DOI:10.11721/cqnuj20150213

具扰动阻尼项波动方程的整体吸引子*

张媛媛[1]，王宏伟[2]
(1. 开封大学 数学教研部，河南 开封 475000；2. 安阳师范学院 数学与统计学院，河南 安阳 455000)

摘要：具扰动阻尼项波动方程在非线性发展方程、无穷维动力系统及数学物理方程中有一定的代表性，定义了一个连续半群，进而通过算子半群的方法，利用发展方程和无穷维动力系统的紧密关系，借助偏微分方程的一些标准技巧研究一类具扰动阻尼项波动方程的初边值问题，利用 Soblev 空间中重要不等式对非线性项进行估计，得到该类方程整体解的存在唯一性，且当空间维数 $N\leqslant 5$ 时，在相对比较弱的条件下证明了上述问题整体吸引子的存在性，所得结果都是新的，并且扩展了文献原有的结果。

关键词：扰动阻尼项；整体解；整体吸引子

中图分类号：O175.29　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1672-6693(2015)02-0068-04

1 预备知识

具扰动阻尼项波动方程是发现较早的一类波动方程，在数学、物理等领域中有着广泛的应用前景，其整体吸引子是近年来偏微分方程研究的热点，目前关于它的研究主要集中在其存在性及维数方面。为了得到整体吸引子的更多性质，文献[1-5]中对一些非线性发展方程的整体吸引子均有论述，Dell'Oro 和 Pata[6-7] 随后的研究又得到许多有意义的结果。本文研究了一类具扰动阻尼项波动方程

$$\varepsilon u_{tt}+\gamma u_t-\Delta u+g(u)=f(x),\Omega\times\mathbf{R}^+,\tag{1}$$

$$u|_{\partial\Omega}=0,\frac{\partial u}{\partial\gamma}|_{\partial\Omega}=0,t>0,\tag{2}$$

$$u(x,0)=u_0(x),u_t(x,0)=u_1(x),x\in\Omega\tag{3}$$

的初边值问题，其中 Ω 是 $\mathbf{R}^N$ 中具光滑边界的有界区域，$0<\varepsilon<1,\varepsilon^2\ll\gamma<1$。记

$$V_1=H_0^1,V_1'=H^{-1}=V_{-1},V_2=H_0^2,\|\cdot\|_p=\|\cdot\|_{L^p}(p\geqslant 1),\|\cdot\|=\|\cdot\|_{L^2},E_\delta=V_{\delta+1}\times V_\delta(\delta\geqslant 0)。$$

算子 $A:V_1\to V_{-1},(Au,v)=(\nabla u,\nabla v),u,v\in V_1$。$D(A)=\{u\in L^2\,|\,Au\in L^2\}=H^2\cap H_0^1,Au=-\Delta u,u\in D(A)$，则 A 是 V_1 上的自伴正算子，且从 V_1 到 V_1' 上和从 $D(A)$ 到 L^2 上同构。定义 $A^s(s\in\mathbf{R})$ 和 Hilbert 空间 $V_s=D(A^{\frac{s}{2}})(s\in\mathbf{R}),(u,v)_s=(A^{\frac{s}{2}}u,A^{\frac{s}{2}}v)$。

先考虑 Cauchy 问题

$$\varepsilon u_{tt}+\gamma u_t+Au+g(u)=f(x),\tag{4}$$

$$u(0)=u_0,u_t(0)=u_1。\tag{5}$$

引理 1[8]　设 X,Y 是 Banach 空间，$X\subset Y$。若 $\varphi\in L^\infty(0,T;X)\cap C_w([0,T];Y)$，则 $\varphi\in C_w([0,T];X)$。

引理 2[9]　若 $(u_0,u_1)\in E_\delta,h\in L^\infty(\mathbf{R}^+;V_\delta)(\delta\geqslant 0)$，则问题(4)～(5)存在唯一解 $u,(u,u_t)\in C_b(\mathbf{R}^+;E_\delta)$，$u_{tt}\in L^\infty(\mathbf{R}^+;V_{\delta-1})$，有估计

$$\|A^{\frac{\delta}{2}}u_t\|^2+\|A^{\frac{\delta}{2}}u\|^2+\|A^{\frac{\delta+1}{2}}u\|^2\leqslant C\|(u_0,u_1)\|_{E_\delta}\mathrm{e}^{-\delta t}+C_2,C_2=C(\|(u_0,u_1)\|_{V_\delta})。$$

引理 3[9]　设 u 是问题(4)～(5)在定理 1 中所述的解，g 满足条件(1)，则 $g'(u)u_t\in L^\infty(\mathbf{R}^+;V_\sigma)$，当 $N\leqslant 4$

* **收稿日期**：2013-11-03　**修回日期**：2014-12-20　**网络出版时间**：2015-01-22 11:30
资助项目：国家自然科学基金(No. 10971199)；河南省教育厅科学技术研究重点项目(No. 13B110137)；2014 年开封市工业科技攻关计划项目(No. 1401012)
作者简介：张媛媛，女，讲师，研究方向为偏微分方程与无穷维动力系统，E-mail：yyuan3721@sina.com
网络出版地址：http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20150122.1130.005.html

时，$0<\sigma<1$；当 $N=5$ 时，$0<\sigma<1-\dfrac{p}{2}$。

2 主要结论

定理 1　假定下列条件成立：

i) $g\in C^2(\mathbf{R})$，$|g(s)|\leqslant K_1(|s|^p+1)$，$|g'(s)|+|g''(s)|\leqslant K_2(|s|^{p-1}+1)$，$1\leqslant p\leqslant\dfrac{N}{(N-2)^+}$，$(a)^+=\max\{0,a\}$，$K_i>0(i=1,2)$。$\int_0^s g(\tau)\mathrm{d}\tau\geqslant -C_1$，$sg(s)-\rho G(s)\geqslant -C_0$，$0<\rho<2$；

ii) $(u_0,u_1)\in E_1$，$f\in V_1$。

则问题(1)～(3)存在唯一解 u，$(u,u_t)\in C_b(\mathbf{R}^+;E_1)$，$u_{tt}\in C_b(\mathbf{R}^+;L^2)$，且当空间维数 $N\leqslant 5$ 时，(u,u_t)连续依赖 E_1 上的初值。

证明　设 $v=u_t+\varepsilon u$，则问题(4)～(5)等价于

$$\varepsilon v_t+(\gamma-\varepsilon^2)v+\varepsilon(\varepsilon^2-\gamma)u+Au+g(u)=f(x),\tag{6}$$

$$v(0)=u_1+\varepsilon u_0\equiv v_0。$$

(6)式与 v 作内积，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H_1(u,v)+K_1(u,v)=0,\tag{7}$$

其中
$$H_1(u,v)=\frac{1}{2}\left(\varepsilon\|v\|^2+\varepsilon(\varepsilon^2-\gamma)\|u\|^2+\|A^{\frac{1}{2}}u\|^2+2\int_\Omega\int_0^u g(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}x-2(f,u)\right)\geqslant$$
$$\frac{1}{2}(\varepsilon\|v\|^2+\varepsilon(\varepsilon^2-\gamma)\|u\|^2+\|A^{\frac{1}{2}}u\|^2)-C_0,$$

$$K_1(u,v)=(\gamma-\varepsilon^2)\|v\|^2+\varepsilon^2(\varepsilon^2-\gamma)\|u\|^2+\varepsilon\|A^{\frac{1}{2}}u\|^2+\varepsilon(g(u),u)-\varepsilon(f,u)。$$

而
$$K_1(u,v)-\rho\varepsilon H_1(u,v)=\left(\gamma-\varepsilon^2\left(1+\frac{\rho}{2}\right)\right)\|v\|^2+\varepsilon^2(\varepsilon^2-\gamma)\left(1-\frac{\rho}{2}\right)\|u\|^2+\varepsilon\left(1-\frac{\rho}{2}\right)\|A^{\frac{1}{2}}u\|^2+$$
$$\varepsilon(g(u),u)-\rho\varepsilon\int_\Omega\int_0^u g(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}x+\varepsilon(\rho-1)(f,u)\geqslant C(\|v\|^2+\|A^{\frac{1}{2}}u\|^2)-C_0,t>0\tag{8}$$

由(7)、(8)式，得

$$\|u_t\|^2+\|u\|^2+\|A^{\frac{1}{2}}u\|^2\leqslant C_1\mathrm{e}^{-\delta t}+C_0,C_1=C(\|(u_0,u_1)\|_{E_0}),C_0=C(\|f\|)。$$

(4)式与 Au_t，Au 分别作内积，得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\varepsilon\|A^{\frac{1}{2}}u_t\|^2+\|Au\|^2-2(f,Au))+\gamma\|A^{\frac{1}{2}}u_t\|^2+(g(u),Au_t)=0,\tag{9}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\gamma}{2}\|A^{\frac{1}{2}}u\|^2+\varepsilon(u_t,Au)\right)+\|Au\|^2+(g(u),Au)=\varepsilon\|A^{\frac{1}{2}}u_t\|^2+(f,Au)\tag{10}$$

(9)$+\varepsilon\times$(10)，得$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H_2(u)+K_2(u)=0$。其中

$$H_2(u)=\frac{1}{2}(\varepsilon\|A^{\frac{1}{2}}u_t\|^2+\|Au\|^2+\gamma\varepsilon\|A^{\frac{1}{2}}u\|^2)+\varepsilon^2(u_t,Au)-2(f,Au)\geqslant$$
$$\frac{\gamma\varepsilon}{4}(\|A^{\frac{1}{2}}u_t\|^2+\|Au\|^2+\|A^{\frac{1}{2}}u\|^2)-C_0。\tag{11}$$

由假定 i)，得

$$(A^{\frac{1}{2}}g(u),A^{\frac{1}{2}}u_t)\leqslant\frac{1}{4}\|A^{\frac{1}{2}}u_t\|^2+\frac{\varepsilon}{4}\|Au\|^2+C(\varepsilon)(\|A^{\frac{1}{2}}u\|^2+\|A^{\frac{1}{2}}u\|^{2p}),\tag{12}$$

$$|(g(u),Au)|\leqslant\frac{1}{4}\|Au\|^2+C(1+\|A^{\frac{1}{2}}u\|^{2p}),2|(f,Au)|\leqslant\frac{1}{4}\|Au\|^2+\|f\|^2。\tag{13}$$

由(11)～(13)式，得

$$K_2(u)\geqslant C(\|A^{\frac{1}{2}}u_t\|^2+\|Au\|^2)-C_1\mathrm{e}^{-\delta t}-C_0。\tag{14}$$

由(10)、(14)式，得 $K_2(u)-\delta H_2(u)\geqslant -C_1\mathrm{e}^{-\delta t}-C_0$。所以

$$\|A^{\frac{1}{2}}u_t\|^2+\|A^{\frac{1}{2}}u\|^2+\|Au\|^2\leqslant C_2\mathrm{e}^{-\delta t}+C_0,C_2=C(\|(u_0,u_1)\|_{E_1})。\tag{15}$$

现在,找问题(4)～(5)的近似解 $u^n(t)=\sum\limits_{j=1}^{n}T_{jn}(t)\omega_j$, $A\omega_j=\lambda_j\omega_j$, $j=1,2,\cdots$, $\{\omega_j\}$是 L^2 中的规范正交基,在 V_1 中也正交,且 $T_{jn}(t)=(u^n,\omega_j)$,满足

$$\varepsilon(u_{tt}^n,\omega_j)+\gamma(u_t^n,\omega_j)+(Au^n,\omega_j)+(g(u^n),\omega_j)=(f(x),\omega_j),t>0,j=1,\cdots,n,\tag{16}$$
$$u^n(0)=u_{0n},u_t^n(0)=u_{1n}。$$

这里$(u_{0n},u_{1n})\to(u_0,u_1)(n\to\infty)$在 E_1 中。(15)式对 u^n 仍成立,可抽子列仍记$\{u^n\}$,使 $u^n\to u$ 在 $L^\infty(\mathbf{R}^+;V_2)$上弱*, $u_t^n\to u_t$ 在 $L^\infty(\mathbf{R}^+;V_1)$上弱*。

由假定 i)易得 $\|g(u^n)-g(u)\|\to0(n\to\infty)$,即$(u,u_t)\in L^\infty(\mathbf{R}^+;E_1)$。又 $\varepsilon u_{tt}=-\gamma u_t-Au-g(u)-f\in L^\infty(\mathbf{R}^+;L^2)$,(16)式在$(0,t)$上积分,得

$$\varepsilon(u_t^n,\omega_j)-\varepsilon(u_{1n},\omega_j)+\gamma(u^n,\omega_j)-\gamma(u_{0n},\omega_j)+\int_0^t(Au^n+g(u^n)-f,\omega_j)\mathrm{d}\tau=0。$$

易证

$$\int_0^t(A^{\frac{1}{2}}u^n,A^{\frac{1}{2}}\omega_j)\mathrm{d}\tau\to\int_0^t(A^{\frac{1}{2}}u,A^{\frac{1}{2}}\omega_j)\mathrm{d}\tau=\int_0^t(Au,\omega_j)\mathrm{d}\tau,$$
$$\left|\int_0^t(g(u^n)-g(u),\omega_j)\mathrm{d}\tau\right|\leqslant\int_0^t\|g(u^n)-g(u)\|\cdot\|\omega_j\|\mathrm{d}\tau\to0$$

(16)式当 $n\to\infty$,并对 t 求导,得到 u 是问题(4)～(5)的解,且$(u,u_t)\in L^\infty(\mathbf{R}^+;E_1)$, $u_{tt}\in L^\infty(\mathbf{R}^+;L^2)$。又 $u\in H^1(0,T;V_2)\subset C([0,T];V_2)$, $u_t\in C_w([0,T];L^2)$,即$(u,u_t)\in C_w([0,T];E_1)$。(9)式在$(t_0,t)$上积分,得

$$\frac{1}{2}(\varepsilon\|A^{\frac{1}{2}}u_t(t)\|^2+\|Au(t)\|^2-(\varepsilon\|A^{\frac{1}{2}}u_t(t_0)\|^2+\|Au(t_0)\|^2))=$$
$$\int_{t_0}^t((f,Au_t)-\gamma\|A^{\frac{1}{2}}u_t\|^2-(g,Au_t))\mathrm{d}\tau\to0,t\to t_0,$$

即$(u,u_t)\in C_b(\mathbf{R}^+;E_1)$, $u_{tt}\in C_b(\mathbf{R}^+;L^2)$。

下证唯一性。即(u,u_t)连续依赖 E_1 上的初值。设 u,v 是问题(4)～(5)在 $C_b(\mathbf{R}^+;E_1)$上分别对应初值 u_0, u_1 和 v_0,v_1 的解,则 $\omega=u-v$ 满足

$$\varepsilon\omega_{tt}+\gamma\omega_t+A\omega+g(u)-g(v)=0,\tag{17}$$
$$\omega(0)=u_0-v_0\equiv\omega_0,\omega_t(0)=u_1-v_1\equiv\omega_1。$$

(17)式与 ω_t, $A\omega_t$ 分别作内积,由假定得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\varepsilon\|\omega_t\|^2+\|A^{\frac{1}{2}}\omega\|^2)+\gamma\|\omega_t\|^2\leqslant\frac{1}{2}\|\omega_t\|^2+C(\|\omega\|^2+\|A^{\frac{1}{2}}\omega\|^2),$$
$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\varepsilon\|A^{\frac{1}{2}}\omega_t\|^2+\|A\omega\|^2)+\gamma\|A^{\frac{1}{2}}\omega_t\|^2\leqslant\frac{1}{2}\|A^{\frac{1}{2}}\omega_t\|^2+C(\|A^{\frac{1}{2}}\omega\|^2+\|A\omega\|^2)。$$

由 Gronwall 不等式得

$$\|(\omega(t),\omega_t(t))\|_{E_0}^2\leqslant C(T)\|(\omega_0,\omega_1)\|_{E_0}^2,t\in[0,T],$$
$$\|(\omega(t),\omega_t(t))\|_{E_1}^2\leqslant C(T)\|(\omega_0,\omega_1)\|_{E_1}^2,t\in[0,T]。$$

证毕

注　定义 $S(t)(u_0,u_1)=(u(t),u_t(t))$,当空间维数 $N\leqslant5$ 时, $S(t)$组成 E_1 中的连续半群。

定理2　在定理1的假定下,在注中定义的连续半群在 E_1 上存在整体吸引子。

证明　先考虑线性方程的 Cauchy 问题: $\varepsilon u_{tt}+\gamma u_t+Au=h$, $u(0)=u_0$, $u_t(0)=u_1$。由(15)式, $B=\{(u,v)\in E_1|\|(u,v)\|_{E_1}^2\leqslant C_0\}$是 $S^\varepsilon(t)$的吸收集,且 $dist(S^\varepsilon(t)B_0,B)\leqslant C(B_0)\mathrm{e}^{-\delta t}$, $\forall B_0\subset E_1$, B_0 为有界集。令 $S_2^\varepsilon(t)$: $E_1\to E_1$, $S_2^\varepsilon(t)(u_0,u_1)=(\bar{u},\bar{u}_t)$,且 $\varepsilon\bar{u}_{tt}+\gamma\bar{u}_t+A\bar{u}=0$; $\bar{u}(0)=u_0$, $\bar{u}_t(0)=u_1$。用定理1同样的方法,得 $\|S_2^\varepsilon(t)\|_{\ell(E_1)}\leqslant C\mathrm{e}^{-\delta t}$, $t\geqslant0$, $\sup\limits_{\varphi\in B}\|S_2^\varepsilon(t)\varphi\|\to0$, $t\to\infty$, B 为 E_1 中的有界集。令

$$S_1^\varepsilon(t)=S^\varepsilon(t)-S_2^\varepsilon(t):E_1\to E_1,S_1^\varepsilon(t)(u_0,u_1)=(\hat{u},\hat{u}_t),且\ \varepsilon\hat{u}_{tt}+\gamma\hat{u}_t+A\hat{u}=f(x)-g(u),\tag{18}$$

这里 u 是问题(4)～(5)在定理1中所述的解,(18)式对 t 求导,设 $\omega=\hat{u}_t$,则

$$\varepsilon\omega_{tt}+\gamma\omega_t+A\omega=-g'(u)u_t,\tag{19}$$

$$\omega(0)=0,\omega_t(0)=\frac{1}{\varepsilon}(f(x)-g(u_0))。\tag{20}$$

由引理 3，$g'(u)u_t \in L^\infty(\mathbf{R}^+;V_\sigma)$，对问题(19)、(20)应用引理 2，得$(\hat{u}_t,\hat{u}_{tt})=(\omega,\omega_t)\in C_b(\mathbf{R}^+;E_\delta)$。所以，$(\hat{u},\hat{u}_t)\in C_b(\mathbf{R}^+;E_{\delta+1})$，$A\hat{u}=-\varepsilon\hat{u}_{tt}-\gamma\hat{u}_t+f(x)-g(u)\in C_b(\mathbf{R}^+;V_\sigma)$。由于 $E_{\delta+1}\subset E_1$，因此对任意有界集 $B_0\subset E_1$，$\bigcup_{t\geqslant 0}S_1^\varepsilon(t)B_0$ 在 E_1 中相对紧，即 $S_1^\varepsilon(t)$是准紧的。所以，$S^\varepsilon(t)$存在整体吸引子。 证毕

参考文献：

[1] Yang Z J. Finite-dimensional attractors for the Kirchhoff equation with a strong dissipation[J]. J Math Anal Appl, 2011,375(2):579-593.

[2] Yang Z J. Global attrator for the Kirchhoff type equation with a strong dissipation[J]. Differ Eqs, 2010, 249(6): 3258-3278.

[3] Chueshov I, Lasiecka I. Long-time behavior of second order evolution equations with nonlinear damping[J]. Mem Amer Math Soc, 2008, 195(3): 912-920.

[4] Nakao M. An attractor for a nonlinear dissipative wave equation of Kirchhoff type[J]. Math Appl Anal, 2009, 353(3): 652-659.

[5] Gatti S, Pata V, Zelik S. A Gronwall-type lemma with parameter and dissipative estimates for PDEs[J]. Nonlinear Anal, 2009, 70(4): 2337-2343.

[6] Dell'Oro F, Pata V. Strongly damped wave equations with critical nonlinearities[J]. Nonlinear Anal, 2012, 75(6): 5723-5735.

[7] Dell'Oro F, Pata V. Long-term analysis of strongly damped nonlinear wave equations[J]. Nonlinearity, 2011, 24(4): 3413-3435.

[8] Temam R. Infinite dimensional dynamical system in mathematics and physics[M]. New York: Springer, 1997.

[9] Yang Z J. Global attrator for a nonlinear wave equation arising in elastic waveguide model[J]. Nonlinear Analysis, 2009, 70(3): 2132-2142.

Global Attractors for a Class of Perturbed Damped Wave Equations

ZHANG Yuanyuan[1], WANG Hongwei[2]

(1. Teaching and Research Department of Mathematics, Kaifeng University, Kaifeng Henan 475000;

2. Department of Mathematics and Statistics, Anyang Normal University, Anyang Henan 455000, China)

Abstract: The class of perturbed damped wave equation has certain representation in infinite-dimensional dynamical systems and mathematical physics equations. A continuous semigroup is defined。And through the method of semigroup, by the close relationship between evolution equations and infinite-dimensional dynamical systems, and using some standard methods, the initial boundary value problem for a class of perturbed damped wave equation is studied. By important inequality in Soblev Space, the non-linear terms are estimated. The existence and uniqueness of the global solutions for this class of equation are obtained. And when the space dimension $N\leqslant 5$, under rather mild conditions the dynamical system associated with the above-mentioned problem possesses a global attractor. The results are new and expand the literature originally results.

Key words: perturbed damped term; global solutions; global attractors

（责任编辑 黄 颖）