DOI:10.11721/cqnuj20150220

块 H-矩阵的判定和应用*

高会双
(内蒙古民族大学 数学学院，内蒙古 通辽 028000)

摘要:利用矩阵的块对角占优和块广义严格对角占优的性质,给出了块严格 α_1-对角占优矩阵的等价表示,进而得到了块 H-矩阵新的判定法则,即设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}$, $M_5=\varnothing$,若 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\dfrac{\|\boldsymbol{A}_{ii}^{-1}\|^{-1}-R_i(\boldsymbol{A})}{C_i(\boldsymbol{A})-R_i(\boldsymbol{A})}+\dfrac{\|\boldsymbol{A}_{jj}^{-1}\|^{-1}-C_j(\boldsymbol{A})}{R_j(\boldsymbol{A})-C_j(\boldsymbol{A})}\geqslant 1$ ($\forall i\in M_1, j\in M_2$),则 $\boldsymbol{A}$ 为块 H-矩阵。并应用于矩阵正稳定性的判定。

关键词:块 α-对角占优矩阵;块 H-矩阵;正稳定矩阵;M-矩阵

中图分类号:O151.21　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2015)02-0099-05

1 预备知识

近些年来,分块矩阵越来越受到人们的关注,因为在很多实际问题中,系数矩阵的维数越来越大。1962 年,Feingold 和 Varga 首先给出了块对角矩阵的概念[1]。1969 年,Robert 对块对角优矩阵的相关概念进行了推广[2],而且引入了广义块对角占优矩阵(块 H-矩阵)的概念。国内外许多学者都对块对角优矩阵进行了研究,得到了一些重要成果[1-8]。本文给出了块严格 α-对角占优矩阵的等价表示,进而得到了块 H-矩阵新的判定法则,作为应用得到了正稳定矩阵的判定条件。

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}$ 为 n 阶复方阵,分块如下

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1m}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2m}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \boldsymbol{A}_{m1} & \boldsymbol{A}_{m2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{mm}\end{pmatrix}。\tag{1}$$

其中,$\boldsymbol{A}_{ii}$ 为 n_i 阶复矩阵,$1\leqslant i\leqslant m$, $\sum_{i=1}^{m}n_i=n$。设 $R_i(\boldsymbol{A}):=\sum_{j\neq i}\|\boldsymbol{A}_{ij}\|$, $C_i(\boldsymbol{A}):=\sum_{j\neq i}\|\boldsymbol{A}_{ji}\|$, $\forall i\in M=\{1,2,\cdots,m\}$,这里的矩阵范数 $\|\cdot\|$ 为向量范数诱导的矩阵范数。记 $M_1=\{i\in M\mid R_i(\boldsymbol{A})<\|\boldsymbol{A}_{ii}^{-1}\|^{-1}<C_i(\boldsymbol{A})\}$, $M_2=\{i\in M\mid C_i(\boldsymbol{A})<\|\boldsymbol{A}_{ii}^{-1}\|^{-1}<R_i(\boldsymbol{A})\}$, $M_3=\{i\in M\mid \|\boldsymbol{A}_{ii}^{-1}\|^{-1}\geqslant R_i(\boldsymbol{A}), \|\boldsymbol{A}_{ii}^{-1}\|^{-1}>C_i(\boldsymbol{A})\}$, $M_4=\{i\in M\mid \|\boldsymbol{A}_{ii}^{-1}\|^{-1}\geqslant C_i(\boldsymbol{A}), \|\boldsymbol{A}_{ii}^{-1}\|^{-1}>R_i(\boldsymbol{A})\}$, $M_5=\{i\in M\mid \|\boldsymbol{A}_{ii}^{-1}\|^{-1}\leqslant R_i(\boldsymbol{A}), \|\boldsymbol{A}_{ii}^{-1}\|^{-1}\leqslant C_i(\boldsymbol{A})\}$。显然有 $M=M_1\cup M_2\cup M_3\cup M_4\cup M_5$。

定义 1[1]　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}$,分块如(1)式,若存在 $\alpha\in[0,1]$,使得

$$\|\boldsymbol{A}_{ii}^{-1}\|^{-1}\geqslant(>)R_i(\boldsymbol{A})\ (\forall i\in M),\tag{2}$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 为块(严格)对角占优矩阵,记为 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{BD}$。

定义 2　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}$,分块如(1)式,若存在 $\alpha\in[0,1]$,使得

$$\|\boldsymbol{A}_{ii}^{-1}\|^{-1}\geqslant(>)\alpha R_i(\boldsymbol{A})+(1-\alpha)C_i(\boldsymbol{A})\ (\forall i\in M),\tag{3}$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 为块(严格)α_1-对角占优矩阵,记为 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{BD}_1(\alpha_0)(\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{BD}_1(\alpha))$。

定义 3　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}$,分块如(1)式,若存在 $\alpha\in[0,1]$,使得

$$\|\boldsymbol{A}_{ii}^{-1}\|^{-1}\geqslant(>)R_i^{\alpha}(\boldsymbol{A})C_i^{1-\alpha}(\boldsymbol{A})\ (\forall i\in M),\tag{4}$$

* **收稿日期**:2014-04-30　**修回日期**:2014-11-26　**网络出版时间**:2015-01-22 11:56
资助项目:内蒙古民族大学科学研究基金(No. NMD1226);内蒙古自治区高等学校科学研究项目(No. NJZY13175)
作者简介:高会双,女,讲师,研究方向为数值代数和算子代数,E-mail:gaohuishuang@163.com
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20150122.1156.012.html

则称 $\boldsymbol{A}$ 为块(严格)α_2-对角占优矩阵,记为 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{BD}_2(\alpha_0)$($\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{BD}_2(\alpha)$)。

注 在定义 2 和定义 3 中,则当 $\alpha=1$ 时有 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{BD}$,$\alpha=0$ 时有 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\in\boldsymbol{BD}$,由此可知定义 2 和定义 3 是定义 1 的推广。

定义 4 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}$,分块如(1)式,若存在正对角阵 $\boldsymbol{X}$($\boldsymbol{X}$ 的分块形式与 $\boldsymbol{A}$ 的分块形式相同),使得 $\boldsymbol{AX}\in\boldsymbol{BD}$,则称 $\boldsymbol{A}$ 为块 H-矩阵(或块广义严格对角占优矩阵),记为 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{BH}$。

定义 5[7] 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}$,特征值实部若满足 $\mathrm{Re}\,\lambda(\boldsymbol{A})>0$,则 $\boldsymbol{A}$ 称为正稳定矩阵。

引理 1[8] 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}$,分块如(1)式,且 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{BD}_2(\alpha)$,则 $\boldsymbol{A}$ 为块 H-矩阵。

引理 2[9] 设 σ,τ 是任意两个非负实数,$\alpha\in[0,1]$,则有 $\alpha\tau+(1-\alpha)\sigma\geqslant\tau^{\alpha}\sigma^{1-\alpha}$,且等号成立的充要条件是 $\tau=\sigma$。

2 块 α-对角占优矩阵的等价表示与非奇异块 H-矩阵的判定

首先给出块严格 α-对角占优矩阵的等价表示。

定理 1 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}$,分块如(1)式,则 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{BD}_1(\alpha)$ 的充分必要条件是 $M_5=\varnothing$,且对任意的 $i\in M_1$,$j\in M_2$ 有

$$\frac{\|\boldsymbol{A}_{ii}^{-1}\|^{-1}-R_i(\boldsymbol{A})}{C_i(\boldsymbol{A})-R_i(\boldsymbol{A})}+\frac{\|\boldsymbol{A}_{jj}^{-1}\|^{-1}-C_j(\boldsymbol{A})}{R_j(\boldsymbol{A})-C_j(\boldsymbol{A})}>1。\tag{5}$$

证明 必要性。由 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{BD}_1(\alpha)$,显然有 $M_5=\varnothing$。则对任意的 $i\in M_1$,有 $\|\boldsymbol{A}_{ii}^{-1}\|^{-1}>\alpha R_i(\boldsymbol{A})+(1-\alpha)C_i(\boldsymbol{A})$,即 $\alpha>\dfrac{C_i(\boldsymbol{A})-\|\boldsymbol{A}_{ii}^{-1}\|^{-1}}{C_i(\boldsymbol{A})-R_i(\boldsymbol{A})}$,知

$$1-\alpha<\frac{\|\boldsymbol{A}_{ii}^{-1}\|^{-1}-R_i(\boldsymbol{A})}{C_i(\boldsymbol{A})-R_i(\boldsymbol{A})}。\tag{6}$$

同理,对任意的 $j\in M_2$,有 $\|\boldsymbol{A}_{jj}^{-1}\|^{-1}>\alpha R_j(\boldsymbol{A})+(1-\alpha)C_j(\boldsymbol{A})$,即

$$\alpha<\frac{\|\boldsymbol{A}_{jj}^{-1}\|^{-1}-C_j(\boldsymbol{A})}{R_j(\boldsymbol{A})-C_j(\boldsymbol{A})}。\tag{7}$$

综合(6)式和(7)式知,对任意的 $i\in M_1$,$j\in M_2$ 有 $\dfrac{\|\boldsymbol{A}_{ii}^{-1}\|^{-1}-R_i(\boldsymbol{A})}{C_i(\boldsymbol{A})-R_i(\boldsymbol{A})}+\dfrac{\|\boldsymbol{A}_{jj}^{-1}\|^{-1}-C_j(\boldsymbol{A})}{R_j(\boldsymbol{A})-C_j(\boldsymbol{A})}>1$。

充分性。由指标集 M_1 的取法可知,对任意的 $i\in M_1$,有 $0<\dfrac{\|\boldsymbol{A}_{ii}^{-1}\|^{-1}-R_i(\boldsymbol{A})}{C_i(\boldsymbol{A})-R_i(\boldsymbol{A})}<1$,则知存在充分小的 $\varepsilon_1>0$,使 $0<\dfrac{\|\boldsymbol{A}_{ii}^{-1}\|^{-1}-R_i(\boldsymbol{A})}{C_i(\boldsymbol{A})-R_i(\boldsymbol{A})}-\varepsilon_1$。再由(5)式可知存在充分小的 $\varepsilon_2>0$,使对任意的 $i\in M_1$,$j\in M_2$ 有

$$\frac{\|\boldsymbol{A}_{ii}^{-1}\|^{-1}-R_i(\boldsymbol{A})}{C_i(\boldsymbol{A})-R_i(\boldsymbol{A})}+\frac{\|\boldsymbol{A}_{jj}^{-1}\|^{-1}-C_j(\boldsymbol{A})}{R_j(\boldsymbol{A})-C_j(\boldsymbol{A})}-\varepsilon_2>1。\tag{8}$$

令 $\varepsilon=\min\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$,

$$\alpha=\frac{\|\boldsymbol{A}_{ii}^{-1}\|^{-1}-R_i(\boldsymbol{A})}{C_i(\boldsymbol{A})-R_i(\boldsymbol{A})}-\varepsilon,\tag{9}$$

则 $0<\alpha<1$。由(9)式知

$$\frac{\|\boldsymbol{A}_{ii}^{-1}\|^{-1}-R_i(\boldsymbol{A})}{C_i(\boldsymbol{A})-R_i(\boldsymbol{A})}>\alpha。\tag{10}$$

由(10)式得 $\|\boldsymbol{A}_{ii}^{-1}\|^{-1}>\alpha R_i(\boldsymbol{A})+(1-\alpha)C_i(\boldsymbol{A})$。由(8)式得 $\dfrac{\|\boldsymbol{A}_{jj}^{-1}\|^{-1}-C_j(\boldsymbol{A})}{R_j(\boldsymbol{A})-C_j(\boldsymbol{A})}>1-\left(\dfrac{\|\boldsymbol{A}_{ii}^{-1}\|^{-1}-R_i(\boldsymbol{A})}{C_i(\boldsymbol{A})-R_i(\boldsymbol{A})}-\varepsilon\right)$,即 $\dfrac{\|\boldsymbol{A}_{jj}^{-1}\|^{-1}-C_j(\boldsymbol{A})}{R_j(\boldsymbol{A})-C_j(\boldsymbol{A})}>1-\alpha$,进而得 $\|\boldsymbol{A}_{jj}^{-1}\|^{-1}>\alpha R_j(\boldsymbol{A})+(1-\alpha)C_j(\boldsymbol{A})$。对任意的 $k\in M_3\cup M_4$ 及任意的 $\alpha\in(0,1)$,显然有 $\|\boldsymbol{A}_{kk}^{-1}\|^{-1}>\alpha R_k(\boldsymbol{A})+(1-\alpha)C_k(\boldsymbol{A})$。

综上所述,由 $M_5=\varnothing$ 知对任意 $i\in M_1\cup M_2\cup M_3\cup M_4$,$\alpha\in(0,1)$,使得 $\|\boldsymbol{A}_{ii}^{-1}\|^{-1}>\alpha R_i(\boldsymbol{A})+(1-\alpha)C_i(\boldsymbol{A})$,即 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{BD}_1(\alpha)$。 证毕

下面得到块 H-矩阵新的判定法则。

定理 2 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}$,$M_5=\varnothing$,如果 $\boldsymbol{A}$ 满足下列条件之一:1) $M_5\cup M_1=\varnothing$,2) $M_5\cup M_2=\varnothing$,则 $\boldsymbol{A}$ 为

块 H-矩阵。

证明　1) 设 $M_5 \cup M_1 = \varnothing$,对任意的 $j \in M_2$,由 $0 < \dfrac{\|\boldsymbol{A}_{jj}^{-1}\|^{-1} - C_j(\boldsymbol{A})}{R_j(\boldsymbol{A}) - C_j(\boldsymbol{A})} < 1$ 知,存在 $\alpha \in (0,1)$ 使得 $\alpha < \dfrac{\|\boldsymbol{A}_{jj}^{-1}\|^{-1} - C_j(\boldsymbol{A})}{R_j(\boldsymbol{A}) - C_j(\boldsymbol{A})}$,再由引理 2 得 $\|\boldsymbol{A}_{jj}^{-1}\|^{-1} > \alpha R_j(\boldsymbol{A}) + (1-\alpha)C_j(\boldsymbol{A}) \geqslant R_j^{\alpha}(\boldsymbol{A})C_j^{1-\alpha}(\boldsymbol{A})$。

又因为对任意的 $k \in M_3 \cup M_4$,任意的 $\alpha \in (0,1)$ 以及引理 2 显然有 $\|\boldsymbol{A}_{kk}^{-1}\|^{-1} > \alpha R_k(\boldsymbol{A}) + (1-\alpha)C_k(\boldsymbol{A}) \geqslant R_k^{\alpha}(\boldsymbol{A})C_k^{1-\alpha}(\boldsymbol{A})$。

综上可知,$\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{BD}_2(\alpha)$,再由引理 1 知 $\boldsymbol{A}$ 为块 H-矩阵。

2) 设 $M_5 \cup M_2 = \varnothing$,对任意的 $i \in M_1$,由 $0 < \dfrac{C_i(\boldsymbol{A}) - \|\boldsymbol{A}_{ii}^{-1}\|^{-1}}{C_i(\boldsymbol{A}) - R_i(\boldsymbol{A})} = 1 - \dfrac{\|\boldsymbol{A}_{ii}^{-1}\|^{-1} - R_i(\boldsymbol{A})}{C_i(\boldsymbol{A}) - R_i(\boldsymbol{A})} < 1$ 知存在 $\alpha \in (0,1)$ 使得 $0 < \dfrac{C_i(\boldsymbol{A}) - \|\boldsymbol{A}_{ii}^{-1}\|^{-1}}{C_i(\boldsymbol{A}) - R_i(\boldsymbol{A})} < \alpha$,同时由引理 2 得

$$\|\boldsymbol{A}_{ii}^{-1}\|^{-1} > \alpha R_i(\boldsymbol{A}) + (1-\alpha)C_i(\boldsymbol{A}) \geqslant R_i^{\alpha}(\boldsymbol{A})C_i^{1-\alpha}(\boldsymbol{A})。$$

又因为对任意的 $k \in M_3 \cup M_4$,任意的 $\alpha \in (0,1)$ 以及引理 2 显然有 $\|\boldsymbol{A}_{kk}^{-1}\|^{-1} > \alpha R_k(\boldsymbol{A}) + (1-\alpha)C_k(\boldsymbol{A}) \geqslant R_k^{\alpha}(\boldsymbol{A})C_k^{1-\alpha}(\boldsymbol{A})$。

综上可得,$\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{BD}_2(\alpha)$,再由引理 1 知 $\boldsymbol{A}$ 为块 H-矩阵。　　证毕

因此,下面笔者总假设 $M_1 \neq \varnothing$ 且 $M_2 \neq \varnothing$。

定理 3　设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in \mathbf{C}^{n \times n}$,$M_5 = \varnothing$,若对任意的 $i \in M_1$,$j \in M_2$,$\boldsymbol{A}$ 满足不等式

$$\frac{\|\boldsymbol{A}_{ii}^{-1}\|^{-1} - R_i(\boldsymbol{A})}{C_i(\boldsymbol{A}) - R_i(\boldsymbol{A})} + \frac{\|\boldsymbol{A}_{jj}^{-1}\|^{-1} - C_j(\boldsymbol{A})}{R_j(\boldsymbol{A}) - C_j(\boldsymbol{A})} \geqslant 1, \tag{11}$$

则 $\boldsymbol{A}$ 为块 H-矩阵。

证明　分两种情形讨论。

情形 1,如果对任意的 $i \in M_1$,$j \in M_2$,有 $\dfrac{\|\boldsymbol{A}_{ii}^{-1}\|^{-1} - R_i(\boldsymbol{A})}{C_i(\boldsymbol{A}) - R_i(\boldsymbol{A})} + \dfrac{\|\boldsymbol{A}_{jj}^{-1}\|^{-1} - C_j(\boldsymbol{A})}{R_j(\boldsymbol{A}) - C_j(\boldsymbol{A})} > 1$,由定理 1 知 $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{BD}_1(\alpha)$,再根据引理 2 知存在 $\alpha \in (0,1)$,对任意 $j \in M_2$,使得

$$\|\boldsymbol{A}_{jj}^{-1}\|^{-1} > \alpha R_j(\boldsymbol{A}) + (1-\alpha)C_j(\boldsymbol{A}) \geqslant R_j^{\alpha}(\boldsymbol{A})C_j^{1-\alpha}(\boldsymbol{A}),$$

根据引理 1 知 $\boldsymbol{A}$ 为块 H-矩阵。

情形 2,不失一般性,总可假设存在 $i_0 \in M_1$,$j_0 \in M_2$,使 $\dfrac{\|\boldsymbol{A}_{i_0 i_0}^{-1}\|^{-1} - R_{i_0}(\boldsymbol{A})}{C_{i_0}(\boldsymbol{A}) - R_{i_0}(\boldsymbol{A})} + \dfrac{\|\boldsymbol{A}_{j_0 j_0}^{-1}\|^{-1} - C_{j_0}(\boldsymbol{A})}{R_{j_0}(\boldsymbol{A}) - C_{j_0}(\boldsymbol{A})} = 1$,且对任意的 $i \in M_1 \backslash i_0$,$j \in M_2 \backslash j_0$ 有 $\dfrac{\|\boldsymbol{A}_{ii}^{-1}\|^{-1} - R_i(\boldsymbol{A})}{C_i(\boldsymbol{A}) - R_i(\boldsymbol{A})} + \dfrac{\|\boldsymbol{A}_{jj}^{-1}\|^{-1} - C_j(\boldsymbol{A})}{R_j(\boldsymbol{A}) - C_j(\boldsymbol{A})} > 1$。

令 $\alpha_0 = \dfrac{\|\boldsymbol{A}_{j_0 j_0}^{-1}\|^{-1} - C_{j_0}(\boldsymbol{A})}{R_{j_0}(\boldsymbol{A}) - C_{j_0}(\boldsymbol{A})} = 1 - \dfrac{\|\boldsymbol{A}_{i_0 i_0}^{-1}\|^{-1} - R_{i_0}(\boldsymbol{A})}{C_{i_0}(\boldsymbol{A}) - R_{i_0}(\boldsymbol{A})}$,则 $\|\boldsymbol{A}_{i_0 i_0}^{-1}\|^{-1} = \alpha_0 R_{i_0}(\boldsymbol{A}) + (1-\alpha_0)C_{i_0}(\boldsymbol{A})$ 成立,由引理 2 和 $R_{i_0}(\boldsymbol{A}) < \|\boldsymbol{A}_{i_0 i_0}^{-1}\|^{-1} < C_{i_0}(\boldsymbol{A})$,得

$$\|\boldsymbol{A}_{i_0 i_0}^{-1}\|^{-1} = \alpha_0 R_{i_0}(\boldsymbol{A}) + (1-\alpha_0)C_{i_0}(\boldsymbol{A}) > R_{i_0}^{\alpha_0}(\boldsymbol{A})C_{i_0}^{1-\alpha_0}(\boldsymbol{A})$$

和 $\|\boldsymbol{A}_{j_0 j_0}^{-1}\|^{-1} = \alpha_0 R_{j_0}(\boldsymbol{A}) + (1-\alpha_0)C_{j_0}(\boldsymbol{A})$ 成立,由引理 2 和 $C_{j_0}(\boldsymbol{A}) < \|\boldsymbol{A}_{j_0 j_0}^{-1}\|^{-1} < R_{j_0}(\boldsymbol{A})$,得 $\|\boldsymbol{A}_{j_0 j_0}^{-1}\|^{-1} = \alpha_0 R_{j_0}(\boldsymbol{A}) + (1-\alpha_0)C_{j_0}(\boldsymbol{A}) > R_{j_0}^{\alpha_0}(\boldsymbol{A})C_{j_0}^{1-\alpha_0}(\boldsymbol{A})$。

由(11)式,显然有 $1 - \dfrac{\|\boldsymbol{A}_{ii}^{-1}\|^{-1} - R_i(\boldsymbol{A})}{C_i(\boldsymbol{A}) - R_i(\boldsymbol{A})} \leqslant \alpha_0 \leqslant \dfrac{\|\boldsymbol{A}_{jj}^{-1}\|^{-1} - C_j(\boldsymbol{A})}{R_j(\boldsymbol{A}) - C_j(\boldsymbol{A})}$。

对任意的 $i \in M_1 \backslash i_0$,$j \in M_2 \backslash j_0$ 应用于情形 1,得

$$\|\boldsymbol{A}_{ii}^{-1}\|^{-1} > R_i^{\alpha_0}(\boldsymbol{A})C_i^{1-\alpha_0}(\boldsymbol{A}),\ \|\boldsymbol{A}_{jj}^{-1}\|^{-1} > R_j^{\alpha_0}(\boldsymbol{A})C_j^{1-\alpha_0}(\boldsymbol{A})。$$

又因为对任意的 $k \in M_3 \cup M_4$,任意的 $\alpha \in (0,1)$ 以及引理 2 显然有

$$\|\boldsymbol{A}_{kk}^{-1}\|^{-1} > \alpha R_k(\boldsymbol{A}) + (1-\alpha)C_k(\boldsymbol{A}) \geqslant R_k^{\alpha}(\boldsymbol{A})C_k^{1-\alpha}(\boldsymbol{A})。$$

综上可得,令 $\alpha = \alpha_0 \in (0,1)$,由 $M_5 = \varnothing$,则对任意的 $i \in M$,得 $\|\boldsymbol{A}_{ii}^{-1}\|^{-1} > R_i^{\alpha}(\boldsymbol{A})C_i^{1-\alpha}(\boldsymbol{A})$,即 $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{BD}_2(\alpha)$,根据引理 1 知 $\boldsymbol{A}$ 为块 H-矩阵。　　证毕

3 应用

由上述结论,容易得到关于矩阵正稳定性的判定。

引理 3[7] 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in \mathbf{C}^{n\times n}$,分块如(1)式。若 $M=\overline{M_1}\cup\overline{M_2}$,$\overline{M_1}\cap\overline{M_2}=\varnothing$。若 $i\in\overline{M_1}$ 时,$\boldsymbol{A}_{ii}$ 为 Hermite 正定阵;若 $i\in\overline{M_2}$ 时,$\boldsymbol{A}_{ii}$ 为非奇异的 M-矩阵,矩阵范数取 Frobenius 范数。则当 $\boldsymbol{A}$ 为块 H-矩阵时,$\boldsymbol{A}$ 是正稳定矩阵。

定理 4 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in \mathbf{C}^{n\times n}$,分块如(1)式。若 $i\in\overline{M_1}$ 时,$\boldsymbol{A}_{ii}$ 为 Hermite 正定阵;若 $i\in\overline{M_2}$ 时,$\boldsymbol{A}_{ii}$ 为非奇异的 M-矩阵,矩阵范数取 Frobenius 范数。若 $M_5=\varnothing$,且对任意的 $i\in M_1$,$j\in M_2$ 有 $\dfrac{\|\boldsymbol{A}_{ii}^{-1}\|^{-1}-R_i(\boldsymbol{A})}{C_i(\boldsymbol{A})-R_i(\boldsymbol{A})}+\dfrac{\|\boldsymbol{A}_{jj}^{-1}\|^{-1}-C_j(\boldsymbol{A})}{R_j(\boldsymbol{A})-C_j(\boldsymbol{A})}>1$,则 $\boldsymbol{A}$ 是正稳定矩阵,其中 $\overline{M_1}=M_1\cup\{i\in M\mid \|\boldsymbol{A}_{ii}^{-1}\|^{-1}=C_i(\boldsymbol{A})>R_i(\boldsymbol{A})\}$,$\overline{M_2}=M_2\cup M_4\cup\{i\in M\mid \|\boldsymbol{A}_{ii}^{-1}\|^{-1}>C_i(\boldsymbol{A}),\|\boldsymbol{A}_{ii}^{-1}\|^{-1}>R_i(\boldsymbol{A})\}$。

证明 由定理 3 知 $\boldsymbol{A}\in \boldsymbol{BH}$,再根据引理 3 得结论成立。 证毕

推论 1 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in \mathbf{Z}^{n\times n}$。若 $\boldsymbol{A}$ 满足定理 4 的条件,则 $\boldsymbol{A}$ 是非奇异的 M-矩阵。

推论 2 设 $\boldsymbol{A}$ 为 Hermite 矩阵。若 $\boldsymbol{A}$ 满足定理 4 的条件,则 $\boldsymbol{A}$ 是 Hermite 正定矩阵。

定理 5 当 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in \mathbf{C}^{n\times n}$。若$\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^*)$满足定理 3 的条件,则 $\boldsymbol{A}$ 是正稳定矩阵。

4 数值例子

有了上述定理就很容易判定高阶矩阵是否为非奇异的 $\boldsymbol{A}$ 为块 H-矩阵。

例

$$\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{cc:cc:cc}\frac{15}{2} & 0 & 3 & 1 & 0 & 2\\ 0 & \frac{15}{2} & -1 & 1 & -1 & 1\\ \hdashline -2 & 1 & \frac{165}{2} & -825 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 0 & \frac{165}{2} & 2 & 1\\ \hdashline 0 & 1 & -2 & 1 & \frac{143}{2} & -715\\ 1 & 2 & 1 & 3 & 0 & \frac{143}{2}\end{array}\right)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \boldsymbol{A}_{13}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \boldsymbol{A}_{23}\\ \boldsymbol{A}_{31} & \boldsymbol{A}_{32} & \boldsymbol{A}_{33}\end{pmatrix}。$$

经计算有 $\boldsymbol{A}_{11}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{2}{15} & 0\\ 0 & \frac{2}{15}\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{A}_{22}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{2}{165} & \frac{4}{33}\\ 0 & \frac{2}{165}\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{A}_{33}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{2}{143} & \frac{20}{143}\\ 0 & \frac{2}{143}\end{pmatrix}$。

取矩阵范数 $\|\boldsymbol{A}\|=\|\boldsymbol{A}\|_\infty=\max\limits_i\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|$,经计算有 $\|\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\|^{-1}=\dfrac{15}{2}$,$\|\boldsymbol{A}_{12}\|=4$,$\|\boldsymbol{A}_{13}\|=2$,$\|\boldsymbol{A}_{22}^{-1}\|^{-1}=\dfrac{15}{2}$,$\|\boldsymbol{A}_{21}\|=3$,$\|\boldsymbol{A}_{23}\|=3$,$\|\boldsymbol{A}_{33}^{-1}\|^{-1}=\dfrac{13}{2}$,$\|\boldsymbol{A}_{31}\|=3$,$\|\boldsymbol{A}_{32}\|=4$。由本文记号有 $R_1(\boldsymbol{A})=6$,$R_2(\boldsymbol{A})=6$,$R_3(\boldsymbol{A})=7$;$C_1(\boldsymbol{A})=6$,$C_2(\boldsymbol{A})=8$,$C_3(\boldsymbol{A})=5$。

显然有 $M_1=\{2\}$,$M_2=\{3\}$,$M_3=M_4=\{1\}$,$M_5=\varnothing$。进而计算得到

$$\frac{\|\boldsymbol{A}_{22}^{-1}\|^{-1}-R_2(\boldsymbol{A})}{C_2(\boldsymbol{A})-R_2(\boldsymbol{A})}+\frac{\|\boldsymbol{A}_{33}^{-1}\|^{-1}-C_3(\boldsymbol{A})}{R_3(\boldsymbol{A})-C_3(\boldsymbol{A})}=\frac{1.5}{2}+\frac{1.5}{2}=1.5>1。$$

即满足定理 3 的条件,所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异块 H-矩阵。

参考文献:

[1] Feingold D G,Varga R S. Block diagonally dominant matrices and generalizations of the Gerschgor in Circle Theorem

[J]. Pacific J Math, 1962, 12(4): 1241-1250.

[2] Robert F. Blocs-H-matrices et convergence des methodes iteratives classiques par blocs[J]. Linear Algebra Appl, 1969, 2: 223-265.

[3] Huang T Z, Li W. Block H-matrices and spectrum of block Matrices[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2002, 23 (2): 236-240.

[4] Zhang C Y, Li Y T, Chen F. On Schur complement of block diagonally dominant matrices[J]. Linear Algebra Appl, 2006, 414(4): 533-546.

[5] Wu C Y, Huang T Z. Stability of block LU factorization for block tridiagonal block H-Matrices[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2012, 236(4): 2673-2684.

[6] 刘建州,徐映红,廖安平. 广义块对角占优矩阵的判定[J]. 高等学校计算数学学报,2005,27(3):250-257.
Liu J Z, Xu Y H, Liao A P. The methods for judging generalized block diagonally dominant matrices[J]. Numerical Mathematics A Journal of Chinese Universities, 2005, 27 (3): 250-257.

[7] 游兆永,黄廷祝. 两类分块矩阵的性质与矩阵正稳定和亚正定判定[J]. 工程数学学报,1995,12(2):89-92.
You Z Y, Huang T Z. Properties of two classes of partitioned matrices and sufficient conditions for positive stability and sub-positive definity of a matrix[J]. Chinese Journal of Engineering Mathmatics, 1995, 12(2): 89-92.

[8] 李庆春,刘磊. 矩阵对角占优性的推广[J]. 吉林师范学院学报,1996,17(5):4-7.
Li Q C, Liu L. Generalizations of diagonal dominance for matrices[J]. Journal of Jilin Teachers College, 1996, 17(5): 4-7.

[9] 徐成贤,徐宗本. 矩阵分析[M]. 西安:西北工业大学出版社,1991.
Xu C X, Xu Z B. Matrix analysis[M]. Xi′an: Northwestern Polytechnical University Press, 1991.

Criteria for Block H-Matrices and Its Application

GAO Huishuang

(School of Mathematics, Inner Mongolia University for the Nationalities, Tongliao Inner Mongolia 028000, China)

Abstract: In this paper, based on the properties of block diagonal dominance and generalized strictly diagonal dominance matrices, the equivalent representations of block strictly α_1-diagonally dominant matrices are given. Furthermore, some criteria for block H-matrices are obtained, that is, let $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}$ and $M_5=\varnothing$, if $\boldsymbol{A}$ satisfies $\frac{\|\boldsymbol{A}_{ii}^{-1}\|^{-1}-R_i(\boldsymbol{A})}{C_i(\boldsymbol{A})-R_i(\boldsymbol{A})}+\frac{\|\boldsymbol{A}_{jj}^{-1}\|^{-1}-C_j(\boldsymbol{A})}{R_j(\boldsymbol{A})-C_j(\boldsymbol{A})}\geqslant 1(\forall i\in M_1, j\in M_2)$, then $\boldsymbol{A}$ is a block H-matrix. As their application, criteria for positive stability of matrices are given.

Key words: block α-diagonally dominant matrices; block H-matrices; positive stable matrix; M-matrices

(责任编辑　方　兴)