2015 年 3 月　　重庆师范大学学报(自然科学版)　　Mar. 2015
第 32 卷 第 2 期　　Journal of Chongqing Normal University (Natural Science)　　Vol. 32 No. 2

DOI:10.11721/cqnuj20150217

生成树及 2134 有禁错排置换*

王 万 禹

(成都师范学院 数学系,成都 611130)

摘要:为了证明猜想:2134 有禁错排置换的生成树可能同构于 2143 有禁错排置换的生成树,即它们有相同的生成树。首先给出了 $A_{2n}(2134)$ 的生成树的继承法则,接着证明了 $A_{2n}(2134)$ 的生成树同构于 $A_{2n}(2143)$ 的生成树,最后得到了 $|A_{2n}(2134)|=|A_{2n}(2143)|=|SYT(n,n,n)|=\dfrac{2\cdot(3n)!}{n!\ (n+1)!\ (n+2)!}$。

关键词:生成树;激活值;错排置换

中图分类号:O157.5　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2015)02-0084-04

1 若干定义

近年来,对于有禁模式置换的计数问题已经得到了很多很好的结果[1-9]。对于所有长度为 3 的禁排模式 τ,$|S_n(\tau)|=C_n$,其中 $C_n=\dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$是第 n 项 Catalan 数。而对于长度为 4 的禁排模式 p 来说,本质上也就只有 1234,1324,1342 模式研究得较多,给出了禁排置换的计数结果或者其生成函数,有了一些较好的结果。而在错排置换 A_n 中,对于长度为 4 的禁排模式研究得不是很多。文献[2]利用生成树和 RSK 算法证明了$|A_{2n}(2143)|=|SYT(n,n,n)|=\dfrac{2\cdot(3n)!}{n!\ (n+1)!\ (n+2)!}$,其中 A_{2n}表示长为 $2n$ 的错排置换。$|SYT(n,n,n)|$表示模式为(n,n,n)的标准杨表的个数。但同时也还有很多问题有待解决,本文主要解决了文献[1]留下了几个猜想之一,证明了 $A_{2n}(2134)$和 $A_{2n}(2143)$有相同的生成树,也就是说$|A_{2n}(2134)|=|A_{2n}(2143)|$。

接下来给出了本文所需要用到的若干定义。

定义 1　在置换 $\pi=\pi_1\pi_2\pi_3\cdots$中,如果 $\pi_1<\pi_2>\pi_3<\cdots$,,则称置换 $\pi=\pi_1\pi_2\pi_3\cdots$为错排置换。

定义 2　给定一个模式 τ,记 $A_n(\tau)$表示长为 n 且不包含模式 τ 的错排置换的集合。

定义 3[1]　生成树是一棵有根的带标号的树,使得每一个点 v 的孩子的标号都能够由标号 v 所决定。换句话说,一棵生成树能够由下面的递归定义所决定,递归定义为:1) 基:根的标号;2) 归纳步骤:在继承规则下,父亲的所有孩子的标号都仅仅依靠父亲的标号来决定。

定义 4　如果置换 $u\in S_n$ 且 $i\in[n+1]$。令 $v=u\leftarrow i=v_1\cdots v_nv_{n+1}\in S_{n+1}$,其中 $v_{n+1}=i$,并且在置换 v 中,$v_1\cdots v_n$ 需满足与置换 u 有相同的顺序结构,在 $v=u\leftarrow i$ 之一变换过程中,若$|u_j|\geqslant i(1\leqslant j\leqslant n)$,则$|v_j|=|u_j|+1$,否则$|v_j|=|u_j|$。

例如 $v=53214\leftarrow 3=642135$。

定义 5　设置换 $u\in S_n(\tau)$,其中 $S_n(\tau)$表示不包含模式 τ 的置换集合。如果 $u\leftarrow m$ 不含模式 τ,则称 m 是 u 的激活值。

令 $u\in A_{2n}(2134)$,给出其标号(a,b),其中 $a=u_{2n-1}$,b 是 u 的激活值的个数,其中 $b\in[2n+1]$。

如果 $u\in A_{2n}$,那么 u 的孩子 $w\in A_{2n+2}$,其中置换 u 的前 $2n$ 项 $u_1u_2\cdots u_{2n}$和 w 的前 $2n$ 项 $w_1w_2\cdots w_{2n}$具有相同的顺序结构。

* **收稿日期**:2013-09-09　**修回日期**:2014-10-24　**网络出版时间**:2015-01-22 11:30

资助项目:四川省教育厅自然科学基金(No. 15ZB0346);成都师范学院校级科研项目(No. CS14ZB06)

作者简介:王万禹,男,讲师,研究方向为图论与组合,E-mail:wangwanyu1314@163.com

网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20150122.1130.009.html

2 主要结果

本文用 $SYT(\lambda)$表示模式为 λ 的标准杨表。A_n 表示长为 n 的错排置换。文献[1]给出了以下猜想。

猜想[1]　$|A_{2n}(2134)|=|A_{2n}(2143)|=|SYT(n,n,n)|=\dfrac{2\cdot(3n)!}{n!\ (n+1)!\ (n+2)!}$。

为了证明猜想中的等式是成立的,先证明以下 7 个命题。

引理 1[1]　对所有的 $n\geqslant1$,$|A_{2n}(2143)|=|SYT(n,n,n)|=\dfrac{2\cdot(3n)!}{n!\ (n+1)!\ (n+2)!}$。

引理 2[1]　$A_{2n}(2143)$的生成树遵循以下法则:$(a,b)\to\{(x,y)\mid 1\leqslant x\leqslant a+1,x+2\leqslant y\leqslant b+2\}$。

命题 1　对于任何 $u\in A_{2n}(2134)$,$u_{2n-1}=a\leqslant n$。

证明　选择 $u\in A_{2n}(2134)$并且 $u_{2n-1}=a$。假设 $a\geqslant n+1$,因为 u 是一个错排置换,那么有 $u_{2n}>u_{2n-1}=a\geqslant n+1$。因此元素$\{1,2,\cdots,n\}$都在元素 u_{2n-1}的左边。因为 $u_{2n-1}=a\geqslant n+1$,则由鸽笼原理可知,至少存在一个元素 $p\in\{1,2,\cdots,n\}$位于 u_{2n-1}左侧的某一偶数项位置。设 $u_i=p(i\in\{2,4,\cdots\})$。因为 $u\in A_{2n}$,且 $i\neq 2n-2$,因此存在正整数 k 和 t,满足 $u_{i-1}=k$ 且 $u_{i+1}=t$ 满足条件 $k\leqslant p$ 并且 $t\leqslant p$。于是 $u_iu_{i+1}u_{2n-1}u_{2n}$是一个 2134 模式,矛盾。所以,当 $u\in A_{2n}(2134)$时,$u_{2n-1}=a\leqslant n$。　证毕

命题 2　如果 $u\in A_{2n}(2134)$有 k 个激活值,那么这 k 个激活值是 $1,2,\cdots,k$。

证明　如果 m 为置换 u 的非激活值,那么容易看出 $m+1$ 的也是 u 的非激活值。又因为 u 有且仅有 k 个激活值,那么这 k 个激活值是 $1,2,\cdots,k$。　证毕

命题 3　如果 $u\in A_{2n}(2134)$且标号为(a,b),那么$\{1,2,\cdots,a+2\}$是 u 的激活值。

证明　选择 $u\in A_{2n}(2134)$并且 $u_{2n-1}=a$。选择 $c\leqslant a+2$,令 $v=u\leftarrow c\in S_{2n+1}$。设置换 v 包含模式 2134,那么不妨设 $v_iv_jv_kc$ 是 v 的一个 2134 模式,其中 $i<j<k<2n+1$。现在断定 $v_iv_jv_{2n-1}v_{2n}$是 v 的一个 2134 模式。为了证明 $v_iv_jv_{2n-1}v_{2n}$是 v 的一个 2134 模式。只需要证明 $v_i<v_{2n-1}$并且 $j<2n-1$。因为 $v_iv_jv_kc$ 是 v 的一个 2134 模式,由命题 1,$v_j<v_i<c\leqslant a+2\leqslant n+2$,故有 $v_i\leqslant a+1\leqslant n+1$。如果 $v_i=n+1$,那么 $c=n+2$,因而不存在 i,j,k 使得 $v_iv_jv_kc$ 是 v 的一个 2134 模式,故 $v_i\leqslant n$。同理,如果 $v_i=a+1$,那么 $c=a+2$,则 $v_iv_jv_kc$ 不是 v 的一个 2134 模式,故 $v_i\leqslant a$。因而得到 $v_i\leqslant a\leqslant n$,也就是说 $v_i\leqslant a=u_{2n-1}\leqslant v_{2n-1}$。因为 v_i 右边至少有 3 个元素,而 v_{2n-1}右边只有两个元素,故 $v_i\neq v_{2n-1}$,所以有 $v_i<v_{2n-1}$。很容易知道 $v_j<v_i<v_{2n-1}<v_{2n}$且 $v_j<v_{2n}$。v_j 比 v_{2n-1},v_{2n},v_{2n+1}小,因而 $j<2n-1$。这也就是说 $v_iv_jv_{2n-1}v_{2n}$是 v 的一个 2134 模式。所以 $u_iu_ju_{2n-1}u_{2n}$是 u 的一个 2134 模式,矛盾。所以 c 是 u 的激活值。　证毕

例 1　$u=68142735\in A_8(2134)$,标号为$(3,5)$。其激活值为$\{1,2,3,4,5\}$,激活值个数是 $3+2$。$u=18293104657\in A_{10}(2134)$,标号为$(5,7)$。其激活值为$\{1,2,\cdots,7\}$,激活值个数是 $5+2$。

命题 4　若标号为(a,b)的置换 $u\in A_{2n}(2134)$有一个标号为(x,y)的孩子 w,则 $1\leqslant x\leqslant a+1,x+2\leqslant y\leqslant b+2$。

证明　因为 w 是 $u\in A_{2n}(2134)$的一个孩子,所以 w 的前 $2n$ 个元素和 u 的前 2 那个元素有相同的顺序结构。若 $x>a+1$,因为 $w\in A_{2n+2}$,故 $w_{2n}>a+1,w_{2n}>a+1,w_{2n+2}>a+1$ 且 $w_{2n-1}=a$。于是存在一个 i 使得 $w_i=a+1(i\neq\{2n-1,2n,2n+1,2n+2\})$。所以 $i<2n-1$,那么 $w_iw_{2n-1}w_{2n-1}w_{2n+1}w_{2n+2}$是 w 的一个 2134 模式。这与 $w\in A_{2n+2}(2134)$矛盾。故 $x\leqslant a+1$。显然 $x\geqslant1$,所以有 $1\leqslant x\leqslant a+1$。

下面证明 y 的界。

定义一个从$[2n+1]\to[2n+2]$的映射:$f(t)=\begin{cases}t,t<w_{2n+1},\\ t+1,w_{2n+1}\leqslant t<w_{2n+2},\\ t+2,w_{2n+2}\leqslant t。\end{cases}$,需证明 f 是一个把 u 的非激活值映射到 w 的非激活值的映射。选择任意 $c\in\{1,2,\cdots,2n+1\}$是 u 的非激活值,那么存在 $i<j<k$ 使得 $u_j<u_i<u_k<c$。又因为$(w_i,w_j,w_k,f(c))=(f(u_i),f(u_j),f(u_k),f(c))$。显然有 $f(u_j)<f(u_i)<f(u_k)<f(c)$。所以 $f(c)$不是 w 的激活值。在 u 中有$(2n+1)-b$ 个非激活值,所以在 w 中至多有$(2n+3)-(2n+1-b)=b+2$ 个激活值。由命题 3 知,$\{1,2,\cdots,x+2\}$是 w 的激活值。所以 $x+2\leqslant y\leqslant b+2$。　证毕

命题 5　假设 $u\in A_{2n}(2134)$,标号为(a,b)。如果 $x<b\leqslant a+2$,那么 $v=u\leftarrow x\in A_{2n+1}(2134)$并且 v 有激活值 $1,2,\cdots,b+1$。

证明 令$u\in A_{2n}(2134)$,标号为(a,b)。由命题2知$1,2,\cdots,b$是u的激活值。$v=u\leftarrow x$。$v_{2n+1}=x\leqslant a+1=u_{2n-1}+1\leqslant v_{2n-1}+1$。因为$u_{2n-1}<u_{2n}$,得到$v_{2n-1}\leqslant v_{2n}$。因此有$v_{2n+1}<v_{2n}$且$v$是错排置换。由条件可知$x\leqslant a+1$,根据命题3的结论,$x$是$u$的激活值。也就是说$v=u\leftarrow x$不含2134模式,即$v=u\leftarrow x\in A_{2n+1}(2134)$。

现在来证明v的激活值是$\{1,2,\cdots,x,x+1,\cdots,b+1\}$。

情形1,令m是u的激活值,其中$m\leqslant x$。令$w=v\leftarrow m=w_1\cdots w_{2n+2}$,其中$w_{2n+2}=m$。假设$m$不是$v$的激活值,则存在正整数$i<j<k$使得$w_iw_jw_kw_{2n+2}$是$w$的一个2134模式。因为$m\leqslant x$,$v_{2n+1}=x$。所以在$w=v\leftarrow m$的过程中,$w_{2n+1}=x+1>m$。于是有$k\neq 2n+1$,$w_{2n+1}>w_{2n+2}$。故$w_iw_jw_kw_{2n+1}$也是$w$的一个2134模式。也就是说$v_iv_jv_kv_{2n+1}$是$v$的一个2134模式。但是$v\in A_{2n+1}(2134)$,矛盾。因此$m$是$v$的激活值,且这些激活值为$\{1,2,\cdots,x\}$。

情形2,选择$m\geqslant x$使得m是u的一个激活值。现在开始证明$b+1$是v的激活值。令$w=v\leftarrow(b+1)=w_1\cdots w_{2n+1}w_{2n+2}$。假设$b+1$是$v$的非激活值,则存在正整数$i<j<k$使得$w_iw_jw_kw_{2n+2}$序同构于模式2134。很容易得出$i\neq 2n-1$且$j\neq 2n$。由命题条件,所构造的置换$v=u\leftarrow x$需满足条件$x\leqslant a+1$,也就是说在将置换$u$变化到置换$v$的过程中选择的激活值$m$也应该满足条件$x\leqslant m\leqslant a+1$。因为$b\leqslant a+2$,又由命题3知$b\geqslant a+2$,所以有$b=a+2$。现在对$k$分2种情形进行讨论。

子情形1,$k=2n+1$。

1)若$m=w_{2n+1}=a+1$,因$a<b+1$,故$w_{2n+1}=v_{2n+1}=a+1$,$w_{2n-1}=v_{2n-1}=u_{2n-1}=a$。则$w_iw_jw_{2n-1}w_{2n+1}$是一个2134模式,因而$v_iv_jv_{2n-1}v_{2n+1}$是$v$的一个2134模式,这与$v\in A_{2n+1}(2134)$相矛盾。

2)若$m=w_{2n+1}\leqslant a$,那么$w_{2n-1}=a+1$。因为$w_{2n-1}<w_{2n}$且$w_{2n+2}=b+1=a+3$,所以一定有$w_{2n}\geqslant a+2$,那么$w_iw_jw_{2n-1}w_{2n}$是一个2134模式,这与$v\in A_{2n+1}(2134)$相矛盾。

子情形2,$k\neq 2n+1$。

1)若$m=w_{2n+1}=a+1$,那么$w_{2n-1}=v_{2n-1}=u_{2n-1}=a$。由于$b=a+2$,故$w_{2n+2}=b+1=a+3$。因为$i\neq 2n-1$,$j\neq 2n$,$k\neq 2n+1$,如果$w_k=a+2$,那么$w_iw_jw_kw_{2n+2}=w_iw_j(a+2)(a+3)$是一个2134模式且$w_i\leqslant a+1$。因为$w_{2n-1}=a$,$w_{2n+1}=a+1$,那么显然$w_iw_jw_{2n-1}w_{2n+1}=w_iw_ja(a+1)$是一个2134模式,也即$v_iv_jv_{2n-1}v_{2n+1}$是$v$的一个2134模式,这与$v\in A_{2n+1}(2134)$相矛盾。如果$w_k\neq a+2$,那么$v_iw_jw_{2n-1}w_{2n+1}=w_iw_ja(a+1)$是一个2134模式,这与$v\in A_{2n+1}(2134)$相矛盾。

2)若$m=w_{2n+1}\leqslant a$,那么$w_{2n-1}=a+1$。因为v是错排置换,有$v_{2n-1}<v_{2n}$,所以$w_{2n-1}<w_{2n}$,且有$w_{2n}\geqslant a+2$。因$w_iw_jw_kw_{2n+2}=w_iw_jw_k(b+1)=w_iw_jw_k(a+3)$是一个2134模式,故可以得到$w_iw_jw_{2n-1}w_{2n}=w_iw_j(a+1)(a+2)$是一个2134模式,这与$v\in A_{2n+1}(3134)$相矛盾。

故在情形2下,$b+1$是v的激活值。

由情形1和情形2知,v有激活值$1,2,\cdots,b+1$。 证毕

例2 $u+68142735\in A_8(2134)$,标号为$(3,5)$。取$x=2\leqslant 3+1$,$v=791538463\in A_9(2134)$,激活值为$\{1,2,\cdots,6\}$。$u=15283746\in A_8(2134)$,标号为$(4,6)$。取$x=5\leqslant 4+1$,$v=162938475\in A_9(2134)$,激活值为$\{1,2,\cdots,7\}$。

命题6 如果$u\in A_{2n}(2134)$,标号为(a,b),并且$1\leqslant x\leqslant a+1$,$x+1\leqslant y-1\leqslant b+1$。那么$u$有一个标号为$(x,y-1)$的孩子$w$,并且$w\in A_{2n+2}(2134)$。

证明 设$\{1,2,\cdots,b\}$是u的激活值。定义$v=u\leftarrow x=v_1\cdots v_{2n}v_{2n+1}$,$w=v\leftarrow(y-1)=w_1w_2\cdots w_{2n+1}w_{2n+2}(y-1\leqslant b+1)$,则$w$就是所要求的置换。由命题5,$v\in A_{2n+1}(2134)$,$v_{2n+1}=x$。因为$w_{2n+2}=y-1$且$y-1>x$,故有$w_{2n+2}>w_{2n+1}$。所以$w$是错排置换。由命题5知,$y-1$是$v$的激活值。所以$w\in A_{2n+2}(2134)$。因为$y-1>x$,即是说$w_{2n+2}>v_{2n+1}$。因而可以断定在$w=v\leftarrow(y-1)$的过程中,第$2n+1$项的值未发生改变,即$w_{2n+1}=x$。

接下来证明w有且仅有$y-1$个激活值$\{1,2,\cdots,y-1\}$。

首先证明$y-1$是w的一个激活值。令$z=w\leftarrow(y-1)$,因为$w_{2n+2}=y-1$,所以$z_{2n+2}=y>z_{2n+3}=y-1$。假设$y-1$不是w的激活值,那么存在$i<j<k$使得$z_iz_jz_k(y-1)$是z的一个2134模式。显然$k\neq 2n+2$,这也就是说$z_iz_jz_kz_{2n+2}$也是z的一个2134模式,那么$w_iw_jw_kw_{2n+2}$是w的一个2134模式。但是$w\in A_{2n+2}(2134)$,矛盾。故$y-1$是w的激活值。于是得到$\{1,2,\cdots,y-1\}$是w的y个激活值。

接着只需要证明y不是w的激活值即可。

令 $z=w\leftarrow y$,假设 y 是 w 的激活值,那么不存在 $i<j<k$ 使得 $z_iz_jz_kz_{2n+3}$ 是 2134 模式。因为 $z_{2n+2}=y-1$,$z_{2n+3}=y$,所以 $z_iz_jz_{2n+2}z_{2n+3}=z_iz_j(y-1)y$。由 $z_{2n+1}=x$,令 $j=2n+1$。因为 $y\geqslant x+2$,那么元素 $x+1$ 必定在置换 z 的前 $2n$ 项的某一个位置上。即是说存在一个正整数 $i\leqslant 2n$ 使满足条件 $w_i=x+1$。那么 $z_iz_{2n+1}z_{2n+2}z_{2n+3}$ 是 z 的一个 2134 模式。由假设知 y 是 w 的激活值,产生矛盾。因而 y 是 w 的非激活值。所以 w 有且仅有 $y-1$ 个激活值。　证毕

定理 1　$|A_{2n}(2134)|=|A_{2n}(2143)|=|SYT(n,n,n)|=\dfrac{2\cdot(3n)!}{n!\,(n+1)!\,(n+2)!}$。

证明　在文献[1]中已经知道对于 $U_{n\geqslant 1}A_{2n}(2143)$ 的生成树有根和生成法则

$$(a,b)\longmapsto\{(x,y)\mid 1\leqslant x\leqslant a+1,x+2\leqslant y\leqslant b+2\}。$$

再由命题 4 和命题 6 得到,对于　$U_{n\geqslant 1}A_{2n}(2134)$ 的生成树有根和生成法则

$$(a,b)\longmapsto\{(x,y)\mid 1\leqslant x\leqslant a+1,x+2\leqslant y\leqslant b+2\}。$$

这两个生成树是同构的,故等式成立。　证毕

参考文献:

[1] Lews J B. Generating trees and pattern avoidance in alternating permutations[J]. The Electronic Journal of Combinatorics,2012,19(1):1-21.

[2] Lews J B. Pattern avoidance for alternating permutations and Young tableaux[J]. Journal of Combinatorial Theory, Series A,2011,118:1436-1450.

[3] West J. generating trees and forbidden subsequence[J]. Discrete Mathematics,1996,157:363-372.

[4] West J. generating trees and the Catalan and Schroder numbers[J]. Discrete Mathematics,1995,146:247-262.

[5] Lewis J B. Pattern avoidance and RSK-like algorithms for alternating permutations and Young tableaux[J]. J Combinatorial Theory,Series A,2011,118(4):1436-1450.

[6] Stanley R P. Enumerative combinatorics 1[M]. Cambridge: Cambridge University Press,1997.

[7] Stanley R P. Enumerative combinatorics 2[M]. Cambridge: Cambridge University Press,2001.

[8] Lewis J B. Alternating, pattern-avoiding permutations[J]. Electronic J Combinatorics,2009,16:N7.

[9] Mansour T. Restricted 132-alternating permutations and Chebyshev polynomials[J]. Annals of Combinatorics,2003(7):201-227.

Generating Tree and 2134-avoiding Alternating Permutations

WANG Wanyu

(Department of Mathematics, Chengdu Normal University, Chengdu 611130, China)

Abstract: In [1], the author proposed one conjecture that the generating trees for alternating permutations avoiding 2134 may be isomorphic to the generating trees for alternating permutations avoiding 2143. The aim of this article is to solve this conjecture that $A_{2n}(2143)$ and $A_{2n}(2134)$ have the same generating tree. In this paper, we first obtain the succession rule of the generating tree for $A_{2n}(2134)$. Then we show that the generating tree for $A_{2n}(2143)$ is isomorphic to the generating tree for $A_{2n}(2143)$. Finally, we show that $|A_{2n}(2134)|=|A_{2n}(2143)|=|SYT(n,n,n)|=\dfrac{2\cdot(3n)!}{n!\,(n+1)!\,(n+2)!}$.

Key words: generating trees; active values; alternating permutation

(责任编辑　黄　颖)