0,x\in\Omega,\\ u(x)=g(x),\ x\in\Gamma。\end{cases}\tag{2}$$

这里向量函数 $u(x)$ 代表 $v(x)$ 的近似值,用差商符号 Δ_h 近似表示拉普拉斯算子。

把已知边界条件代入问题(2),得如下关于 u 的线性互补问题

$$\begin{cases}u\geqslant 0,\\ \mathbf{A}u+b\geqslant 0,\\ u^{\mathrm{T}}(\mathbf{A}u+b)=0。\end{cases}\tag{3}$$

其中 $\mathbf{A}$ 为 N 阶方阵,u 和 b 为 N 维列向量。本文使用等步长二阶中心差商,则 $\mathbf{A}$ 为每一行的非零元素最多 5 个的对称正定稀疏矩阵。参照文献[2-4,7]可知(3)式等价于如下约束优化问题

$$\begin{cases}\min \dfrac{1}{2}u^{\mathrm{T}}(\mathbf{A}u+b),\\ \text{s. t.}\ \ u\geqslant 0。\end{cases}$$

* **收稿日期:**2013-12-05 **修回日期:**2014-12-17 **网络出版时间:**2015-01-22 11:57

资助项目:国家自然科学基金(No. 11101454);重庆市科技项目(No. cstc2013jcyjA30001);重庆师范大学科研项目(No. 13XL001)

作者简介:张守贵,男,副教授,研究方向为微分方程数值解法,E-mail:shgzhang9621@sina.com.cn

网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20150122.1157.026.html

且上述问题的解 u^* 是存在且唯一的,从而得问题(3)解的存在唯一性。

2 投影收缩算法和收敛性分析

若利用向量 $a\in\mathbf{R}^N$ 的如下运算符号 $[a]_+:=\max\{0,a\}$,则问题(3)等同于 $u=[u-(Au+b)]_+$。此问题又等价于求解非光滑函数 $e(u)=u-[u-(\boldsymbol{A}u+b)]_+$ 的零点。借鉴文献[11]可采用投影收缩算法求得线性互补问题(3)的近似解,从而得到自由边界问题(1)的数值解,具体算法过程如下。

第一步,任取初始点 $u^{(0)}\in\mathbf{R}_+^N$ 和误差限 $\tau>0$,置 $k=0$;

第二步,依次计算 $e(u^{(k)})=u^{(k)}-[u^{(k)}-(\boldsymbol{A}u^{(k)}+b)]_+$;$d(u^{(k)})=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{I})e(u^{(k)})$;$\rho(u^{(k)})=\dfrac{\|e(u^{(k)})\|^2}{\|d(u^{(k)})\|^2}$;$u^{(k+1)}=[u^{(k)}-\rho(u^{(k)})d(u^{(k)})]_+$;

第三步,如果 $\|u^{(k+1)}-u^{(k)}\|\leqslant\tau\|u^{(k+1)}\|$,则停止迭代并得到数值解 $u^{(k+1)}$。否则,置 $k:=k+1$,返回第二步。

下面用向量内积和欧氏范数证明上述算法的收敛性。用 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 和 $\|\cdot\|$ 分别表示 N 维实 Hilbert 空间上的内积与范数,记向量 $u=(u_1,u_2,\cdots,u_N)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^N$,$v=(v_1,v_2,\cdots,v_N)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^N$。由向量内积 $\langle u,v\rangle=u^{\mathrm{T}}v=\sum\limits_{i=1}^{N}u_iv_i$,则有 $\langle u,u\rangle=\|u\|^2$,且 $\langle\boldsymbol{A}u,v\rangle=\langle u,\boldsymbol{A}v\rangle$。

参照文献[11],先给出一个有关算法序列的引理,便可得到算法收敛性结果。

引理 1　对线性互补问题(3)的解 u^* 和任意的 $u\in\mathbf{R}^N$,则有 $\langle u-u^*,(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})e(u)\rangle\geqslant\|e(u)\|^2$。

证明　由 u^* 是问题(3)的解和算法易得

$$\langle u^*-[u-(\boldsymbol{A}u+b)]_+,u-(\boldsymbol{A}u+b)-[u-(\boldsymbol{A}u+b)]_+\rangle\leqslant 0。$$

从而有

$$\langle[u-(\boldsymbol{A}u+b)]_+-u^*,e(u)\rangle\geqslant\langle[u-(\boldsymbol{A}u+b)]_+-u^*,\boldsymbol{A}u+b\rangle,$$

进而得

$$\langle u-u^*,e(u)\rangle\geqslant\|e(u)\|^2+\langle[u-(\boldsymbol{A}u+b)]_+-u^*,\boldsymbol{A}u+b\rangle。$$

由于

$$\langle e(u),\boldsymbol{A}(u-u^*)\rangle=\langle e(u),\boldsymbol{A}u+b\rangle-\langle e(u),\boldsymbol{A}u^*+b\rangle,$$

由以上两式相加并利用矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的正定性得

$$\langle e(u),(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})(u-u^*)\rangle\geqslant\|e(u)\|^2+\langle u-u^*,\boldsymbol{A}u+b\rangle-\langle e(u),\boldsymbol{A}u^*+b\rangle=$$
$$\|e(u)\|^2+\langle[u-(\boldsymbol{A}u+b)]_+-u^*,\boldsymbol{A}u^*+b\rangle+\langle u-u^*,\boldsymbol{A}(u-u^*)\rangle\geqslant\|e(u)\|^2+\langle[u-(\boldsymbol{A}u+b)]_+-u^*,\boldsymbol{A}u^*+b\rangle。$$

由投影定义和 u^* 是问题(3)的解得

$$\langle[u-(\boldsymbol{A}u+b)]_+-u^*,\boldsymbol{A}u^*+b\rangle=$$
$$\langle[u-(\boldsymbol{A}u+b)]_+,\boldsymbol{A}u^*+b\rangle-\langle u^*,\boldsymbol{A}u^*+b\rangle=\langle[u-(\boldsymbol{A}u+b)]_+,\boldsymbol{A}u^*+b\rangle\geqslant 0。$$

证毕

定理 2　若 $\{u^{(k)}\}$ 是投影收缩算法产生的序列,则该序列收敛于线性互补问题(3)的唯一解 u^*,即 $\lim\limits_{k\to\infty}u^{(k)}=u^*$。

证明　由算法和引理 1 可得

$$\|u^{(k+1)}-u^*\|^2=\|[u^{(k)}-\rho(u^{(k)})d(u^{(k)})]_+-u^*\|^2\leqslant\|u^{(k)}-\rho(u^{(k)})d(u^{(k)})-u^*\|^2=$$
$$\|u^{(k)}-u^*\|^2-2\rho(u^{(k)})\langle u^{(k)}-u^*,d(u^{(k)})\rangle+\rho^2(u^{(k)})\|d(u^{(k)})\|^2=$$
$$\|u^{(k)}-u^*\|^2-2\rho(u^{(k)})\langle u^{(k)}-u^*,(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{I})e(u^{(k)})\rangle+\rho(u^{(k)})\|e(u^{(k)})\|^2\leqslant$$
$$\|u^{(k)}-u^*\|^2-2\rho(u^{(k)})\|e(u^{(k)})\|^2+\rho(u^{(k)})\|e(u^{(k)})\|^2=\|u^{(k)}-u^*\|^2-\rho(u^{(k)})\|e(u^{(k)})\|^2。$$

除非 $u^{(k)}$ 为线性互补问题(3)的解,否则 $\rho(u^{(k)})=\dfrac{\|e(u^{(k)})\|^2}{\|d(u^{(k)})\|^2}>0$。因此序列 $\{\|u^{(k)}-u^*\|\}$ 收敛,且其极限为零。

证毕

3 算例分析

用本文方法对一个具体问题进行数值测试。考虑在正方形区域 $\Omega=(-1.5,1.5)\times(-1.5,1.5)$ 中的如下问题[5-6] $\begin{cases}-\Delta u(x)+2\geqslant 0,x\in\Omega,\\ u(x)\geqslant 0,x\in\Omega,\\ u(x)(-\Delta u(x)+2)=0,x\in\Omega,\\ u(x)=g(x),x\in\Gamma。\end{cases}$ 其中 Dirichlet 边界条件由解析解 $u=\begin{cases}\dfrac{r^2}{2}-\ln(r)-\dfrac{1}{2},r>1\\ 0,r\leqslant 1\end{cases}$ 确定,$r=\sqrt{x^2+y^2}$。文献[6]中给出了粗网格下的解析解结果如图 1。采用本文方法和迭代终止条件 $\|u^{(k+1)}-u^{(k)}\|_\infty\leqslant 10^{-4}\|u^{(k+1)}\|_\infty$,步长为 0.15 的数值解如图 2。由图 1、图 2 可知,本文方法所得结果和文献[6]中的数值解是一致的。

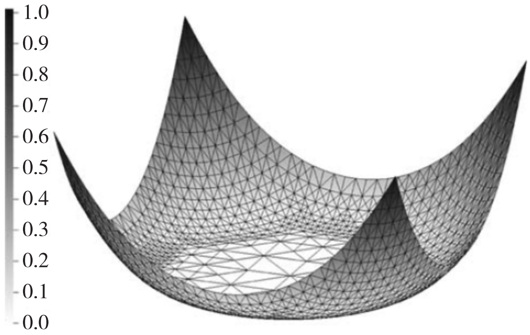

图 1　文献[6]中的结果

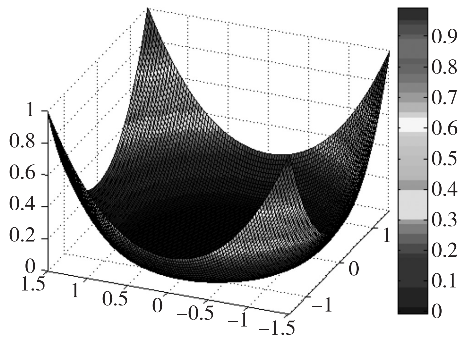

图 2　本文数值解结果

参考文献：

[1] 王耀东.变分不等方程[M].北京：高等教育出版社，1987.
Wang Y D. Variational inequation[M]. Beijing：Higher Education Press，1987.

[2] Lin Y，Cryer C W. An alternating direction implicit algorithm for the solution of linear complementarity problems arising from free boundary problems[J]. Appl Math Optim，1985，13(1)：1-17.

[3] 张守贵.自由边界问题的线性互补投影迭代算法[J].西南师范大学学报：自然科学版，2013，38(7)：15-19.
Zhang S G. The linear complementarity-projection iterative algorithm for the seepage with free boundary problem[J]. Journal of Southwest China Normal University：Natural Science Edition，2013，38(7)：15-19.

[4] 张守贵.自由边界问题的自适应预测-校正算法[J].西南师范大学学报：自然科学版，2014，39(9)：1-5.
Zhang S G. On a self-adaptive prediction-correct algorithm for free boundary problem[J]. Journal of Southwest China Normal University：Natural Science Edition，2014，39(9)：1-5.

[5] Wang F，Han W M，Cheng X L. Discontinuous Galerkin methods for solving elliptic variational inequalities[J]. Siam J Math Anal，2010，48(2)：708-733.

[6] Braess D，Carstensen C，Hoppe R H W. Convergence analysis of a conforming adaptive finite element method for an obstacle problem[J]. Numer Math，2007，107：455-471.

[7] 韩继业，修乃华，戚厚铎.非线性互补理论与算法[M].上海：上海科学技术出版社，2006.
Han J Y，Xiu N H，Qi H D. Nonlinear complementarity theory and algorithm[M]. Shanghai：Shanghai Science and Technology Press，2006.

[8] 彭建文.变分不等式的新的外梯度方法[J].重庆师范大学学报：自然科学版，2009，26(4)：9-16.
Peng J W. A new extragradient method for variational inequalities[J]. Journal of Chongqing Normal University：Natural Science，2009，26(4)：9-16.

[9] 王传伟.一个求解变分不等式问题的投影算法[J].重庆师范大学学报：自然科学版，2005，22(1)：6-10.
Wang C W. A projection algorithm for solving variational inequalities[J]. Journal of Chongqing Normal University：Natural Science，2005，22(1)：6-10.

[10] 孙洪春，孙敏，李国成.广义变分不等式的一个投影型算法及收敛速度[J].重庆师范大学学报：自然科学版，2005，22(3)：53-57.
Sun H C，Sun M，Li G C. A projection-type method of the general variational inequalities and its convergence rate[J]. Journal of Chongqing Normal University：Natural Science，2005，22(3)：53-57.

[11] He B S. A new method for a class of linear variational inequalities[J]. Math Program，1994，66(2)：137-144.

A Projection and Contraction Algorithm for the Free Boundary Problem

ZHANG Shougui
(College of Mathematics Science，Chongqing Normal University，Chongqing 401331，China)

Abstract：A projection and contraction algorithm based on linear complementarity method for solving the free boundary problem is proposed in this paper. When the difference quotient is used to approximate the problem，we obtain a positive definite linear complementarity problem which is equivalent to a fixed point problem. Then a projection and contraction algorithm is deduced. Using projection principle and positive definiteness，we obtain the convergence of the algorithm. The process of the iterative algorithm is provided，and the numerical results are presented to illustrate the feasibility and effectiveness of this algorithm.

Key words：free boundary；difference quotient；linear complementarity；projection；contraction algorithm

(责任编辑　黄　颖)