DOI:10.11721/cqnuj20150210

一类带时滞具有非线性传染率的 SIR 模型的稳定性分析*

王　娅，杨志春
(重庆师范大学 数学学院，重庆 401331)

摘要:考虑了一类具有潜伏期与恢复期的传染病模型。首先建立了带时滞具有非线性传染率的 SIR 模型,其次应用线性化系统的方法证明了系统的局部稳定性。最后,利用 Lyapunov 泛函方法研究了系统在地方病平衡点的全局渐近稳定性,获得系统全局稳定性的一个充分条件为:当基本再生数 $R_0>1$,当 $\mathrm{sgn}(S(t)-S^*(t))=\mathrm{sgn}(I(t)-I^*(t))=\mathrm{sgn}(R(t)-R^*(t))$时,本文所讨论的 SIR 模型在地方病平衡点是全局渐近稳定的;当 $R_0<1$,通过迭代技巧,讨论了该模型在地方病平衡点处的全局渐近稳定性。

关键词:SIR 模型;局部稳定性;全局稳定性
中图分类号:O213.2　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2015)02-0053-04

众所周知,传统的、经典的 SIR 流行病模型由 Kermack 和 Mckendrick 在 1927 年提出。后来随着时间的推移,许许多多学者从不同的角度对该模型进行深入思考和研究,得到了一些新的传染病模型。如:文献[1]中的研究者考虑了传染率形式为$\frac{\beta SI}{N}$和$\beta(N)SI$ 的 SIRS 传染病模型,证明了该模型在地方病平衡点处和无病平衡点处都是全局渐近稳定的。文献[2-7]中的研究者们分别研究了非线性发生率的传染病模型,讨论了模型在无病平衡点处和地方病平衡点处的稳定性。文献[8-9]中的研究者分别讨论了有媒介传染的时滞传染病模型和具有饱和发生率的时滞传染病模型,并且都证明了模型在无病平衡点和地方病平衡点的稳定性。文献[10]中的研究者分析了具有非线性传染率且带时滞的 SIR 传染病模型,其具体模型见(1)式。

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}S(t)}{\mathrm{d}t}=A-dS(t)-\beta S^2(t)I(t-\tau),\\ \dfrac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t}=\beta S^2(t)I(t-\tau)-rI(t)-dI(t),\\ \dfrac{\mathrm{d}R(t)}{\mathrm{d}t}=rI(t)-dR(t)。\end{cases}\tag{1}$$

其中 $S(t)$,$I(t)$,$R(t)$分别为易感染者,感染者和恢复者。A 为该种群的最大接收率,d 为 $S(t)$,$I(t)$,$R(t)$的死亡率,β 为接触率,γ 为恢复者的恢复率,$\tau\geqslant 0$ 为感染者将疾病传染给易感染者滞后时间。

这个模型考虑了疾病的潜伏期,其缺陷是没有考虑疾病的恢复期,本文主要讨论一类具有潜伏期与恢复期,和更一般非线性传染率的传染病模型,见(2)式。

本文将研究该系统在无病平衡点和地方病平衡点的局部渐近稳定性与全局渐近稳定性。

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}S(t)}{\mathrm{d}t}=A-dS(t)-\beta S^n(t)I(t-\tau),\\ \dfrac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t}=\beta S^n(t)I(t-\tau)-rI(t-\tau)-dI(t),\\ \dfrac{\mathrm{d}R(t)}{\mathrm{d}t}=rI(t-\tau)-dR(t)。\end{cases}\tag{2}$$

* **收稿日期**:2013-10-20　**修回日期**:2014-01-10　**网络出版时间**:2015-01-22 11:57
资助项目:国家自然科学基金(No. 11471061);重庆市自然科学基金(No. CSTC2014JCYJA40004);重庆市高校创新团队资助计划(No. KJTD201308)
作者简介:王娅,女,研究方向为微分方程与动力系统;**通讯作者**:杨志春,教授,E-mail: yangzhch@126.com
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20150122.1157.025.html

1 系统平衡点的局部渐近稳定性

设系统(2)的初始条件为

$$S(\theta)=\varphi_1(\theta),I(\theta)=\varphi_2(\theta),R(\theta)=\varphi_3(\theta),\varphi_i(\theta)\geqslant 0,\theta\in[-\tau,0],\varphi_i(0)>0(i=1,2,3)。$$

记它的无病平衡点:$E_0(S_0,0,0)$,及地方病平衡点:$E_*(S^*,I^*,R^*)$,这里

$$S_0=\frac{A}{d},S^*=\sqrt[n]{\frac{r+d}{\beta}},I^*=\frac{A-dS^*}{\beta(S^*)^n},R^*=\frac{rI^*}{d},R_0=\frac{\beta\left(\frac{A}{d}\right)^n}{r+d},$$

其中地方病平衡点存在的条件是 $R_0>1$。

定理1 当 $R_0<1$ 时,系统(2)在无病平衡点 E_0 是局部渐近稳定的。当 $R_0>1$ 时,系统(2)的无病平衡点 E_0 是不稳定的。

证明 系统(2)在 E_0 的特征方程为

$$(\lambda+d)^2[\lambda+d-\mathrm{e}^{-\lambda\tau}(\beta S_0^n-r)]=0。\tag{3}$$

(3)式有两个负根 $\lambda_1=\lambda_2=-d$,它的其他根由下列等式决定:

$$f(\lambda)=\lambda+d-\mathrm{e}^{-\lambda\tau}(\beta S_0^n-r)。$$

若 $R_0<1,\tau=0$,令 $f(\lambda)=0$ 得 $\lambda_3=\beta S_0^n-(d+r)<0$。

$$\tau>0,f(\lambda)=\lambda+d-\mathrm{e}^{-\lambda\tau}(\beta S_0^n-r)=0。\tag{4}$$

设 $\mathrm{i}w(w>0)$ 是(4)式的解,则有 $\mathrm{i}w+d-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}w\tau}(\beta S_0^n-r)=0$。整理得

$$d=\beta S_0^n\cos w\tau-r\cos w\tau,w=r\sin w\tau-\beta S_0^n\sin w\tau。$$

$w^2=(\beta S_0^n-r)^2-d^2<0$,与 $w>0$ 矛盾。所以(3)式的根均有负实部。

若 $R_0>1,f(0)=r+d-\beta S_0^n<0$, $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}f(\lambda)=+\infty$。

因此 $f(\lambda)=0$ 有正实根,所以此时无病平衡点是不稳定的。 证毕

定理2 当 $R_0>1$ 时,系统(2)在地方病平衡点 E_* 是局部渐近稳定的。

证明 系统(2)在 E_* 处的特征方程为

$$(\lambda+d)[\lambda^2+p_1\lambda+p_0+\mathrm{e}^{-\lambda\tau}(q_1\lambda+q_0)]=0,\tag{5}$$

其中,$p_1=n\beta(S^*)^{n-1}I^*+2d,p_0=d[n\beta(S^*)^{n-1}I^*+d],q_1=r-\beta(S^*)^n$,

$$q_0=[r-\beta(S^*)^n][n\beta(S^*)^{n-1}I^*+d]+n\beta^2(S^*)^{2n-1}I^*。$$

显然 $\lambda=-d$ 是(5)式的一个负根,则(5)式的其他根由下列方程决定

$$\lambda^2+p_1\lambda+p_0+\mathrm{e}^{-\lambda\tau}(q_1\lambda+q_0)=0。\tag{6}$$

当 $\tau=0$ 时,(6)式化为

$$\lambda^2+(p_1+q_1)\lambda+p_0+q_0=0。$$

由于

$$p_1+q_1=n\beta(S^*)^{n-1}I^*+2d-r-\beta(S^*)^n=n\beta(S^*)^{n-1}I^*+d>0,$$

$$p_0+q_0=d[n\beta(S^*)^{n-1}I^*+d]+[r-\beta(S^*)^n][n\beta(S^*)^{n-1}I^*+d]+n\beta^2(S^*)^{2n-1}I^*=$$

$$n\beta^2(S^*)^{2n-1}I^*>0。$$

因此,系统(1)在 $\tau=0$ 时,特征根都是负实根,所以在地方病平衡点是稳定的。

当 $\tau>0$ 时,令 $\mathrm{i}\omega$ 是(6)的解,则

$$(\mathrm{i}\omega)^2+p_1(\mathrm{i}\omega)+p_0+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}[(q_1(\mathrm{i}\omega)+q_0]=0。$$

分离实、虚部且两边平方相加得

$$\omega^4+(p_1^2-2p_0-q_1^2)\omega^2+p_0^2-q_0^2=0,\tag{7}$$

令 $u=\omega^2$,则(7)式化为

$$u^2+(p_1^2-2p_0-q_1^2)u+p_0^2-q_0^2=0。\tag{8}$$

由于 $p_1^2-2p_0-q_1^2=[n\beta(S^*)^{n-1}I^*+2d]^2-2d[n\beta(S^*)^{n-1}I^*+d]-[r-\beta(S^*)^n]=$

$$[n\beta(S^*)^{n-1}I^*+d]^2>0,$$

$$p_0^2-q_0^2=(p_0-q_0)(p_0+q_0)=$$

$$n\beta^2(S^*)^{2n-1}I^*[2n\beta d(S^*)^{n-1}I^*+2d^2+n\beta^2(S^*)^{2n-1}I^*]>0。$$

即(8)式没有正根得证。　　证毕

2 系统平衡点的全局渐近稳定性

定理 3　当 $R_0<1$ 时，系统(2)在无病平衡点 E_0 处是全局渐近稳定的。

证明　由系统(2)可得

$$\frac{\mathrm{d}S(t)}{\mathrm{d}t}\leqslant A-ds。$$

由比较定理知 $\limsup\limits_{t\to\infty} S(t)\leqslant\frac{A}{d}$，因而对足够小的 $\varepsilon>0$，有 $T_1>0$，当 $t>T_1$ 时，$S(t)\leqslant\frac{A}{d}+\varepsilon$。

由(2)式的第二个方程可知

$$\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t}\leqslant\beta\left(\frac{A}{d}+\varepsilon\right)^n I(t-\tau)-rI(t-\tau)-dI(t)。$$

由于 $R_0<1$ 时，对足够小 ε 有 $\beta\left(\frac{A}{d}+\varepsilon\right)^n<r+d$，则 $\limsup\limits_{t\to\infty} I(t)=0$。因而对足够小的 $\varepsilon>0$，有 $T_2>T_1+\tau$，使得当 $t>T_2$ 时，$I(t)\leqslant\varepsilon$，再由(2)式的第一个方程得

$$\frac{\mathrm{d}S(t)}{\mathrm{d}t}\geqslant A-dS(t)-\beta\left(\frac{A}{d}+\varepsilon\right)^n\varepsilon,$$

则有

$$\liminf_{t\to\infty} S(t)\geqslant\frac{A-\beta\left(\frac{A}{d}+\varepsilon\right)^n\varepsilon}{d}。$$

令 $\varepsilon\to0$，则 $\liminf\limits_{t\to\infty} S(t)\geqslant\frac{A}{d}$，因此可得 $\lim\limits_{t\to\infty} S(t)=\frac{A}{d}$，同理可得 $\lim\limits_{t\to\infty} I(t)=0$，$\lim\limits_{t\to\infty} R(t)=0$。得证。　　证毕

定理 4　当 $R_0>1$ 时，$\mathrm{sgn}(S(t)-S^*(t))=\mathrm{sgn}(I(t)-I^*(t))=\mathrm{sgn}(R(t)-R^*(t))$，系统(2)在地方病平衡点 E_* 处是全局渐近稳定的。

证明　设 $x=S-S^*$，$y=I-I^*$，$z=R-R^*$。构造 Lyapunov 函数

$$V(t)=|x(t)|+|y(t)|+|z(t)|$$

则

$$\begin{gathered}\dot V(t)=\mathrm{sgn}(x(t))\dot x(t)+\mathrm{sgn}(y(t))\dot y(t)+\mathrm{sgn}(z(t))\dot z(t)=\\ \mathrm{sgn}(x(t))[A-d(x(t)+S^*)]+\mathrm{sgn}(y(t))[-d(y(t)+I^*)]+\\ \mathrm{sgn}(z(t))[-d(z(t)+R^*)]\leqslant -d(|x(t)|+|y(t)|+|z(t)|)。\end{gathered}$$

所以

$$V(t)+d\int_0^t(|x(s)|+|y(s)|+|z(s)|)\mathrm{d}s\leqslant V(0)<+\infty。$$

因此，对任意 $t\geqslant0$，$V(t)$ 在 $[0,t]$ 内有界，同时

$$\int_0^{+\infty}|x(t)|\,\mathrm{d}t<+\infty,\int_0^{+\infty}|y(t)|\,\mathrm{d}t<+\infty。$$

由文献[11]定理 3 的证明可知：

$$\lim_{t\to+\infty}(|x(t)|+|y(t)|+|z(t)|)=0。$$

故 $\lim\limits_{t\to+\infty}S(t)=S^*$，$\lim\limits_{t\to+\infty}I(t)=I^*$，$\lim\limits_{t\to+\infty}R(t)=R^*$。

因此地方病平衡点是全局渐近稳定的。　　证毕

参考文献：

[1] Howie J M. An introduction to semigroupstheory[M]. London: Academic Press, 1976.

[2] Jia J W, Li Q Y. Qualitative analysis of an SIR epidemic model with stage structure[J]. Math Appl, 2007, 198: 106-115.

[3] 匡奕群，邱梅青. 一类具非线性传染率的 SIR 模型平衡点的全局稳定性[J]. 生物数学学报，2007，22：984-988.

Kuang Y Q, Qiu M Q. Global stability of a class of nonlinear infection rate SIR model equilibrium[J]. Journal of Mathematical Biology, 2007, 22: 984-988.

[4] Liu W M, Hethcote H W, Levin S A. Dynamical behavior of epidemiological model withnonlinear incidence rates[J]. Math Biol, 1987, 25: 359-380.

[5] Liu W M, Levin S A, Iwasa Y. Influence of nonlinear incidence rates upon the behavior of SIRS epidemiological models[J]. Math Biol, 1986, 23: 187-204.

[6] Xu R, Ma Z E. Stability of a delayed SIRS epidemic model with a nonlinear incidence rate[J]. Chaos Solitons & Fractals, 2009, 41: 2319-2325.

[7] Xu R, Ma Z E. Wang Z P. Global stability of a delayed SIRS epidemic model with saturation incidence and temporary immunity[J]. Appl Math Comput, 2010, 59: 3211-3221.

[8] Jin Z, Ma Z E, Han M A. Global stability of an SIRS epidemic model with delay[J]. Acta Mathematica Scientia, 2006, 26B(2): 291-306.

[9] Xu R, Ma Z E. Stability of a delay SIRS epidemic model with a nonlinear indence rate[M]. [S. l.]: Chaos Solitons France, 2008.

[10] 李锐,薛亚奎.一类具有非线性传染率的时滞 SIR 模型的分析[J].数学的实践与认识,2009,39(15):98-103.
Li R, Xue Y K. Analysis of a class of delay SIR model with nonlinear incidence rate[J]. Mathematics in Practice and Theory, 2009, 39(15): 98-103.

[11] Liu Z J. Dynamics of positive solutions to SIR and SEIR epidemic models with saturated incidence rates[J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2013, 14: 1286-1299.

Stability Analysis of a Class of Delay SIR Model with Nonlinear Incidence Rate

WANG Ya, YANG Zhichun

(College of Mathematics, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: This paper considers an epidemic model with latent period and the recovery period. Firstly, a class of delay SIR model with nonlinear incidence Rate is formulated. Then, by using the method of linearization of these equations, we prove the local stability of each equilibrium for the systems with delay. Finally, by Lyapunov function we derive global stability of the endemic equilibrium and obtain a sufficient condition for the global stability of the system. If the basic reproductive number $R_0<1$, the disease-free equilibrium is globally stability. If $R_0>1$, $\mathrm{sgn}(S(t)-S^*(t))=\mathrm{sgn}(I(t)-I^*(t))=\mathrm{sgn}(R(t)-R^*(t))$ the endemic equilibrium is globally stability.

Key words: SIR model; local stability; global stability

(责任编辑 游中胜)