DOI:10.11721/cqnuj20150218

确定与随机 Logistic 种群模型的比较研究*

王丙参[1]，魏艳华[1]，戴　宁[2]
(1. 天水师范学院 数学与统计学院，甘肃 天水 741001；2. 郑州大学 数学系，郑州 450002)

摘要：比较研究了确定和随机 Logistic 种群模型的性质、最优捕获问题及生态学含义，特别探讨了随机模型解的存在性、渐进性及稳定性。数值模拟支撑了理论分析的结果。研究认为，随机干扰不利于再生生物资源的开发，噪声强度越大，最优捕获努力量和可持续捕获量的数学期望的最大值就越小而方差越大。

关键词：Logistic 模型；Ito 公式；随机持久；几乎随机确定；最优捕获
中图分类号：O211.62　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1672-6693(2015)02-0088-07

在现实世界中，任何一个生物种群都要与其他生物种群相互作用，有时为了研究方便，可把此种群隔离开，同时把其他种群与环境对它的作用合并，即得到单种群增长模型[1-2]。再生生物资源的开发和利用与人类社会经济的可持续发展密切相关，但一定要适度开发，应该在保持稳产的情况下追求产量或效益的最大化。Logistic 种群模型是种群生态学的核心内容之一，关于它的确定模型研究文献很多，但任何生态系统都不可避免地受环境噪音干扰，那么随机 Logistic 种群模型与现实吻合得会更好，这也得到了实际观测资料的支持[3-8]。本文比较研究了确定和随机 Logistic 种群模型的性质、最优捕获问题及生态学含义，特别探讨了随机模型解的存在性、渐进性及稳定性。数值模拟支撑了理论分析的结果，并得出以下结论：随机干扰不利于再生生物资源的开发，噪声强度越大，最优捕获努力量和可持续捕获量的数学期望的最大值就越小而方差越大。

1 Logistic 种群模型

设种群在 t 时刻的数量为 $x(t)$，则
$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=rx(t)\left(1-\frac{x(t)}{K}\right),x(0)=x_0 \tag{1}$$
称为 Logistic 种群模型，它是种群生态学的核心内容之一，其中常数 $r>0$ 为种群的内秉自然增长率，$K>0$ 为环境容纳量，利用分解变量法解得 $x(t)=\dfrac{K}{1+\left(\dfrac{K}{x_0}-1\right)\mathrm{e}^{-r(t-t_0)}}=\dfrac{Kx_0}{K\mathrm{e}^{r(t-t_0)}+x_0(1-\mathrm{e}^{-r(t-t_0)})}$，$t\geqslant t_0$，其中 x_0 为种群在时刻 $t=t_0$ 时的数量。只有当 $0<x_0<\dfrac{K}{2}$时，才会出现 S 形曲线，x 的增加先快后慢，拐点为 $x=\dfrac{K}{2}$，且$\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=K$。可见，此生态系统的种群个数是一致持久的，不会趋于灭绝。平衡点 $x_1(t)=0$ 是不稳定的，$x_2(t)=K$ 是全局稳定的。假设许多细小的随机干扰作用在增长率 r 上，于是可用 $r\to r+\sigma\dot{B}(t)$代替增长率 r，其中 $B(t)$为定义在完备的概率空间(Ω,F,P)上的 Brown 运动，σ^2 为随机干扰的强度。

定义 1[6]　考虑随机微分方程(SDE) $\mathrm{d}x(t)=f(x(t),t)\mathrm{d}t+g(x(t),t)\mathrm{d}B(t)$，其中 $B(t)$是纯量 Brown 运动，如果对任意 $\varepsilon\in(0,1)$，存在 $\delta=\delta_\varepsilon$ 及 $H=H_\varepsilon$，使得对任意初值 $x_0\in\mathbf{R}_+$，解 $x(t)$满足$\lim\limits_{t\to\infty}\inf P(|x(t)|\leqslant H)\geqslant 1-\varepsilon$ 和$\lim\limits_{t\to\infty}\inf P(|x(t)|\geqslant\delta)\geqslant 1-\varepsilon$，则称方程为随机持久的。如果对于任意给定的初值 $x_0\in\mathbf{R}_+$，方程的解满足 $0<C\leqslant\lim\limits_{t\to\infty}\inf|x(t)|\leqslant\lim\limits_{t\to\infty}\sup|x(t)|\leqslant M<\infty$，a. s.，则称方程为几乎确定随机持久。

引理 1[7]　设 $x_i(t)$，$i=1,2$ 分别是随机微分方程 $\mathrm{d}x_i(t)=f_i(x_i(t),t)\mathrm{d}t+g(x_i(t),t)\mathrm{d}B(t)$的解，其中

* 收稿日期：2013-10-15　　修回日期：2014-12-31　　网络出版时间：2015-01-22　11:30
资助项目：国家自然科学基金(No. 61104045)；天水师范学院中青年教师科研资助项目(No. TSA1404)
作者简介：王丙参，男，讲师，研究方向为随机分析和金融数学，E-mail：wangbingcan2004@163.com
网络出版地址：http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20150122.1130.010.html

$f(x,t)\in\mathbf{C}([0,\infty)\times\mathbf{R})$，$g(x,t)\in\mathbf{C}([0,\infty)\times\mathbf{R})$，若还满足：1）存在定义在$[0,\infty)$的函数 $\rho(s)$，且 $\rho(0)=0$ 与 $\int_{0^+}^{\infty}\rho(s)\mathrm{d}s=\infty$，使得 $|g(t,x)-g(t,y)|\leqslant\rho|x-y|$，$x,y\in\mathbf{R}$，$t\geqslant0$；2）$f_1(t,x)<f_2(t,x)$，$x\in\mathbf{R}$，$t\geqslant0$；3）$x_1(0)\leqslant x_2(0)$，则依概率 1 成立 $x_1(t)\leqslant x_2(t)$，$t\geqslant0$。

确定 Logistic 模型的随机类似物是如下系统，即模型(2)或(3)，简称随机 Logistic 模型

$$\mathrm{d}x(t)=rx(t)\left(1-\frac{x(t)}{K}\right)\mathrm{d}t+\sigma x(t)\left(1-\frac{x(t)}{K}\right)\mathrm{d}B(t) \quad (2) \qquad \mathrm{d}x(t)=rx(t)\left(1-\frac{x(t)}{K}\right)\mathrm{d}t+\sigma x(t)\mathrm{d}B(t) \quad (3)$$

初值 $x(0)=x_0$ 与 Brown 运动$\{B(t),t\geqslant0\}$独立。

显然方程(2)满足 SDE 解的存在定理，故存在唯一解 $x(t)$，且 $x(t)\in U^2(J,\mathbf{R})$，其中 $x(t)\in U^p(J,\mathbf{R}^d)\Leftrightarrow\{x(t),t\in J\}$是可测、$F_t$适应的 $\mathbf{R}^d$ 值随机过程，满足 $\int_{t_0}^{T}|x(t)|^p\mathrm{d}t<\infty$，a. s. 且 $E\int_{t_0}^{T}|x(t)|^p\mathrm{d}t<\infty$。实际上，由正确的物理规律或自然规律得到的 SDE，应该存在唯一解。反之，如果建立的 SDE 的解不存在，很可能在建模时忽略了某些重要因素而得到了错误的模型。由于 $x(t)$表示在 t 时刻种群的数量，所以只有非负解才有生态学意义。

显然方程(2)存在两个平凡解 $x(t)=0$，$x(t)=K$。假定 $0<x(t)<K$，由 Ito 公式有

$$\mathrm{d}\ln\frac{x}{K-x}=\mathrm{d}\ln x-\mathrm{d}\ln(K-x)=\left[\frac{\mathrm{d}x}{x}-\frac{1}{2x^2}(\mathrm{d}x)^2\right]-\left[\frac{\mathrm{d}x}{x-K}-\frac{1}{2(x-K)^2}(\mathrm{d}x)^2\right]=\frac{K}{x(K-x)}\mathrm{d}x-\frac{(K-2x)K}{2x^2(K-x)^2}(\mathrm{d}x)^2=$$

$$\frac{K}{x(K-x)}\mathrm{d}x-\frac{(K-2x)K}{2x^2(K-x)^2}\cdot\frac{(K-x)^2x^2\sigma^2}{K^2}\mathrm{d}t=r\mathrm{d}t+\sigma\mathrm{d}B(t)-\frac{(K-2x)\sigma^2}{2K}\mathrm{d}t=\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\mathrm{d}t+\sigma\mathrm{d}B(t)+\frac{x\sigma^2}{K}\mathrm{d}t,$$

$$\frac{x}{K-x}=C\exp\left\{rt-\frac{1}{2}\sigma^2t+\sigma B(t)+\frac{\sigma^2}{K}\int_0^t x(s)\mathrm{d}s\right\}。$$

其中 $C=\dfrac{x_0}{K-x_0}$，于是有关系 $x(t)=\dfrac{K}{1+\left(\dfrac{K}{x_0}-1\right)\exp\left\{-\left[rt-\dfrac{1}{2}\sigma^2t+\sigma B(t)+\dfrac{\sigma^2}{K}\int_0^t x(s)\mathrm{d}s\right]\right\}}$，定义函数 $\varphi(t)\equiv\dfrac{K}{1+\left(\dfrac{K}{x_0}-1\right)\exp\left\{-\left[rt-\dfrac{1}{2}\sigma^2t+\sigma B(t)\right]\right\}}$，则它满足 $\varphi(t)<x(t)<K$。对于 $y(t)=\ln\dfrac{x(t)}{K-x(t)}$，运用 Ito 公式可知，$\mathrm{d}y(t)=\left(r-\dfrac{1}{2}\sigma^2+\dfrac{\mathrm{e}^{y(t)}}{1+\mathrm{e}^{y(t)}}\sigma^2\right)\mathrm{d}t+\sigma\mathrm{d}B(t)$。

容易验证方程的系数 $r-\dfrac{1}{2}\sigma^2+\dfrac{\mathrm{e}^{y(t)}}{1+\mathrm{e}^{y(t)}}\sigma^2$ 满足局部 Lipschitz 和线性增长条件，因此对于初值 $y(0)=\ln\dfrac{x_0}{K-x_0}$的解是存在和唯一的，于是 $x(t)=K\dfrac{\mathrm{e}^{y(t)}}{1+\mathrm{e}^{y(t)}}$。

显然由 Brown 运动的性质可知，当 $r<\dfrac{\sigma^2}{2}$时，则$\lim\limits_{t\to\infty}x(t)\to0$，a. s.；如果 $r=\dfrac{\sigma^2}{2}$，则$\lim\limits_{t\to\infty}x(t)\to0$，a. s.；在条件 $r>\dfrac{\sigma^2}{2}$下，对任意初值 $x_0>0$，方程(2)的解满足$\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=K$，a. s. 。

首先在 $t\geqslant0$ 上，对任意给定的初值 $u(0)=\ln x_0$，考虑下面的方程

$$\mathrm{d}u(t)=\left\{r\left[1-\frac{1}{K}\mathrm{e}^{u(t)}\right]-\frac{\sigma^2}{2}\left[1-\frac{1}{K}\mathrm{e}^{u(t)}\right]^2\right\}\mathrm{d}t+\sigma\left[1-\frac{1}{K}\mathrm{e}^{u(t)}\right]\mathrm{d}B(t)。\quad (4)$$

容易验证方程(4)满足线性增长条件和局部 Lipschitz 条件，所以存在唯一的解 $u(t)$。令 $x(t)=\mathrm{e}^{u(t)}$，由 Ito 公式即知，$\mathrm{d}\mathrm{e}^{u(t)}=\mathrm{e}^{u(t)}\left[\mathrm{d}u(t)+\dfrac{1}{2}(\mathrm{d}u(t))^2\right]$，化简可得$\mathrm{d}\mathrm{e}^{u(t)}=\mathrm{e}^{u(t)}\left(1-\dfrac{\mathrm{e}^{u(t)}}{K}\right)[r\mathrm{d}t+\sigma\mathrm{d}B(t)]$，即 $x(t)=\mathrm{e}^{u(t)}$是下文将提到的方程(6)满足初值 $x_0>0$ 的解。当 $r<\dfrac{\sigma^2}{2}$时，$u(t)$随着 t 的增大而递减，则当 $t\to\infty$时，$x(t)\to0$，a. s.；如果 $r=\dfrac{\sigma^2}{2}$，则当 $t\to\infty$时，$u(t)$几乎必然在任意大和任意小的值之间进行波动，即 $x(t)\to0$，a. s. 。

综上所述，系统(2)是几乎确定随机持久的。其实对于方程(2)，当种群数量小于 K 时，净增长率 $r\left(1-\dfrac{x(t)}{K}\right)>0$，随机波动 $\sigma\left(1-\dfrac{x(t)}{K}\right)>0$，当种群数量趋于 K 时，净增长率和随机波动都趋于 0，系统达到平衡

状态。

定理1 若种群系统(2)是几乎随机确定的,则它一定是随机持久的。

证明 令 $A_n=\{\omega:\sup\limits_{n\leqslant t\leqslant n+1}|x(t)|<M\}$,由几乎随机确定可得 $P(\lim\limits_{n\to\infty}\inf A_n)=1$,运用 Fatou 引理可得 $1=P(\lim\limits_{n\to\infty}\inf A_n)\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}\inf P(A_n)\leqslant 1$。于是由两边夹定理可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\inf P(A_n)=1$,即 $\lim\inf P(\omega:\sup\limits_{\substack{n\leqslant t\leqslant n+1\\ n\to\infty}}|x(t)|<M)=1$。显然,1) 对 $\forall\varepsilon>0$,存在正数 $N\in\mathbf{N}^+$,使得对 $n>N$ 都成立 $P(A_n)>1-\varepsilon$;2) 对 $\forall N'\in\mathbf{N}^+$,存在 $n>N'$,使得 $P(A_n)<1+\varepsilon$,因此对 $\forall\varepsilon>0$,存在正数 $N\in\mathbf{N}^+$,使得对 $N<n\leqslant t\leqslant n+1$,都成立 $P(|x(t)|<M)\leqslant P(A_n)>1-\varepsilon$。因此对 $\forall\varepsilon>0$,存在正数 $N\in\mathbf{N}^+$,使得对 $N<t\leqslant+\infty$,都成立 $P(|x(t)|<M)>1-\varepsilon$,即 $\lim\limits_{t\to\infty}\inf P(|x(t)|\leqslant H)\geqslant 1-\varepsilon$。令 $B_n=\{\omega:\inf\limits_{n\leqslant t\leqslant n+1}|x(t)|>C\}$,同上可得 $\lim\limits_{t\to\infty}\inf P(|x(t)|\geqslant\delta)\geqslant 1-\varepsilon$。 证毕

由文献[7]可知,系统(3)是随机持久的,但由 Brown 运动性质可知,$\lim\limits_{t\to\infty}\inf x(t)=0$,a. s.,$\lim\limits_{t\to\infty}\sup x(t)=+\infty$,a. s.,因而系统(3)不是几乎确定随机持久的。由此可见,随机持久推不出几乎确定随机持久。

对 Logistic 方程(2)的一个轻微推广为如下的 Gilpin-Ayala 模型

$$\mathrm{d}x(t)=rx(t)\left(1-\frac{x(t)^{\theta}}{K}\right)\mathrm{d}t+\sigma x(t)\mathrm{d}B(t),\tag{5}$$

其中 $\theta>0$。对有些种群,适当调整 θ 可使模型与实际观测数据吻合得更好。

由随机比较引理1显然可知以下定理。

定理2 如果方程(3)、(5)的解分别为 $x_1(t)$、$x_2(t)$,初始值都为 x_0,则当 $\theta>1$ 时,依概率1成立 $x_1(t)\leqslant x_2(t)$,$t\geqslant 0$。

从理论分析的角度考虑,随机模型比相应的确定性模型要难处理的多,通常不能像确定模型那样有明确的动态行为。一般来说,当种群数量非常大时,随机波动对种群数量的影响是可忽略不计的,此时可用确定模型近似代替随机模型,比如研究人体以数百万计的红细胞增长规律时。

参数 r 和 K 对于自然选择和进化类型的研究具有重大意义,可把生物分为:1) r 对策者,如蚊子、蝗虫、老鼠等。它们的进化方向是提高 r 值;于是它们的 r 值通常很大,生殖力强,寿命短,死亡率也高。因此这类生物数量波动剧烈,易出现大规模繁殖和死亡。2) K 对策者,如狮子、老虎等。它们的进化方向是减小 r 值,使种群数量保持在 K 附近;通常它们繁殖力低,个体大,寿命长,种群数量稳定;3) 介于二者之间的生物,如野马、羚羊等[1]。

2 数值模拟

由于 $(\mathrm{d}B(t))^2=\mathrm{d}t$,故如果将 $\mathrm{d}t$ 视为一阶无穷小,那么 $\mathrm{d}B(t)$ 就是半阶无穷小 $\sqrt{\mathrm{d}t}$,因此在对 Ito 过程做微分时,必须将 Taylor 展开到二阶式,这样才包含了半阶无穷小的贡献,即 $\mathrm{d}x=x$ 的 Taylor 展开式一阶项和二阶项之和[8]。可见,随机 Logistic 模型(2)相应的离散化系统为 $x_{k+1}=x_k+\Delta x_k+\frac{1}{2}[\Delta x_k]^2$,即

$$x_{k+1}=x_k+rx_k\left[1-\frac{x_k}{K}\right]\Delta t+\sigma x_k\left[1-\frac{x_k}{K}\right]\sqrt{\Delta t}\,\xi_k+\frac{\sigma^2}{2}x_k^2\left[1-\frac{x_k}{K}\right]^2(\xi_k^2-1)\Delta t,\tag{6}$$

其中 ξ_k,$k=1,2,\cdots,n$ 都是服从 $N(0,1)$ 的随机变量。当 $\sigma=0$ 时,模型(6)就退化为离散化系统。

使用上述数值方法和 Matlab 软件,选取适当参数,笔者给出模型(6)的数值仿真。当 $r=0.4$,$\sigma=0.02$,$x_0=1\ 000$,$K=100\ 000$,则随机 Logistic 模型如图1。当 $\sigma=0$ 时,随机 Logistic 模型就退化为确定 Logistic 模型。由图1可见,随机 Logistic 模型随机震荡,但很快也收敛到稳定点 100 000,值得注意的是当数值在 $\frac{K}{2}$ 附近时,波动较大,这也验证了在 $x(t)=\frac{K}{2}$ 时,波动 $\sigma x(t)\left(1-\frac{x(t)}{K}\right)$ 最大。当 $\sigma=0.2$,其它数据不变时,虽然 $r>\frac{\sigma^2}{2}$,但种群仍然有灭绝的可能,如图2所示。从理论上看,在条件 $r>\frac{\sigma^2}{2}$ 下,对任意初值 $x_0>0$,方程(2)的解满足 $\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=K$,a. s.。为何在实际中有灭绝的可能呢?关键在于当种群数量小于1时,就会灭绝,而理论上可取负值,只要时间足够大一定会出现 $\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=K$,a. s.。值得注意的是目前人类电脑存在局限性,比如在模拟的时候很可能遇到极大的有界数字,但由于电脑无法显示,就默认为无穷大,进而也会终止程序,因此时间 t 很难模拟到无穷大。另外,电脑生成的随机数是伪随机数,前后数据具有一定关系,也会影响模拟的效果。当 $\sigma=1$,其它数据不变时,种

群很快灭绝，甚至只需要几步迭代就小于 0 了。

综上所述，随机波动对种群的影响非常大，白噪声取大值的概率很小，但小概率事件也可能发生，一旦发生，对种群的影响就是毁灭性的。这也许解释了某些种群瞬间灭绝的原因：统治地球的恐龙在很短的时间灭绝了，它灭绝的原因一直是个谜。长期以来，最权威的观点认为，恐龙的灭绝和 6 500 万年前坠落地球的一颗大陨星有关。假设此观点正确，小行星撞击地球本是小概率事件，就像生成了巨大的标准正态随机数，但它发生了，也产生了巨大影响，于是导致了恐龙的灭绝。

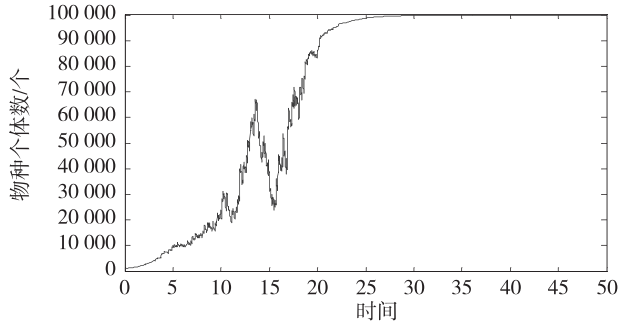

图 1　随机 Logistic 曲线

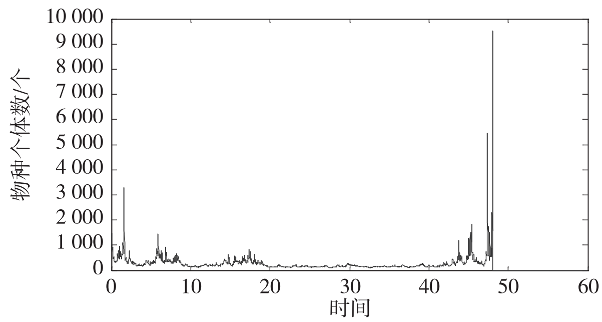

图 2　Logistic 种群模型灭绝曲线

3 Logistic 模型的最优捕获

考虑确定 Logistic 种群的最优捕获模型

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=ax(t)-bx^2(t)-h(E)x(t) \tag{7}$$

其中 $x(t)$表示 t 时种群密度，$h(x)$是严格增加函数且满足 $h(0)=0$，$E>0$ 为捕获的努力量。为叙述方便，不妨设此种群为鱼。

令 $F(x)=ax(t)-bx^2(t)-h(E)x(t)=0$，得到两个平衡点 $x_1=0$，$x_2=\dfrac{a-h(E)}{b}$。不难算出 $F'(x_1)=a-2bx(t)-h(E)|_{x=x_1}=a-h(E)$，$F'(x_2)=a-2bx(t)-h(E)|_{x=x_2}=h(E)-a$。所以若 $h(E)<a$，则 x_1 不稳定，x_2 稳定，且捕捞是持久的，即当捕获率相对较小时正平衡态是渐进稳定的；若 $h(E)>a$，正好相反。当 $h(E)=a$ 时，系统存在唯一的半稳定的平衡态，可见该临界点反映了怎样取得最大持续收获量。在平衡点 x_2 处，令 $\dfrac{ah'(E)-2h(E)h'(E)}{b}=0$，即 $E^*=h^{-1}\left(\dfrac{a}{2}\right)$为最优捕获努力量，相应于 E^* 的最优单位时间产出为 $F^*=h(E^*)x_2=\dfrac{a^2}{4b}$。

最优捕获策略依赖于最优的定义，从经济角度看，不应追求产量最大，而应追求效益最佳。假如生物的单位售价为 p，单位捕获率的费用为 c，则单位时间内收入 $T=ph(x)$，$S=cE$，利润 $R=T-S=ph(x)-cE$，则有新模型 $R(E_R)=\max\limits_{E\in(0,h^{-1}(a))}R(E)$，以可持续净收益的数学期望最大值为优化目标。在稳定条件 $x=x_2$ 下，令 $R'(E)=ph'(x_2)-c=0$，可得最大捕获强度 E_R，进而可求得最大利润下渔场的稳定产量 $x_R=h(E_R)x_2$。设 $R(E)=0$ 的解为 E_S，当 $E<E_S$ 时，利润 $R(E)>0$，盲目的经营者会加大捕获强度，反之则否，可见 E_S 是盲目捕获下的临界强度。

Clark[7]研究了当 $a=r$，$b=\dfrac{r}{K}$，$h=Ex$ 方程(7)的最优捕获问题，并给出了 $E^*=\dfrac{r}{2}$，$F^*=\dfrac{Kr}{4}$，$E_R=\dfrac{a}{2}\left(1-\dfrac{c}{pK}\right)$，$x_R=\dfrac{K}{2}+\dfrac{c}{2p}$，单位时间内的持续产量 $h_R=ax_R\left(1-\dfrac{x_R}{K}\right)=\dfrac{aK}{4}\left(1-\dfrac{c^2}{p^2K^2}\right)$。

人类为了更好的基因延续，则需要对某些种群进行开发利用，而任何种群，如果对再生资源科学管理和合理开发，应该是取之不尽用之不竭；但如果只加以开发而不加保护，种群资源就会渐渐枯竭，不仅经济受到损失，严重时将影响到人类的生存环境。为了资源的可持续发展，人们需对种群进行保护，假定初始条件 $x(0)=x_0$，对种群的开发是一次性的，具有固定开发期 T_1，即 $0\leqslant t\leqslant T_1$ 为连续捕获期，随后进入修养恢复期，即 $t>T_1$ 停止开发，于是可得以下方程：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=rx(t)\left(1-\dfrac{x(t)}{K}\right)-h(x(t)),0<t\leqslant T_1;\\ \dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=rx(t)\left(1-\dfrac{x(t)}{K}\right),t>T_1,x(0)=x_0。\end{cases}\tag{8}$$

当$h(x)\equiv h$时,即收获率为常数h时,有如下结论:假设$h<\dfrac{rK}{4}$,则当$0<t\leqslant T_1$,平衡点$x_1=\dfrac{1}{2}\left(K-\sqrt{K^2-\dfrac{4hK}{r}}\right)$不稳定,平衡点$x_2=\dfrac{1}{2}\left(K+\sqrt{K^2-\dfrac{4hK}{r}}\right)$稳定,此时,解析解为$x(t)=\dfrac{x_2-x_1}{1+\dfrac{x_2-x_0}{x_0-x_1}\mathrm{e}^{-(x_2-x_1)\frac{r}{K}t}}+x_1$。

当$t>T_1$时,进入休养保护期后,种群的增长仍为Logistic增长,只是初始条件变为x_{T_1},解析解为$x(t)=\dfrac{K}{1+\left(\dfrac{K}{x_{T_1}}-1\right)\mathrm{e}^{-r(t-T_1)}}$,并且当$t\to\infty$时,$x(t)\to K$,可见种群经过一定开发周期后,只有保护期足够长,才可以恢复。当$h(x)=hx$时,有如下结论:当$0<t\leqslant T_1$,平衡点$x_1=0$稳定,平衡点$x_2=\dfrac{K}{r}(r-h)$是全局稳定的,解析解$x(t)=\dfrac{x_2}{1+\dfrac{x_2-x_0}{x_0}\mathrm{e}^{-(r-h)t}}$。当$t>T_1$时,进入休养保护期后,种群的增长仍为Logistic增长,只是初始条件变为x_{T_1},解析解为$x(t)=\dfrac{K}{1+\left(\dfrac{K}{x_{T_1}}-1\right)\mathrm{e}^{-r(t-T_1)}}$,并且当$t\to\infty$时,$x(t)\to K$。如果$h$趋近$r$,$x_2\to 0$,即种群最终灭亡,可见收获系数$h$要充分小于$r$。

再生生物的开发模型,不仅受人类社会的随机干扰如劳动力成本、产品价格、原油价格等,还受自然界的随机干扰如气候变化、食物供应、生存环境、天敌的状况等。因此假定内秉增长率a和$h(E)$都受随机干扰,分别为$a=a+u\dot{B}_1(t)$,$h(E)=h(E)+v\dot{B}_2(t)$,其中$\dot{B}_1(t)$,$\dot{B}_2(t)$是两个独立的噪声源,$u,v>0$分别表示两个噪声源的强度。方程(7)就变成了

$$\mathrm{d}x(t)=[(a-h(E_0))x(t)-bx^2(t)]\mathrm{d}t+ux(t)\mathrm{d}B_1(t)-vx(t)\mathrm{d}B_2(t)=m(x(t))\mathrm{d}t+\sigma(x(t))\mathrm{d}B(t)。\tag{9}$$

其中$m(x)=(a-h(E_0))x-bx^2$,$\sigma(x)=(ux,-vx)$,$B(t)=(B_1(t),B_1(t))^{\mathrm{T}}$。

对于SDE
$$\mathrm{d}x(t)=f(t)\mathrm{d}t+\sqrt{g(x)}\,\mathrm{d}B(t),\tag{10}$$
记$p(x)$为方程(10)的解过程的平稳渐进分布,则其Fokker-Planck方程为$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(x)p(x)]-\dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}[g(x)p(x)]=0$。如果解过程保持在区间$(a,b)\subset[0,\infty)$,$b<\infty$,且解过程依概率1不穿过点$a,b$,则区间$(a,b)$的端点称为反射的。此时Fokker-Planck方程的解为$p(x)=\dfrac{N}{g(x)}\exp\left[2\int_c^x\dfrac{f(s)}{g(s)}\mathrm{d}s\right]$,$c,x\in(a,b)$,其中常数$N$由标准化条件$\int_a^b p(x)\mathrm{d}x=1$确定。

定理3 对随机Logistic模型(7),当$E_0<h^{-1}\left(a-\dfrac{u^2+v^2}{2}\right)$时,导致可持续产出量的数学期望最大的捕获策略存在,且唯一的最优捕获努力量$E_s^*=h^{-1}\left(\dfrac{a}{2}-\dfrac{u^2+v^2}{4}\right)$,可持续产出量的数学期望最大值为$F_s^*=\dfrac{1}{4b}\left(a-\dfrac{u^2+v^2}{2}\right)^2$,方差为$D_s^*=\dfrac{u^2+v^2}{16b^2}\left(a-\dfrac{u^2+v^2}{2}\right)^3$。

证明 令$f(x)=m(x)$,$g(x)=\sigma(x)\sigma^{\mathrm{T}}(x)$,则方程(1)的Fokker-Planck方程为

$$\frac{\partial p(x,t,E_0)}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x}(b(x)p(x,t,E_0))+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}((u^2+v^2)x^2p(x,t,E_0))。$$

平稳概率分布满足$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[b(x)p(x,E_0)]-\dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}[(u^2+v^2)x^2p(x,E_0)]=0$,此方程的解为:

$$p(x,E_0)=\frac{N(E_0)}{(u^2+v^2)x^2}\exp\left[2\int_{x_0}^x\frac{a-h(E_0)s-bs^2}{(u^2+v^2)s^2}\mathrm{d}s\right]=N(E_0)x^{\frac{2a-2h(E_0)}{u^2+v^2}-2}\mathrm{e}^{-\frac{2b}{u^2+v^2}x}。$$

如果 $E_0 \geqslant h^{-1}\left(a-\frac{u^2+v^2}{2}\right)$，则密度函数 $p(x,E_0)$ 趋近于 $t=0$ 处的 delta 分布，即最优捕获策略不存在。如果 $E_0 < h^{-1}\left(a-\frac{u^2+v^2}{2}\right)$，则广义积分常数 $\int_0^{\infty} p(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则由 $N(E_0)$ 满足 $\int_0^{\infty} p(x)\mathrm{d}x=1$ 可得：

$$N(E_0)=\left[\int_0^{+\infty} x^{\frac{2a-2h(E_0)}{u^2+v^2}-2}\mathrm{e}^{-\frac{2b}{u^2+v^2}x}\mathrm{d}x\right]^{-1}=A^{B(E_0)-1}\Gamma(B(E_0)-1),$$

其中 $A=\frac{u^2+v^2}{2b}$，$B(E_0)=\frac{2a-2h(E_0)}{u^2+v^2}$。相应捕获量 E_0 的可持续产出为 $xh(E_0)$，期望

$$F(E_0)=E(xh(E_0))=\int_0^{+\infty} h(E_0)xp(x,E_0)\mathrm{d}x=\frac{h(E_0)\int_0^{+\infty} x^{\frac{2a-2h(E_0)}{u^2+v^2}-1}\mathrm{e}^{-\frac{2b}{u^2+v^2}x}\mathrm{d}x}{\int_0^{+\infty} x^{\frac{2a-2h(E_0)}{u^2+v^2}-2}\mathrm{e}^{-\frac{2b}{u^2+v^2}x}\mathrm{d}x}=\frac{h(E_0)A^{B(E_0)}\Gamma(B(E_0))}{A^{B(E_0)-1}\Gamma(B(E_0)-1)}=$$

$$h(E_0)A(B(E_0)-1)=\frac{h(E_0)(u^2+v^2)}{2b}\left(\frac{2a-2h(E_0)}{u^2+v^2}-1\right)=\frac{h(E_0)(2a-2h(E_0)-u^2-v^2)}{2b}。$$

当 $E_0=0$ 时，$h(E_0)=0$，即 $F(E_0)=0$；当 $E_0 \to h^{-1}\left(a-\frac{u^2+v^2}{2}\right)$ 时，$F(E_0)\to 0$；故由罗尔定理可知 $F(E_0)$ 存在唯一极值点。对 E_0 求导可得 $h'(E_0)(2a-u^2-v^2)-4h(E_0)h'(E_0)=0$。于是最优捕获努力量 $E_s^*=h^{-1}\left(\frac{a}{2}-\frac{u^2+v^2}{4}\right)$。最大持续产出量的数学期望的最大值为

$$F_s^*=F(E_s^*)=h(E_s^*)A(B(E_s^*)-1)=\frac{1}{4b}\left(a-\frac{u^2+v^2}{2}\right)^2,h(E_s^*)=\frac{a}{2}-\frac{u^2+v^2}{4},$$

$$D(h(E_s^*)x)=E(h(E_s^*)x)^2-[E(h(E_s^*)x)]^2=\int_0^{+\infty} h(E_s^*)^2x^2p(x,E_s^*)\mathrm{d}x-[F(E_s^*)]^2=$$

$$\frac{h(E_s^*)^2A^{B(E_s^*)+1}\Gamma(B(E_s^*)+1)}{A^{B(E_s^*)-1}\Gamma(B(E_s^*)-1)}-[F(E_s^*)]^2=h(E_s^*)^2A^2B(E_s^*)(B(E_s^*)-1)-[h(E_s^*)A(B(E_s^*)-1)]^2=$$

$$h(E_s^*)^2A^2(B(E_s^*)-1)=\frac{[4a^2-(u^2+v^2)^2]}{64b^2}\left(a-\frac{u^2+v^2}{2}\right)^2-\frac{1}{16b^2}\left(a-\frac{u^2+v^2}{2}\right)^4=\frac{u^2+v^2}{16b^2}\left(a-\frac{u^2+v^2}{2}\right)^3。$$ 证毕

由此可见，随机干扰不利于再生资源的开发，噪声的强度越大最优捕获努力量和可持续产出量的数学期望的最大值就越小，特别当 $u^2+v^2>2a$ 时，最优捕获策略就不存在，即波动太大，整个系统处于混沌状态，人们无法预测，也找不到最优捕获策略。

当 $u=0$ 时，即生物种群不受环境干扰，只有捕获量受人类社会本身的干扰，则模型可简化为 $\mathrm{d}x(t)=[(a-h(E_0))x(t)-bx^2(t)]\mathrm{d}t-vx(t)\mathrm{d}B_2(t)$，则当且仅当 $E_0<h^{-1}\left(a-\frac{v^2}{2}\right)$ 成立时，存在使得期望产量最大唯一的最优捕获策略 $E_s^*=h^{-1}\left(\frac{a}{2}-\frac{v^2}{4}\right)$，可持续产出量的数学期望最大值为 $F_s^*=\frac{1}{4b}\left(a-\frac{v^2}{2}\right)^2$。

当 $u=v=0$ 时，则模型退化为确定 Logistic 模型的最优捕获问题，并与经典结果一致，可见随机 Logistic 模型的最优捕获问题是经典结果的推广。下面把类似确定模型的经济因素加入，以可持续净收益的数学期望最大值为优化目标。假如生物的单位售价为 p，单位捕获量的费用为 q，则单位时间利润 $R(E_0)=T-S=pF(E_0)-qh(E_0)$，则得到新模型 $R(E_s^*)=\max\limits_{E_0\in\left(0,h^{-1}\left(a-\frac{u^2+v^2}{2}\right)\right)} R(E_0)$。

令 $R'(E_0)=pF'(E_0)-qh'(E_0)=0$，$Ap\left[h'(E_0)(B(E_0)-1)-\frac{2h'(E_0)}{u^2+v^2}h(E_0)\right]-qh'(E_0)=0$，$\frac{2a-4h(E_0)-(u^2+v^2)}{u^2+v^2}=\frac{2bq}{p(u^2+v^2)}$，$h(E_0)=\frac{a}{2}-\frac{u^2+v^2}{4}-\frac{qb}{2p}$，则最大捕获强度 $E_s^*=h^{-1}\left(\frac{a}{2}-\frac{u^2+v^2}{4}-\frac{qb}{2p}\right)$，由于 $h(x)$ 为增函数，所以 $h^{-1}(x)$ 也为增函数，即最大捕获量与波动和单位捕获量的费用 q 反向变化，与单位售价 p 同向变化，这也与直观相吻合。

进而求得可持续收益的数学期望最大值为 $R(E_s^*)=h(E_s^*)[A(B(E_s^*)-1)p-q]=\left(\frac{a}{2}-\frac{u^2+v^2}{4}-\frac{qb}{2p}\right)\left[\frac{p(u^2+v^2)}{2b}\frac{a-\frac{u^2+v^2}{2}+\frac{qb}{p}}{u^2+v^2}-q\right]=\frac{(2ap-p(u^2+v^2)-2bq)^2}{16bp}$，可持续收益的波动就是生物售价 $ph(E_s^*)x$ 的

波动,则持续收益的方差为 $D(E_s^*)=D[ph(E_s^*)x]=p^2D[h(E_s^*)x]=p^2h(E_s^*)^2A^2(B(E_s^*)-1)=$

$$p^2\left(\frac{a}{2}-\frac{u^2+v^2}{4}-\frac{qb}{2p}\right)^2\left(\frac{u^2+v^2}{2b}\right)^2\frac{a+\frac{qb}{p}-\frac{u^2+v^2}{2}}{u^2+v^2}=\frac{p^2(u^2+v^2)}{16b^2}\left(a-\frac{u^2+v^2}{2}-\frac{qb}{p}\right)^2\left(a+\frac{qb}{p}-\frac{u^2+v^2}{2}\right)。$$

环境剧烈变化可能会使生物种类丰富,即新生物滋生,但会导致总体的种类数量是减少的,最优捕获量是减少的,是不利于人类可持续发展的。人类社会动荡,会减少再生生物资源开发的期望值,资源减少,当然不利于人类的生存。总之,随机干扰不利于再生生物资源的开发利用,因此尽量保持自然环境的稳定、人类社会的稳定具有重大意义。

参考文献:

[1] 龚军辉. Logistic 方程的推导及其生物学意义[J]. 高等函授学报:自然科学版,2008,22 (1):48-50.
Gong J H. Logistic equation derivation and its biological significance[J]. Journal of Higher Correspondence Education:Natural Sciences,2008,22(1):48-50.

[2] 唐三一,肖艳妮. 单种群生物动力系统[M]. 北京:科学出版社,2008:34-60.
Tang S Y,Xiao Y N. Singlespecies biodynamic system[M]. Beijing:Science Press,2008:34-60.

[3] 赵亚男,翁世有. 具有随机扰动的广义"食物有限"种群模型正解的存在性和惟一性[J]. 吉林大学学报:理学版,2007,45(6):919-922.
Zhao Y N,Weng S Y. Existence and uniqueness of position solutions to the general "food-limited" species model with random perturbation[J]. Journalof Jilin University:Science Edition,2007,45(6):919-922.

[4] 赵亚男,高海音. 具有随机扰动的广义食物有限种群模型正解的全局吸引性[J]. 吉林大学学报:理学版,2011,49(2):263-266.
Zhao Y N,Gao H Y. Global attractivity of positive solutions to general "food-limited"species model with random perturbation[J]. Journalof Jilin University:Science Edition,2011,49(2):263-266.

[5] 王晓燕,杨俊元. 具有 Logistic 增长和年龄结构的 SIS 模型[J]. 数学实践与认识,2007,37(15):99-104.
Wang X Y,Yang J Y. An SIS epidemic model with Logistic growth and age of infection[J]. Mathematics in Practice and Theory,2007,37(15):99-104.

[6] 赵斌,赵继伟,袁敏. 一类生物数学模型的产生和发展[J]. 西北大学学报:自然科学版,2011,41(3):534-536.
ZhaoB, Zhao J W, Yuan M. The emergence and development of a class of biomathematical model[J]. Journal of Northwest University: Natural Science Edition, 2011, 41(3):534-536.

[7] 王克. 随机生物数学模型[M]. 北京:科学出版社,2010:10-50.
Wang K. Stochastic mathematical models of biological[M]. Beijing:Science Press,2010,7:10-50.

[8] 龚光鲁. 随机微分方程及其应用概要[M]. 北京:清华大学出版社,2008:100-130.
Gong G L. Summary of sochastic differential equations and its applications[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2008:100-130.

Comparative Study between Stochastic Logistic Model to Deterministic Logistic Model

WANG Bingcan[1], WEI Yanhua[1], DAI Ning[2]

(1. School of Mathematics and Statistics, Tianshui Normal University, Tianshui Gansu 741001;
2. Department of Mathematics, Zhengzhou University, Zhengzhou 450002, China)

Abstract: It comparative studies the property, the problem of best capture and the biological meaning of deterministic logistic model and stochastic Logistic model, special studies the existence, progressive, and stability of the solution with stochastic model. Numerical simulation supports the theoretical results. It gets that random interference is not conducive to the development of renewable biological resources. If the noise is greater, the maximum mathematical expectation of optimal capture effort and sustainable yield decreases, but the variance increases.

Key words: Logistic model; Ito formula; random lasting; almost randomly determined; optimal harvesting

(责任编辑 方 兴)