DOI:10.11721/cqnuj20150216

非连通图 $C_{4m}\cup G$ 的优美标号*

吴 跃 生
(华东交通大学 理学院,南昌 330013)

摘要:讨论了非连通图 $C_{4m}\cup G$ 的优美性,给出了非连通图 $C_{4m}\cup G$ 是优美图的 4 个充分条件:当图 G 是缺标号值 $k+3m$ 且特征为 k 的交错图时,非连通图 $C_{4m}\cup G$ 存在着缺标号值 $k+1$ 的优美标号;当图 G 是缺标号值 $k+m+1$ 且特征为 k 的交错图时,非连通图 $C_{4m}\cup G$ 存在特征为 $2m+k+1$ 缺标号值 $k+1$ 的交错标号;当图 G 是缺标号值 $k+2m$ 且特征为 k 的交错图时,非连通图 $C_{4m}\cup G$ 存在缺标号值 $k+3m$ 的优美标号;当图 G 是缺标号值 $k+2m+1$ 且特征为 k 的交错图时,非连通图 $C_{4m}\cup G$ 存在缺标号值 $k+m$ 的优美标号。

关键词:优美图;平衡二分图;非连通图;优美标号
中图分类号:O157.5 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-6693(2015)02-0079-05

1 基本概念

$V(G)$和 $E(G)$分别表示图 G 的顶点集和边集,记号$[m,n]$表示整数集合$\{m,m+1,\cdots,n\}$,其中 m 和 n 均为非负整数,且满足 $0\leqslant m<n$。未说明的符号及术语均同文献[1]。

图的优美标号问题是组合数学中一个热门课题[1-13]。

定义 1[1] 对于一个图 $G=(V,E)$,如果存在一个单射 $\theta:V(G)\to[0,|E(G)|]$,使得对所有边 $e=uv\in E(G)$,由 $\theta'(e)=|\theta(u)-\theta(v)|$导出的 $E(G)\to[1,|E(G)|]$是一个双射,则称 G 是优美图,θ 是 G 的一组优美标号,称 θ'为 G 的边上的由 θ 导出的诱导值。

文献[1]已经证明:圈 C_{4m}是交错图。本文讨论了非连通图 $C_{4m}\cup G$ 的优美性。给出非连通图 $C_{4m}\cup G$ 是优美图的 4 个充分条件。

定义 2[2] G 是一个优美二部图,其优美标号为 θ,$V(G)$划分成两个集合 X,Y,如果 $\max\limits_{v\in X}\{\theta(v)\}<\min\limits_{v\in Y}\{\theta(v)\}$,则称 θ 是 G 的交错标号,称 G 是在交错标号 θ 下的交错图,称 G 是在交错标号 θ 下的交错图,标 $\max\limits_{v\in X}\{\theta(v)\}=k$ 为交错图 G 关于交错标号 θ 的特征。

2 主要结果及其证明

定理 1 对任意正整数 m,如果图 G 是特征为 k 且缺 $k+3m$ 标号值的交错图($3m\leqslant k+3m\leqslant|E(G)|$),非连通图 $C_{4m}\cup G$ 存在缺标号值 $k+1$ 的优美标号。

证明 设 $V(C_{4m})=\{x_1,x_2,\cdots,x_{4m}\}$,$E(C_{4m})=\{x_1x_2,x_2x_3,\cdots,x_{4m-1}x_{4m},x_{4m}x_1\}$,设 X,Y 是图 G 的一个二分化,θ_1 是图 G 的交错标号,且$\max\limits_{v\in X}\{\theta_1(v)\}=k<\min\limits_{v\in Y}\{\theta_1(v)\}=k+1$,$|E(G)|=q$。

定义 $C_{4m}\cup G$ 的顶点标号 θ 为:$\theta(x_{2i})=4m-i+1+k,i=1,2,\cdots,2m$;$\theta(x_{2i-1})=i-1+k+2,i=1,2,\cdots,m$;$\theta(x_{2m+1})=k+7m,\theta(x_{2i-1})=i+k,i=m+2,m+3,\cdots,2m$;$\theta(v)=\begin{cases}\theta_1(v),v\in X\\ \theta_1(v)+4m,v\in Y\end{cases}$。

1) $\theta:X\to[0,k]$是单射;$\theta:Y\to[k+4m+1,q+4m]-\{7m+k\}$是单射;$\theta:V(C_{4m})\to[k+2,k+4m]\cup\{7m+k\}$是双射;$\theta$: $V(C_{4m}\cup G)\to[0,q+4m]-\{k+1\}$是单射。

* **收稿日期**:2013-10-18 **修回日期**:2014-11-28 **网络出版时间**:2015-01-22 11:30
资助项目:国家自然科学基金(No. 11261019;No. 11361024);江西省教育厅 2014 年度科学技术研究项目(No. GJJ14380)
作者简介:吴跃生,男,副教授,研究方向为图论,E-mail:616100567@qq.com
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20150122.1130.008.html

2) $\theta'(x_{2i}x_{2i-1})=\begin{cases}|(i-1+k+2)-(4m-i+1+k)|, i=1,2,\cdots,m\\|(i+k)-(4m-i+1+k)|, i=m+2,m+3\cdots,2m\end{cases}=\begin{cases}4m-2i, i=1,2,\cdots,m\\4m-2i+1, i=m+2,m+3,\cdots,2m\end{cases}$,

$\theta'(x_{2m+2}x_{2m+1})=4m$, $\theta'(x_{2i}x_{2i+1})=\begin{cases}|(4m-i+1+k)-(i+k+2)|, i=1,2,\cdots,m-1\\|(4m-i+1+k)-(i+1+k)|, i=m+1,m+3,\cdots,2m-1\end{cases}$, $\theta'(x_{2i}x_{2i+1})=$

$\begin{cases}4m-2i-1, i=1,2,\cdots,m-1\\4m-2i, i=m+1,m+3,\cdots,2m-1\end{cases}$, $\theta'(x_{2m}x_{2m+1})=4m-1$, $\theta'(x_{4m}x_1)=2m-1$, $\theta':E(C_{4m})\to[1,4m]$是双射，$\theta'$：$E(G)\to[4m+1,q+4m]$是双射，$\theta'$：$E(C_{4m}\cup G)\to[1,q+4m]$是双射。 证毕

由1)和2)式的证明可知θ就是非连通图$C_{4m}\cup G$的缺$k+1$标号值的优美标号。

定理2 对任意正整数m，如果图G是缺$k+m+1$标号值且特征为k的交错图($m+1\leqslant k+m+1\leqslant|E(G)|$)，非连通图$C_{4m}\cup G$存在特征为$2m+k+1$，缺标号值$k+1$的交错标号。

证明 设$V(C_{4m})=\{x_1,x_2,\cdots,x_{4m}\}$，$E(C_{4m})=\{x_1x_2,x_2x_3,\cdots,x_{4m-1}x_{4m},x_{4m}x_1\}$，设$X,Y$是图$G$的一个二分化，$\theta_1$是图$G$的交错标号，且$\max_{v\in X}\{\theta_1(v)\}=k<\min_{v\in Y}\{\theta_1(v)\}=k+1$，$|E(G)|=q$。

定义$C_{4m}\cup G$的顶点标号θ为：$\theta(x_{2i})=4m-i+1+k$，$i=1,2,\cdots,m-1$；$\theta(x_{2m})=k+5m+1$，$\theta(x_{2i})=4m-i+k+2$，$i=m+1,m+2,\cdots,2m$；$\theta(x_{2i-1})=i-1+k+2$，$i=1,2,\cdots,2m$；$\theta(v)=\begin{cases}\theta_1(v), v\in X\\\theta_1(v)+4m, v\in Y\end{cases}$。

1) $\theta:X\to[0,k]$是单射，$\theta:Y\to[k+4m+1,q+4m]-\{k+5m+1\}$是单射，$\theta:V(C_{4m})\to[k+2,k+4m]\cup\{k+5m+1\}$是双射，$\theta$：$V(C_{4m}\cup G)\to[0,q+4m]-\{k+1\}$是单射。

2) $\theta'(x_{2i-1}x_{2i})=\begin{cases}|(i-1+k+2)-(4m-i+1+k)|, i=1,2,\cdots,m-1\\|(i-1+k+2)-(4m-i+2+k)|, i=m+1,m+3,\cdots,2m\end{cases}=\begin{cases}4m-2i, i=1,2,\cdots,m-1\\4m-2i+1, i=m+1,m+2,\cdots,2m\end{cases}$,

$\theta'(x_{2m-1}x_{2m})=4m$，$\theta'(x_{2i}x_{2i+1})=\begin{cases}|(4m-i+1+k)-(i+k+2)|, i=1,2,\cdots,m-1\\|(4m-i+1+k+2)-(i+1+k+2)|, i=m+1,m+3,\cdots,2m-1\end{cases}$，$\theta'(x_{2i}x_{2i+1})=$

$\begin{cases}4m-2i-1, i=1,2,\cdots,m-1\\4m-2i, i=m+1,m+3,\cdots,2m-1\end{cases}$，$\theta'(x_{2m}x_{2m+1})=4m-1$，$\theta'(x_{4m}x_1)=2m$，$\theta':E(C_{4m})\to[1,4m]$是双射，$\theta'$：$E(G)\to[4m+1,q+4m]$是双射，$\theta'$：$E(C_{4m}\cup G)\to[1,q+4m]$是双射。

由1)和2)式的证明可知θ就是非连通图$C_{4m}\cup G$的缺$k+1$标号值的优美标号。

令$X_1=X\cup\{x_{2i-1}, i=1,2,\cdots,2m\}$，$Y_1=Y\cup\{x_{2i}, i=1,2,\cdots,2m\}$，则有$\max_{v\in X_1}\{\theta(v)\}=\theta(x_{4m-1})=2m+k+1<\min_{v\in Y_1}\{\theta(v)\}=\theta(x_{4m})=2m+k+2$。所以，$\theta$就是非连通图$C_{4m}\cup G$的缺$k+1$标号值且特征为$2m+k+1$的交错标号。 证毕

定理3 对任意正整数m，如果图G是缺$k+2m+1$标号值且特征为k的交错图($2m+1\leqslant k+2m+1\leqslant|E(G)|$)，非连通图$C_{4m}\cup G$存在缺标号值$k+m$的优美标号。

证明 设$V(C_{4m})=\{x_1,x_2,\cdots,x_{4m}\}$，$E(C_{4m})=\{x_1x_2,x_2x_3,\cdots,x_{4m-1}x_{4m},x_{4m}x_1\}$，设$X,Y$是图$G$的一个二分化，$\theta_1$是图$G$的交错标号，且$\max_{v\in X}\{\theta_1(v)\}=k<\min_{v\in Y}\{\theta_1(v)\}=k+1$，$|E(G)|=q$。

定义$C_{4m}\cup G$的顶点标号θ为：$\theta(x_{2i-1})=4m-i+1+k$，$i=1,2,\cdots,2m$；$\theta(x_{2i})=i+k$，$i=1,2,\cdots,m-1$；$\theta(x_{2i})=i+k+1$，$i=m,m+1,\cdots,2m-1$；$\theta(x_{4m})=k+6m+1$；$\theta(v)=\begin{cases}\theta_1(v), v\in X\\\theta_1(v)+4m, v\in Y\end{cases}$。

1) $\theta:X\to[0,k]$是单射；$\theta:Y\to[k+4m+1,q+4m]-\{6m+1+k\}$是单射；$\theta:V(C_{4m})\to[k+1,k+4m]\cup\{6m+1+k\}-\{m+k\}$是双射；$\theta$：$V(C_{4m}\cup G)\to[0,q+4m]-\{m+k\}$是单射。

2)

$$\theta'(x_{2i}x_{2i-1})=\begin{cases}|(i+k)-(4m-i+1+k)|, i=1,2,\cdots,m-1\\|(i+k+1)-(4m-i+1+k)|, i=m,m+1,\cdots,2m-1\end{cases}=\begin{cases}4m+1-2i, i=1,2,\cdots,m-1\\4m-2i, i=m,m+1,\cdots,2m-1\end{cases};$$

$$\theta'(x_{2i}x_{2i+1})=\begin{cases}|(4m-i+k)-(i+k)|, i=1,2,\cdots,m-1\\|(4m-i+k)-(i+1+k)|, i=m,m+1,\cdots,2m-1\end{cases};$$

$$\theta'(x_{2i}x_{2i+1})=\begin{cases}4m-2i, i=1,2,\cdots,m-1\\4m-1-2i, i=m,m+1,\cdots,2m-1\end{cases};\theta'(x_{4m-1}x_{4m})=4m;\theta'(x_{4m}x_1)=2m+1;$$

θ'：$E(C_{4m})\to[1,4m]$是双射；θ'：$E(G)\to[4m+1,q+4m]$是双射；θ'：$E(C_{4m}\cup G)\to[1,q+4m]$是双射。

由(1)和(2)式的证明可知 θ 就是非连通图 $C_{4m}\cup G$ 的缺 $k+m$ 标号值的优美标号。　证毕

定理 4　对任意正整数 m，如果图 G 是缺 $k+2m$ 标号值且特征为 k 的交错图($2m\leqslant k+2m\leqslant|E(G)|$)，非连通图 $C_{4m}\cup G$ 存在缺标号值 $k+3m$ 的优美标号。

证明　设 $V(C_{4m})=\{x_1,x_2,\cdots,x_{4m}\}$，$E(C_{4m})=\{x_1x_2,x_2x_3,\cdots,x_{4m-1}x_{4m},x_{4m}x_1\}$，设 X,Y 是图 G 的一个二分化，θ_1 是图 G 的交错标号，且$\max\limits_{v\in X}\{\theta_1(v)\}=k<\min\limits_{v\in Y}\{\theta_1(v)\}=k+1$，$|E(G)|=q$。

定义 $C_{4m}\cup G$ 的顶点标号 θ 为：$\theta(x_{2i-1})=4m-i+1+k$，$i=1,2,\cdots,m$；$\theta(x_{2i-1})=4m-i+k$，$i=m+1,m+2,\cdots,2m$；$\theta(x_{2i})=i+k$，$i=1,2,\cdots,2m-1$；$\theta(x_{4m})=k+6m$；$\theta(v)=\begin{cases}\theta_1(v),v\in X\\ \theta_1(v)+4m,v\in Y\end{cases}$。

1)θ：$X\to[0,k]$是单射；θ：$Y\to[k+4m+1,q+4m]-\{6m+k\}$是单射；$\theta$：$V(C_{4m})\to[k+1,k+4m]\cup\{6m+k\}-\{3m+k\}$是双射；$\theta$：$V(C_{4m}\cup G)\to[0,q+4m]-\{3m+k\}$是单射。

2)

$$\theta'(x_{2i}x_{2i-1})=\begin{cases}|(i+k)-(4m-i+1+k)|,i=1,2,\cdots,m\\ |(i+k)-(4m-i+k)|,i=m+1,m+2,\cdots,2m-1\end{cases}=\begin{cases}4m+1-2i,i=1,2,\cdots,m\\ 4m-2i,i=m+1,m+2,\cdots,2m-1\end{cases};$$

$$\theta'(x_{2i}x_{2i+1})=\begin{cases}|(i+k)-(4m-i+k)|,i=1,2,\cdots,m\\ |(i+k)-(4m-i-1+k)|,i=m+1,m+2,\cdots,2m-1\end{cases};$$

$$\theta'(x_{2i}x_{2i+1})=\begin{cases}4m-2i,i=1,2,\cdots,m-1\\ 4m-1-2i,i=m,m+1,\cdots,2m-1\end{cases};\theta'(x_{4m-1}x_{4m})=4m;\theta'(x_{4m}x_1)=2m;$$

θ'：$E(C_{4m})\to[1,4m]$是双射；θ'：$E(G)\to[4m+1,q+4m]$是双射；θ'：$E(C_{4m}\cup G)\to[1,q+4m]$是双射。

由(1)和(2)式的证明可知 θ 就是非连通图 $C_{4m}\cup G$ 的缺 $k+3m$ 标号值的优美标号。　证毕

引理 1　对任意正整数 n，设 C_{4n}是有 $4n$ 个顶点的圈，则 C_{4n}存在特征为 $2n-1$ 且缺 $3n$ 的交错标号。

证明　记圈 C_{4n}上的顶点依次为 $v_1,v_2,\cdots,v_{4n}$，定义圈 C_{4n}的顶点标号 θ 为：

$$\theta(v_{2i-1})=i-1,i=1,2,\cdots,2n,\theta(v_{2i})=\begin{cases}4n+1-i,i=1,2,\cdots,n\\ 4n-i,i=n+1,n+2,\cdots,2n\end{cases}。$$

容易验证，θ 就是圈 C_{4n}的缺 $3n$ 且特征为 $2n-1$ 的交错标号。　证毕

注意到：$3n=(2n-1)+n+1$，由定理 1 和引理 1 有

推论 1　对任意正整数 m，非连通图 $C_{4m}\cup C_{12m-4}$存在缺标号值 $6m-2$ 的优美标号。

例 1　由推论 1 给出的，当 $m=2$ 时，非连通图 $C_8\cup C_{20}$存在缺标号值 10 的优美标号为：非连通图 $C_8\cup C_{20}$中 C_8 的优美标号为：11，17，12，16，23，15，13，14；非连通图 $C_8\cup C_{20}$中 C_{20}的优美标号为：0，28，1，27，2，26，3，25，4，24，5，22，6，21，7，20，8，19，9，18。

由定理 2 和引理 1 有如下推论。

推论 2　对任意正整数 m，非连通图 $C_{4m}\cup C_{4m}$存在缺 $2m$ 标号值且特征为 $4m$ 的交错标号。

例 2　由推论 2 给出的非连通图 $C_{24}\cup C_{24}$的优美标号为：0，48，1，47，2，46，3，45，4，44，5，43，6，41，7，40，8，39，9，38，10，37，11，36，0；13，35，14，34，15，33，16，32，17，31，18，42，19，30，20，29，21，28，22，27，3，26，24，25，13。

引理 2[1]　如果 θ 是图 G 特征为 k 的交错标号，令 $\theta_1(v)=|E(G)|-\theta(v)$，$v\in V(G)$，则 θ_1 是图 G 特征为 $|E(G)|-k-1$ 的交错标号。

由推论 2 和引理 2 有推论 3。

推论 3　对任意正整数 m，非连通图 $C_{4m}\cup C_{4m}$存在特征为 $4m-1$ 且缺 $6m$ 标号值的交错标号。

注意到：$6m=(4m-1)+1+2m$，由推论 3 和定理 2 有推论 4。

推论 4　对任意正整数 m，非连通图 $C_{8m}\cup C_{4m}\cup C_{4m}$存在特征为 $8m$，缺标号值 $4m$ 的优美标号。

由推论 4 和引理 2 有推论 5。

推论 5　对任意正整数 m，非连通图 $C_{8m}\cup C_{4m}\cup C_{4m}$存在特征为 $8m-1$，缺标号值 $12m$ 的优美标号。

注意到：$12m=(8m-1)+1+4m$，由推论 5 和定理 2 有推论 6。

推论6 对任意正整数 m,非连通图 $C_{16m}\cup C_{8m}\cup C_{4m}\cup C_{4m}$ 存在特征为 $16m$,缺标号值 $8m$ 的优美标号。

继续重复上述过程,有推论7。

推论7 对任意正整数 $m,n(n\geqslant 2)$,非连通图 $C_{4m}\cup(\bigcup\limits_{i=2}^{n}C_{2^im})$ 存在缺标号值 $2^{n-1}m$,特征为 2^nm 的优美标号。

由推论7和引理2有推论8。

推论8 对任意正整数 $m,n(n\geqslant 2)$,非连通图 $C_{4m}\cup(\bigcup\limits_{i=2}^{n}C_{2^im})$ 存在缺标号值 $2^{n-1}3m$,特征为 2^nm-1 的优美标号。

例3 由推论8给出的,当 $m=2,n=2$ 时,非连通图 $C_8\cup C_8$ 的缺标号值4,特征为8的优美标号为:0,16,1,15,2,13,3,12,0;5,11,6,14,7,10,8,9,5。由推论7给出的,当 $m=2,n=3$ 时,非连通图 $C_8\cup C_8\cup C_{16}$ 的缺标号值8,特征为16优美标号为:32,0,31,1,30,3,29,4,32; 27,5,26,2,25,6,24,7,27;9,23,10,22,11,21,12,28,13,20,14,19,15,18,16,17,9。由推论7给出的,当 $m=2,n=4$ 时,非连通图 $C_8\cup C_8\cup C_{16}\cup C_{32}$ 的缺标号值16,特征为32的优美标号为:0,64,1,63,2,61,3,60,0; 5,59.6,62,7,58,8,57,5; 55,9,54,10,53,11,52,4,51,12,50,13,49,14,48,15,55; 17,47,18,46,19,45,20,44,21,43,22,42,23,41,24,56,25,40,26,39,27,38,28,37,29,36,30,35,31,34,32,33,17。

注意到:$3n=(2n-1)+n+1$,由定理3和引理1有推论9。

推论9 对任意正整数 m,非连通图 $C_{4m}\cup C_{8m}$ 存在缺标号值 $5m-1$ 的优美标号。

例4 由推论9给出的,当 $m=2$ 时,非连通图 $C_8\cup C_{16}$ 的缺标号值9的优美标号为: 15,8,14,10,13,11,12,20,15; 0,24,1,23,2,22,3,21,4,19,5,18,6,17,7,16,0。

注意到:$3n=(2n-1)+n+1$,由定理4和引理1有推论10。

推论10 对任意正整数 m,非连通图 $C_{4m}\cup C_{8m-4}$ 存在缺标号值 $7m-3$ 的优美标号。

例5 由推论10给出的,当 $m=2$ 时,$C_8\cup C_{12}$ 的缺标号值11的优美标号为: 13,6,12,7,10,8,9,17,13; 0,20,1,19,2,18,3,16,4,15,5,14,0。

参考文献:

[1] 马克杰. 优美图[M]. 北京:北京大学出版社,1991.
Ma K J. Graceful graph[M]. Beijing: Peking University Press,1991.

[2] 杨显文. 关于 C_{4m} 蛇的优美性[J]. 工程数学学报,1995,12(4):108-112.
Yang X W. On C_{4m}-snakes' gratefulness[J]. Journal of Engineering Mathematics,1995,12(4):108-112.

[3] 吴跃生. 关于圈 C_{4h} 的 $(r_1,r_2,\cdots,r_{4h})$-冠的优美性[J]. 华东交通大学学报,2011,28(1):77-80.
Wu Y S. The gracefulness of the $(r_1,r_2,\cdots,r_{4h})$-corona of the graph C_{4h}[J]. Journal of East China Jiaotong University,2011,28(1):77-80.

[4] 吴跃生,李咏秋. 关于圈 C_{4h+3} 的 $(r_1,r_2,\cdots,r_{4h+3})$-冠的优美性[J]. 吉首大学学报:自然科学版,2011,32(6):1-4.
Wu Y S, Li Y Q. The gracefulness of the $(r_1,r_2,\cdots,r_{4h+3})$-corona of the graph C_{4h+3}[J]. Journal of Jishou Unixersity: Natural Science Edition,2011,32(6):1-4.

[5] 吴跃生. 关于图 $P_{6k+5}{}^3\cup P_n{}^3$ 的优美性[J]. 吉首大学学报:自然科学版,2012,33(3):4-7.
Wu Y S. The gracefulness of the graph $P_{6k+5}{}^3\cup P_n{}^3$[J]. Journal of Jishou Unixersity: Natural Science Edition, 2012,33(3):4-7.

[6] 吴跃生,徐保根. 两类非连通图 $(P_2\vee\overline{K_n})(0,0,r_1,0,\cdots,0,r_n)\cup St(m)$ 及 $(P_2\vee\overline{K_n})(r_1+a,r_2,0,\cdots,0)\cup G_r$ 的优美性[J]. 中山大学学报:自然科学版,2012,51(5):63-66.
Wu Y S, Xu B G. The gracefulness of two kinds of unconnected graph $(P_2\vee\overline{K_n})(0,0,r_1,0,\cdots,0,r_n)\cup St(m)$ and $(P_2\vee\overline{K_n})(r_1+a,r_2,0,\cdots,0)\cup G_r$[J]. ACTA Scientiarum Naturlium Universitatis Sunyatseni,2012,51(5):63-66.

[7] 吴跃生. 图 $C_7(r_1,r_2,r_3,r_4,r_5,0,0)\cup St(m)$ 的优美性[J]. 吉首大学学报:自然科学版,2012,33(5):9-11.
Wu Y S. The gracefulness of the graph $C_7(r_1,r_2,r_3,r_4,r_5,0,0)\cup St(m)$[J]. Journal of Jishou Unixersity: Natural Science Edition,2012,33(5):9-11.

[8] 吴跃生,王广富,徐保根. 关于 $C_{4h+1}\odot K_1$ 的 $(Gr_1,Gr_2,\cdots,Gr_{4h+1},Gr_{4h+2})$-冠的优美性[J]. 山东大学学报:理学版,2013,48(4):25-27.
Wu Y S, Wang G F, Xu B G. The gracefulness of the $(Gr_1,Gr_2,\cdots,Gr_{4h+1},Gr_{4h+2})$-corona of the graph $C_{4h+1}\odot K_1$[J]. Journal of Shandong University: Natural Science, 2013,48(4):25-27.

[9] 吴跃生. 关于圈 C_{4h+3} 的 $(Gr_1,Gr_2,\cdots,Gr_{4h+3})$-冠的优美性[J]. 吉首大学学报:自然科学版,2013,34(4):4-9.
Wu Y S. The gracefulness of the $(Gr_1,Gr_2,\cdots,Gr_{4h+3})$-

corona of the graph C_{4h+3}[J]. Journal of Jishou Unixersity: Natural Science Edition, 2013, 34(4): 1-6.

[10] Gallian J A. A dynamic survey of graph labeling[J]. The Electronic Joumal of Combinatorics, 2013, 16, DS6: 1-308.

[11] 吴跃生. 非连通图 $G_{+e}\cup H_{k-1}$ 的优美性[J]. 吉首大学学报:自然科学版, 2014, 35(2): 3-5.
Wu Y S. Gracefulness of the unconnected graph $G+e\cup H_{k-1}$[J]. Journal of Jishou Unixersity: Natural Science Edition, 2014, 35(2): 3-5.

[12] 贾慧羡, 左大伟. 与扇图相关的 2 类图的超边优美标号[J]. 吉首大学学报:自然科学版, 2014, 35(2): 6-9.
Jia H X, Zuo D W. Super-edge-graceful labelings of two kinds of graphs associated with the fan graph[J]. Journal of Jishou Unixersity: Natural Science Edition, 2014, 35(2): 6-9.

[13] 吴跃生. 非连通图 $C_{4m-1}\cup G$ 的优美标号[J]. 吉首大学学报:自然科学版, 2014, 35(3): 1-3
Wu Y S. The graceful labeling of the unconnected graph $C_{4m-1}\cup G$[J]. Journal of Jishou Unixersity: Natural Science Edition, 2014, 35(3): 1-3.

The Graceful Labeling of the Unconnected Graph $C_{4m}\cup G$

WU Yuesheng

(School of Science, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: The gracefulness of the unconnected graph $C_{4m}\cup G$ is discussed. Four sufficient conditions are given for the gracefulness of unconnected graph $C_{4m}\cup G$. For arbitrary positive integer m, if there exists a balanced labeling of graph G, the critical value of the balanced of graph G is k and $k+3m$ is the missing value of the balanced labeling of graph G, then there exists a graceful labeling of the unconnected graph $C_{4m}\cup G$ and $k+1$ is the missing value of the graceful labeling of the unconnected graph $C_{4m}\cup G$; if there exists a balanced labeling of graph G, the critical value of the balanced of graph G is k and $k+m+1$ is the missing value of the balanced labeling of graph G, then there exists a balanced labeling of the unconnected graph $C_{4m}\cup G$ and $k+1$ is the missing value of the balanced labeling of the unconnected graph $C_{4m}\cup G$, $2m+k+1$ is the critical value of the balanced labeling of the unconnected graph $C_{4m}\cup G$.

Key words: graceful graph; balanced bipartite graph; unconnected graph; graceful labeling

(责任编辑 游中胜)