DOI:10.11721/cqnuj20150224

混合 Weibull 分布的参数估计的 MCEM 加速算法*

李光辉，张　洪，叶绪国
(凯里学院 数学科学学院，贵州 凯里 556011)

摘要：讨论混合 Weibull 分布在正常应力和恒加应力水平下的参数估计，首先构造两总体的混合 Weibull 分布，然后利用 MCEM 加速算法，给出了混合 Weibull 分布在正常应力水平下完全数据时的参数估计。其次在正常应力水平下，分别在定数截尾和定时尾情形下得到参数估计的迭代解，并且讨论当混合 Weibull 分布中没有冗余参数的情形下，结合 Chebyshev 迭代算法，得到所有参数的估计。将正常应力水平下的情形推广到恒加应力情形下，分别在完全数据情形和截尾数据情形下对其中参数进行估计，最后提出有待进一步研究的问题。

关键词：混合 Weibull 分布；MCEM 加速算法；截尾数据；正常应力；恒加应力

中图分类号：O213.2　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1672-6693(2015)02-0123-10

关于混合分布很多文献均有介绍[1-2]。许多文献已尝试用 EM 算法来估计混合分布问题，比如混合伽玛分布的场合[3]，混合正态分布场合[4]，单总体的 Weibull 分布场合[5]，文献[6-8]在混合指数分布的场合下对其中参数进行估计。但由于 EM 算法的收敛速率是线性的，被缺损信息的倒数所控制。这样，当缺损数据的比例很高时，收敛速度非常缓慢。罗季[9]提出了 EM 算法的不足并给出了 Monte Carlo EM 加速算法(简称 MCEM 加速算法)。严海芳[10-12]研究了利用 MCEM 加速算法对定数截尾情形、恒加应力下情形下的混合指数分布，对数正态分布的参数作出了估计。在设备寿命可靠性分析试验中，Weibull 分布是应用最为广泛的模型之一，许多类型的产品，在涉及寿命问题时都广泛提倡用 Weibull 分布，可用作多种类型产品的寿命分布模型[13]。但是在应用中会经常遇到混合分布的情况。基于 MCEM 加速算法在参数估计方面的优越性以及 Weibull 分布应用的广泛性，本文构造混合 Weibull 分布，在正常应力和恒加应力水平下，利用 MCEM 加速算法，在完全数据情形下，定时和定数情形下对其中参数进行估计，并进行了模拟试验。

本文中研究的混合 Weibull 分布的密度函数具有以下形式：

$$f(x;p,\lambda_1,\alpha_1,\lambda_2,\alpha_2)=pf(x;\lambda_1,\alpha_1)+(1-p)f(x;\lambda_2,\alpha_2)。\tag{1}$$

若将 α_1,α_2 视作冗余参数，需要估计的参数记为 $\theta=(p,\lambda_1,\lambda_2)'$。设样本 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为取自密度为(1)的样本，对于混合总体，以 f_{ji}，F_{ji} 和 s_{ji} 分别表示样品 x_i 服从参数为 (λ_j,α_j) 的 Weibull 分布的密度函数，分布函数和生存函数，有以下形式

$$f_{ji}=f(x_i;\lambda_j,\alpha_j)=\lambda_j\alpha_j x^{\alpha_j-1}\exp(-\lambda_j x^{\alpha_j}),$$
$$F_{ji}=F(x_i;\lambda_j,\alpha_j)=1-\exp(-\lambda_j x^{\alpha_j}),$$
$$s_{ji}=\exp(-\lambda_j x^{\alpha_j}),$$

其中 $j=1,2,i=1,2,\cdots,n$。并记 f_i 和 s_i 分别表示样本 x_i 服从形如(1)式的混合 Weibull 分布的密度函数和生存函数

$$f_i=pf_{1i}+(1-p)f_{2i},$$
$$s_i=ps_{1i}+(1-p)s_{2i}。$$

在加速寿命试验中，要对一批产品进行统计分析，在正常应力和恒加应力水平下对其中的参数进行估计是最常用的方法，在两种应力水平下又有完全数据和截尾数据两类情形，所以，本文旨在讨论混合 Weibull 分布的

* **收稿日期**：2013-10-24　　**修回日期**：2014-12-16　　**网络出版时间**：2015-01-22 11:56

资助项目：贵州省科学技术联合基金(No. 黔科合 LH 字[2014]7243)；凯里学院 2014 年重点课题(No. z1401)；凯里学院基础数学重点学科建设项目(No. KZD2009001)

作者简介：李光辉，男，讲师，研究方向为概率统计，E-mail：liguanghui1985@126.com

网络出版地址：http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20150122.1156.015.html

参数估计问题,并逐一导出混合分布在不同情形下参数估计的迭代解。第一节利用 MCEM 加速算法,给出了混合 Weibull 分布在正常应力水平下完全数据时的参数估计。第二节在正常应力水平下混合 Weibull 分布在定数截尾情形和定时截尾情形下的参数估计,第三节讨论混合 Weibull 分布没有冗余参数的情形下,结合 Chebyshev 迭代算法,在一定精度范围内,利用 α 的迭代解代替 α_{EM} 进行后面的运算。第四节在恒加应力水平下完全数据情形的参数估计,并得到所有参数的估计,第五节讨论在恒加应力水平下截尾情形时的参数估计,第六节在不同的情形下进行了数据模拟,证明收敛效果良好。最后提出利用 MCEM 加速算法运算中存在的问题和进一步研究的问题。

1 正常应力水平下完全数据情形

对于 x_i 服从混合 Weibull 分布 $f_{i\cdot}$,设 $I_i=I_i(\lambda=\lambda_1|x_i)$ 为示性变量,$I_i=1$ 表示 x_i 是取自 f_{1i} 的总体,$I_i=0$ 表示 x_i 是取自 f_{2i} 的总体。由于 x_i 取自于哪个总体是未知的,因而 I_i 是不可观测的随机变量。易得 $I_i\sim B(1,p)$,$i=1,2,\cdots,n$,且它们之间相互独立。

x_i 与 I_i 的联合分布为 $g(x_i,I_i;\theta)=(pf_{1i})^{I_i}[(1-p)f_{2i}]^{1-I_i}$,由此 I_i 在 x_i 给定的条件分布为

$$P(I_i=1|x_i;\theta)=\frac{pf_{1i}}{f_i},P(I_i=0|x_i;\theta)=\frac{(1-p)f_{2i}}{f_i}。$$

对于给定的初值 $\theta^{(0)}$,利用 MCEM 加速算法对参数进行估计,步骤为:

MCE1 步:以 $p(I|\theta^{(l)},X)$ 表示在给定 θ 和观测数据 X 下,潜在数据 I 的条件预测分布。由 $p(I|\theta^{(l)},X)$ 随机地抽取 n 个随机数 $I_i(i=1,2,\cdots,n)$。

MCE2 步:计算 $Q(\theta\mid\theta^{(l)},X)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln p(\theta\mid I_i,X)$,即有

$$Q(\theta\mid\theta^{(l)},X)=\sum_{i=1}^{n}E(I_i\mid x_i;\theta^{(l)})[\ln g(x_i,I_i;\theta)]=\sum_{i=1}^{n}\{c_{1i}^{(l)}\ln(pf_{1i})+c_{2i}^{(l)}\ln[(1-p)f_{2i}]\},$$

其中 $\theta^{(l)}=(p^{(l)},\lambda_1^{(l)},\lambda_2^{(l)})'$,$f_{1i}^{(l)}=f(x_i;\lambda_1^{(l)})$,$f_{2i}^{(l)}=f(x_i;\lambda_2^{(l)})$,$f_i^{(l)}=p^{(l)}f_{1i}^{(l)}+(1-p^{(l)})f_{2i}^{(l)}$,$c_{1i}^{(l)}=\frac{p^{(l)}f_{1i}^{(l)}}{f_i^{(l)}}$,$c_{2i}^{(l)}=\frac{(1-p^{(l)})f_{2i}^{(l)}}{f_i^{(l)}}$。

MCM 步:通过求解 $\partial Q/\partial\theta=0$ 将 $Q=Q(\theta|\theta^{(l)},X)$ 极大化,极大值点记为 $\theta_{EM}^{(l)}$,即使得

$$Q(\theta_{EM}^{(l)}|\theta^{(l)},X)=\max\{Q(\theta|\theta^{(l)},X)\}。$$

由 $\ln f_{ji}=\ln\lambda_j+\ln\alpha_j+(\alpha_j-1)\ln x_i-\lambda_j x_i^{\alpha_j}$,可得

$$\frac{\partial\ln f_{ji}}{\partial\lambda_j}=\frac{1}{\lambda_j}-x_i^{\alpha_j},j=1,2。$$

计算 $\partial Q/\partial\theta$ 得

$$\frac{\partial Q}{\partial p}=\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{c_{1i}^{(l)}}{p}-\frac{c_{2i}^{(l)}}{1-p}\right\},\tag{2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial\lambda_j}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{c_{ji}^{(l)}}{\lambda_j}-c_{ji}^{(l)}x_i^{\alpha_j}\right),j=1,2。\tag{3}$$

为进行后面的步骤,在此还需要求出 $\partial^2 Q/\partial\theta^2$,得到

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial p^2}=-\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{c_{1i}^{(l)}}{p^2}+\frac{c_{2i}^{(l)}}{(1-p)^2}\right\},\tag{4}$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial\lambda_j^2}=-\frac{1}{\lambda_j^2}\sum_{i=1}^{n}c_{ji}^{(l)},j=1,2。\tag{5}$$

分别令(2)、(3)式等于0,可解得

$$p_{EM}^{(l)}=\sum_{i=1}^{n}c_{1i}^{(l)}/\left[\sum_{i=1}^{n}c_{1i}^{(l)}+\sum_{i=1}^{n}c_{2i}^{(l)}\right],\lambda_{j,EM}^{(l)}=\sum_{i=1}^{n}c_{ji}^{(l)}/\sum_{i=1}^{n}c_{ji}^{(l)}x_i^{\alpha_j},j=1,2。$$

N-R 步:令

$$\theta^{(l+1)}=\theta^{(l)}-I(\theta_{EM}^{(l)}-\theta^{(l)})(\nabla^2 Q)^{-1}\nabla Q,\tag{6}$$

其中 $I(\theta_{EM}^{(l)}-\theta^{(l)})=diag(p_{EM}^{(l)}-p^{(l)},\lambda_{1,EM}^{(l)}-\lambda_1^{(l)},\lambda_{2,EM}^{(l)}-\lambda_2^{(l)})$，$\nabla^2 Q$ 和 ∇Q 分别表示函数 $Q(\theta|\theta^{(l)},X)$ 在点 $\theta^{(l)}$ 处的 Hesse 矩阵和梯度，即

$$\nabla^2 Q=diag\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial p^2},\frac{\partial^2 Q}{\partial \lambda_1^2},\frac{\partial^2 Q}{\partial \lambda_2^2}\right)\Bigg|_{\theta(l)},\nabla Q=\left(\frac{\partial Q}{\partial p},\frac{\partial Q}{\partial \lambda_1},\frac{\partial Q}{\partial \lambda_2}\right)'\Bigg|_{\theta^{(l)}}。$$

再根据(2)～(5)式代入(6)式，并记 $a_j^{(l)}=\sum_{i=1}^{n}c_{ji}^{(l)}$，$A_j^{(l)}=\sum_{i=1}^{n}c_{ji}^{(l)}x_i^{\alpha_j}$，$j=1,2$，可解得

$$p^{(l+1)}=p^{(l)}+\frac{(1-p^{(l)})p^{(l)}[a_1^{(l)}(1-p^{(l)})-a_2^{(l)}p^{(l)}]}{a_1^{(l)}(1-p^{(l)})^2+a_2^{(l)}(p^{(l)})^2}\left(\frac{a_1^{(l)}}{(a_1^{(l)}+a_2^{(l)})}-p^{(l)}\right),$$

$$\lambda_j^{(l+1)}=\lambda_j^{(l)}+\frac{\lambda_j^{(l)}(a_j^{(l)}-\lambda_j^{(l)}A_j^{(l)})^2}{a_j^{(l)}A_j^{(l)}},j=1,2。$$

将上述 MCE1 步、MCE2 步、MCM 步和 N-R 步进行迭代，直至 $\|\theta^{(l+1)}-\theta^{(l)}\|$ 小于某给定的阀值时即停止迭代。

2 正常应力下的截尾情形

2.1 定数截尾情形

设样本容量为 n 的总体的前 r 个次序统计量 $x_1,x_2,\cdots,x_r$ 取自密度为(1)式的混合 Weibull 分布的样本，现要估计 θ 可使用类似的方法，对于 x_i 服从混合 Weibull 分布 f_i.，设 $I_i=1$ 表示 x_i 是取自 f_{1i} 的总体，$I_i=0$ 表示 x_i 是取自 f_{2i} 的总体。由于 x_i 取自于哪个总体是未知的，因而 I_i 是不可观测的随机变量。易得 $I_i\sim B(1,p)$，且之间相互独立。

在定数截尾情形下，没有截尾的样本 x_i 与 I_i 的联合分布为 $g(x_i,I_i;\theta)=(pf_{1i})^{I_i}[(1-p)f_{2i}]^{1-I_i}$，由此 I_i 在 x_i 给定的条件分布为

$$P(I_i=1|x_i;\theta)=\frac{pf_{1i}}{f_i},P(I_i=0|x_i;\theta)=\frac{(1-p)f_{1i}}{f_i}。$$

对于截尾的样本，x_i 与 I_i 的联合分布为 $g(x_i,I_i;\theta)=(ps_{1i})^{I_i}[(1-p)s_{2i}]^{1-I_i}$，由此 I_i 在 x_i 给定的条件分布为

$$P(I_i=1|x_i;\theta)=\frac{ps_{1i}}{s_i},P(I_i=0|x_i;\theta)=\frac{(1-p)s_{2i}}{s_i}。$$

类似之前的讨论，对于给定的初值 $\theta^{(0)}$，利用 MCEM 加速算法对参数进行估计。

MCE1 步：由 $p(I|\theta^{(l)},X)$ 随机地抽取 n 个随机数 $I_i(i=1,2,\cdots,n)$。

MCE2 步：计算 $Q(\theta\mid\theta^{(l)},X)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln p(\theta\mid I_i,X)$，即有

$$Q(\theta\mid\theta^{(l)},X)=\sum_{i=1}^{n}E(I_i\mid x_i;\theta^{(l)})[\ln g(x_i,I_i;\theta)]=\sum_{i=1}^{r}\{c_{1i}^{(l)}\ln(pf_{1i})+c_{2i}^{(l)}\ln[(1-p)f_{2i}]\}+$$
$$\sum_{i=r+1}^{n}\{d_{1i}^{(l)}\ln(ps_{1i})+c_{2i}^{(l)}\ln[(1-p)s_{2i}]\},$$

其中 $s_{1i}^{(l)}=f(x_i;\lambda_1^{(l)})$，$s_{2i}^{(l)}=f(x_i;\lambda_2^{(l)})$，$s_i^{(l)}=p^{(l)}s_{1i}^{(l)}+(1-p^{(l)})s_{2i}^{(l)}$，$c_{1i}^{(l)}=\frac{p^{(l)}f_{1i}^{(l)}}{f_i^{(l)}}$，$c_{2i}^{(l)}=\frac{(1-p^{(l)})f_{2i}^{(l)}}{f_i^{(l)}}$，$d_{1i}^{(l)}=\frac{p^{(l)}s_{1i}^{(l)}}{s_i^{(l)}}$，$d_{2i}^{(l)}=\frac{(1-p^{(l)})s_{2i}^{(l)}}{s_i^{(l)}}$。

MCM 步：通过求解 $\partial Q/\partial\theta=0$ 将 $Q=Q(\theta|\theta^{(l)},X)$ 极大化，极大值点记为 $\theta_{EM}^{(l)}$。并计算求出 $\partial Q/\partial\theta$ 和 $\partial^2 Q/\partial\theta^2$，由 $\ln s_{ji}=-\lambda_j x_i^{\alpha_j}$ 可得 $\frac{\partial \ln s_{ji}}{\partial\lambda_j}=x_i^{\alpha_j}$，$j=1,2$，得

$$\frac{\partial Q}{\partial p}=\sum_{i=1}^{r}\left\{\frac{c_{1i}^{(l)}}{p}-\frac{c_{2i}^{(l)}}{1-p}\right\}+\sum_{i=r+1}^{n}\left\{\frac{d_{1i}^{(l)}}{p}-\frac{d_{2i}^{(l)}}{1-p}\right\},\tag{7}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \lambda_j}=\sum_{i=1}^{r}\left(\frac{c_{ji}^{(l)}}{\lambda_j}-c_{ji}^{(l)}x_i^{\alpha_j}\right)+\sum_{i=r+1}^{n}(d_{ji}^{(l)}x_i^{\alpha_j}),j=1,2,\tag{8}$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial p^2}=-\sum_{i=1}^{r}\left(\frac{c_{1i}^{(l)}}{p^2}+\frac{c_{2i}^{(l)}}{(1-p)^2}\right)-\sum_{i=r+1}^{n}\left(\frac{d_{1i}^{(l)}}{p^2}+\frac{d_{2i}^{(l)}}{(1-p)^2}\right), \tag{9}$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \lambda_j^2}=-\frac{1}{\lambda_j^2}\sum_{i=1}^{r}c_{ji}^{(l)}, j=1,2。 \tag{10}$$

分别令(7)式和(8)式等于0,解得

$$p_{EM}^{(l)}=\Big(\sum_{i=1}^{r}c_{1i}^{(l)}+\sum_{i=r+1}^{n}d_{1i}^{(l)}\Big)\Big/\Big[\sum_{i=1}^{r}(c_{1i}^{(l)}+c_{2i}^{(l)})+\sum_{i=r+1}^{n}(d_{1i}^{(l)}+d_{2i}^{(l)})\Big],$$

$$\lambda_{j,EM}^{(l)}=\sum_{i=1}^{r}c_{ji}^{(l)}\Big/\Big(\sum_{i=1}^{r}c_{ji}^{(l)}x_i^{\alpha_j}+\sum_{i=r+1}^{n}d_{ji}^{(l)}x_r^{\alpha_j}\Big), j=1,2。$$

N-R步:将(7)～(10)式代入(6)式可得,并记

$$a_j^{(l)}=\sum_{i=1}^{r}c_{ji}^{(l)}, b_j^{(l)}=\sum_{i=r+1}^{n}d_{ji}^{(l)}, A_j^{(l)}=\sum_{i=1}^{r}c_{ji}^{(l)}x_i^{\alpha_j}, B_{jr}^{(l)}=\sum_{i=r+1}^{n}d_{ji}^{(l)}x_r^{\alpha_j}, j=1,2,$$

则有

$$p^{(l+1)}=p^{(l)}+\frac{p^{(l)}(1-p^{(l)})[(1-p^{(l)})(a_1^{(l)}+b_1^{(l)})-p^{(l)}(a_2^{(l)}+b_2^{(l)})]^2}{(a_1^{(l)}+a_2^{(l)}+b_1^{(l)}+b_2^{(l)})[(1-p^{(l)})^2(a_1^{(l)}+b_1^{(l)})-(p^{(l)})^2(a_2^{(l)}+b_2^{(l)})]},$$

$$\lambda_j^{(l+1)}=\lambda_j^{(l)}+\frac{\lambda_j^{(l)}[(a_j^{(l)}-\lambda_j^{(l)}A_j^{(l)})^2-(\lambda_j^{(l)}B_{jr}^{(l)})^2]}{a_j^{(l)}(A_j^{(l)}+B_{jr}^{(l)})}, j=1,2。$$

将上述MCE1步、MCE2步、MCM步和N-R步进行迭代,直至$\|\theta^{(l+1)}-\theta^{(l)}\|$小于某给定的阈值时即停止迭代。

2.2 定时截尾情形

对于样本容量为n的总体,实验进行到τ时刻即停止,有r个样本失效,类似之前的讨论并沿用第2节中的记号,可得到对数似然函数期望Q的形式为

$$Q(\theta\mid\theta^{(l)},X)=\sum_{i=1}^{r}\{c_{1i}^{(l)}\ln(pf_{1i})+c_{2i}^{(l)}\ln[(1-p)f_{2i}]\}+$$

$$\sum_{i=r+1}^{n}\{d_{1i}^{(l)}\ln(ps_{1\tau})+c_{2i}^{(l)}\ln[(1-p)s_{2\tau}]\},$$

其中$s_{j\tau}=\exp(-\lambda_j\tau^{\alpha_j})$ $(j=1,2)$表示第j个总体下,样本寿命超过τ的概率。MCE1,MCE2步与之前的方法一致,在MCM步解得$\theta_{EM}^{(l)}$有如下形式:

$$p_{EM}^{(l)}=\Big(\sum_{i=1}^{r}c_{1i}^{(l)}+\sum_{i=r+1}^{n}d_{1i}^{(l)}\Big)\Big/\Big[\sum_{i=1}^{r}(c_{1i}^{(l)}+c_{2i}^{(l)})+\sum_{i=r+1}^{n}(d_{1i}^{(l)}+d_{2i}^{(l)})\Big],$$

$$\lambda_{j,EM}^{(l)}=\sum_{i=1}^{r}c_{ji}^{(l)}\Big/\Big(\sum_{i=1}^{r}c_{ji}^{(l)}x_i^{\alpha_j}+\sum_{i=r+1}^{n}d_{ji}^{(l)}\tau^{\alpha_j}\Big), j=1,2。$$

记$a_j^{(l)}=\sum_{i=1}^{r}c_{ji}^{(l)}, b_j^{(l)}=\sum_{i=r+1}^{n}d_{ji}^{(l)}, A_j^{(l)}=\sum_{i=1}^{r}c_{ji}^{(l)}x_i^{\alpha_j}, C_{j\tau}^{(l)}=\sum_{i=r+1}^{n}d_{ji}^{(l)}x_r^{\alpha_j}, j=1,2$。最后在N-R步解得

$$p^{(l+1)}=p^{(l)}+\frac{p^{(l)}(1-p^{(l)})[(1-p^{(l)})(a_1^{(l)}+b_1^{(l)})-p^{(l)}(a_2^{(l)}+b_2^{(l)})]^2}{(a_1^{(l)}+a_2^{(l)}+b_1^{(l)}+b_2^{(l)})[(1-p^{(l)})^2(a_1^{(l)}+b_1^{(l)})-(p^{(l)})^2(a_2^{(l)}+b_2^{(l)})]},$$

$$\lambda_j^{(l+1)}=\lambda_j^{(l)}+\frac{\lambda_j^{(l)}[(a_j^{(l)}-\lambda_j^{(l)}A_j^{(l)})^2-(C_{j\tau}^{(l)})^2]}{a_j^{(l)}(A_j^{(l)}+C_{j\tau}^{(l)})}, j=1,2。$$

3 混合分布中不含冗余参数情形下参数的迭代解

在混合Weibull分布中,如果α_1,α_2也是需要估计的参数,而非冗余参数。此时需要估计的参数为$\theta=(p,\lambda_1,\alpha_1,\lambda_2,\alpha_2)'$,由之前的讨论可知,在利用MCEM加速算法对混合Weibull分布的参数进行估计时,进行到MCM步时需要求解方程

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha_j}=\sum_{i=1}^{n}c_{ji}^{(l)}\left(\frac{1}{\alpha_j}+\ln x_i-\lambda_j x_i^{\alpha_j}\ln x_i\right)=0, j=1,2$$

来解出$\alpha_{j,EM}^{(l)}$,也就是

$$\sum_{i=1}^{n} c_{ji}^{(l)} + \alpha_j \sum_{i=1}^{n} c_{ji}^{(l)} \ln x_i - \lambda_j \alpha_j \sum_{i=1}^{n} c_{ji}^{(l)} x_i^{\alpha_j} \ln x_i = 0, j = 1, 2。 \tag{11}$$

将 $\lambda_{j,EM}^{(l)}$ 代入(11)式来求解 $\alpha_{j,EM}^{(l)}$ 时,$\alpha_j^{(l)}$ 却只有隐式解,为求得方程(11)的根,可考虑用迭代算法计算根的近似值,记

$$H(\alpha_j) = \sum_{i=1}^{n} c_{ji}^{(l)} + \alpha_j \sum_{i=1}^{n} c_{ji}^{(l)} \ln x_i - \lambda_{j,EM}^{(l)} \alpha_j \sum_{i=1}^{n} c_{ji}^{(l)} x_i^{\alpha_j} \ln x_i。$$

记 $H' = \frac{\partial H}{\alpha_j}$ 和 $H'' = \frac{\partial^2 H}{\alpha_j^2}$,在此可考虑用 Chebyshev 迭代算法,由于 Chebyshev 迭代算法具有三阶收敛速度,进行迭代运算时收敛速度更快,记 $z_k = \alpha_j^{(k)}$ 为方程(11)的第 k 次迭代解,有

$$z_{k+1} = z_k - \frac{H(z_k)}{H'(z_k)} - \frac{H''(z_k)(H(z_k))^2}{2(H'(z_k))^3}, k = 1, 2, \cdots$$

这样可以计算出 $\alpha_{j,EM}^{(l)}$ 的近似解进行后面的运算。

4 恒加应力水平下完全数据情形

在恒加应力水平下,混合分布一般满足[7]式中的 3 个假定。样品取自混合指数族分布,在应力水平 S_i 下,p 不变,记 $\varphi_{it} = (\lambda_{it}, \alpha_{it})$ 为第 i 个应力水平下的第 t 个总体的待估参数,设在第 i 个应力水平下样品的寿命分布的密度函数为

$$f_i(x) = p f_{1i} + (1-p) f_{2i}, \tag{12}$$

其中 $f_{ti} = f(x; \varphi_{it}) = \lambda_{it} \alpha_{it} x^{\alpha_{it}-1} \exp(-\lambda_{it} x^{\alpha_{it}}), t = 1, 2, i = 1, 2, \cdots, k$。

记 $\theta_i = (p, \varphi_{i1}, \varphi_{i2})'$,$\theta = (\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k)'$ 为待估的参数。在 S_i 下共有 n_i 个样品,其中第 j 个样品寿命分布的密度函数和生存函数分别为

$$f_i(x_{ij}) = p f_{1i}(x_{ij}) + (1-p) f_{2i}(x_{ij}), s_i(x_{ij}) = p s_{1i}(x_{ij}) + (1-p) s_{2i}(x_{ij}),$$

其中 $f_{ti}(x_{ij}) = f(x_{ij}; \varphi_{it}) = \lambda_{it} \alpha_{it} x_{ij}^{\alpha_{it}-1} \exp(-\lambda_{it} x_{ij}^{\alpha_{it}})$,$s_{ti} = s_{ti}(x_{ij}; \varphi_{it}) = \exp(-\lambda_{it} x_{ij}^{\alpha_{it}})$,$t = 1, 2, i = 1, 2, \cdots, k, j = 1, 2, \cdots, n_i$。

此时设 $I_{ij} = I_i(\varphi = \varphi_{i1} | x_{ij})$ 为示性变量,$I_{ij} = 1$ 时表示在应力水平 S_i 下第 j 个样品取自密度为 f_{1i} 的总体,$I_{ij} = 0$ 表示在应力水平 S_i 下第 j 个样品取自密度为 f_{2i} 的总体。此时 x_{ij} 与 I_{ij} 的联合分布为 $g(x_{ij}, I_{ij}; \theta) = (p f_{1i}(x_{ij}))^{I_{ij}} [(1-p) f_{2i}(x_{ij})]^{1-I_{ij}}$,由此 I_{ij} 在 x_{ij} 给定的条件分布为

$$P(I_{ij} = 1 | x_{ij}; \theta_i) = \frac{p f_{1i}(x_{ij})}{f_i(x_{ij})}, P(I_{ij} = 0 | x_{ij}; \theta_i) = \frac{(1-p) f_{2i}(x_{ij})}{f_i(x_{ij})}。$$

对于给定的初值 $\theta^{(0)}$,利用 MCEM 加速算法对参数进行估计,步骤为:

MCE1 步:随机地抽取 $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$ 个随机数 $I_{ij}(i = 1, 2, \cdots, k, j = 1, 2, \cdots, n_i)$。

MCE2 步:计算 $Q(\theta \mid \theta^{(l)}, X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_i} \ln p(\theta \mid I_{ij}, X)$,即有

$$Q(\theta \mid \theta^{(l)}, X) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} E(I_{ij} \mid x_{ij}; \theta^{(l)}) [\ln g(x_{ij}, I_{ij}; \theta)] =$$

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} \{C_{ij,1}^{(l)} \ln[p f_{1i}(x_{ij})] + C_{ij,2}^{(l)} \ln[(1-p) f_{2i}(x_{ij})]\},$$

其中

$$\theta_i^{(l)} = (p^{(l)}, \varphi_{i1}^{(l-1)}, \varphi_{i2}^{(l-1)})', C_{ij,1}^{(l)} = \frac{p^{(l)} f_{1i}^{(l)}(x_{ij})}{f_i^{(l)}(x_{ij})}, C_{ij,2}^{(l)} = \frac{(1-p^{(l)}) f_{2i}^{(l)}(x_{ij})}{f_i^{(l)}(x_{ij})},$$

$$f_{ti}^{(l)}(x_{ij}) = f(x_{ij}; \varphi_{ti}^{(l)}), f_i^{(l)}(x_{ij}) = p^{(l)} f_{1i}^{(l)}(x_{ij}) + (1-p^{(l)}) f_{2i}^{(l)}(x_{ij}),$$

$$\ln f_{ti}(x_{ij}) = \ln\lambda_{it} + \ln\alpha_{it} + (\alpha_{it} - 1)\ln x_{ij} - \lambda_{it} x_{ij}^{\alpha_{it}}。$$

上述记号中均有 $t = 1, 2, i = 1, 2, \cdots, k, j = 1, 2, \cdots, n_i$,且下文中不加说明情况下都有 $t = 1, 2$。

MCM 步:通过求解 $\partial Q / \partial \theta = 0$ 将 $Q = Q(\theta | \theta^{(l)}, X)$ 极大化,极大值点记为 $\theta_{EM}^{(l)}$,得

$$\frac{\partial Q}{\partial p} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} \left[\frac{C_{ij,1}^{(l)}}{p} - \frac{C_{ij,2}^{(l)}}{1-p}\right] = 0, \tag{13}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \lambda_{it}}=\sum_{j=1}^{n_i} C_{ij,t}^{(l)}\left[\frac{1}{\lambda_{it}}-x_{ij}^{\alpha_{it}}\right]=0, \tag{14}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha_{it}}=\sum_{j=1}^{n_i}\left[C_{ij,t}^{(l)}\left(\frac{1}{\alpha_{it}}+\ln x_{ij}-\lambda_{it} x_{ij}^{\alpha_{it}} \ln x_{ij}\right)\right]=0。 \tag{15}$$

为计算表达简洁,笔者给出记号:

$$A_{it}^{(l)}=\sum_{j=1}^{n_i} C_{ij,t}^{(l)}, A_{it,x}^{(l)}=\sum_{j=1}^{n_i} C_{ij,t}^{(l)} x_{ij}^{\alpha_{it}}, A_{it,\ln x}^{(l)}=\sum_{j=1}^{n_i} C_{ij,t}^{(l)} \ln x_{ij},$$

$$C_t^{(l)}=\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} C_{ij,t}^{(l)}, A_{it,x(\ln x)^\gamma}^{(l)}=\sum_{j=1}^{n_i} C_{ij,t}^{(l)} x_{ij}^{\alpha_{it}}\left(\ln x_{ij}\right)^\gamma,$$

且 $A_{t,x(\ln x)^\gamma}^{(l)}$ 对 α_{it} 求 r 次偏导有递推式:$\partial^r A_{t,x(\ln x)^\gamma}^{(l)}/\partial \alpha_{it}^r=A_{it,x(\ln x)^{\gamma+r}}^{(l)}$。解(13)～(15)式得

$$p_{EM}^{(l)}=\frac{C_1^{(l)}}{C_1^{(l)}+C_2^{(l)}}, \lambda_{it,EM}^{(l)}=\frac{A_{it}^{(l)}}{A_{it,x}^{(l)}}, t=1,2。$$

由于方程(15)关于 α_{it} 没有显示解,故只能求其近似,为使 MCEM 加速算法迭代步骤尽可能的少,求 α_{it} 时应使用阶数较高的收敛算法,在此使用 Chebyshev 迭代算法,将(15)式化简为

$$A_{it}^{(l)}+\alpha_{it} A_{it,\ln x}^{(l)}-\alpha_{it} \lambda_{it} A_{it,x\ln x}^{(l)}=0。$$

记 $H(\alpha_{it})=A_{it}^{(l)}+\alpha_{it} A_{it,\ln x}^{(l)}-\alpha_{it} \lambda_{it} A_{it,x\ln x}^{(l)}$,并对 α_{it} 求一、二阶偏导得

$$H'=\frac{\partial H(\alpha_{it})}{\partial \alpha_{it}}=A_{it,\ln x}^{(l)}-\lambda_{it} A_{it,x\ln x}^{(l)}-\alpha_{it} \lambda_{it} A_{it,x(\ln x)^2}^{(l)},$$

$$H''=\frac{\partial H^2(\alpha_{it})}{\partial(\alpha_{it})^2}=-2 \lambda_{it} A_{it,x(\ln x)^2}^{(l)}-\lambda_{it}^{(l)} \alpha_{it} A_{it,x(\ln x)^3}^{(l)}。$$

给定一个 α_{it} 的可行初值记为 z_0,z_m 表示第 m 次迭代的解,由 Chebyshev 迭代算法,得

$$z_{m+1}=z_m-\frac{H}{H'}-\frac{H''H^2}{2(H')^3}=z_m-\frac{A_{it}^{(l)}+z_m A_{it,\ln x}^{(l)}-z_m \lambda_{it} A_{it,x\ln x}^{(l)}}{A_{it,\ln x}^{(l)}-z_m A_{it,x\ln x}^{(l)}-z_m \lambda_{it} A_{it,x(\ln x)^2}^{(l)}}+$$

$$\frac{\left(2 \lambda_{it} A_{it,x(\ln x)^2}^{(l)}+\lambda_{it}^{(l)} \alpha_{it} A_{it,x(\ln x)^3}^{(l)}\right)\left(A_{it}^{(l)}+\alpha_{it} A_{it,\ln x}^{(l)}-\alpha_{it} A_{it,x\ln x}^{(l)}\right)^2}{2\left(A_{it,\ln x}^{(l)}-\lambda_{it} A_{it,x\ln x}^{(l)}-\alpha_{it} \lambda_{it} A_{it,x(\ln x)^2}^{(l)}\right)^3}。$$

由于 Chebyshev 迭代法具有三阶收敛速度,当 $\| z_{m+1}-z_m \|$ 小于某给定的阀值时即停止迭代,此时以 z_{m+1} 代替 $\alpha_{it,EM}^{(l)}$ 进行后面的计算。

N-R 步:令

$$\theta_i^{(l+1)}=\theta_i^{(l)}-I(\theta_{EM}^{(l)}-\theta^{(l)})(\nabla^2 Q)^{-1} \nabla Q。 \tag{16}$$

记 $\varphi_{it,EM}^{(l)}=(\lambda_{it,EM}^{(l)}, \alpha_{it,EM}^{(l)})'$,$I(\theta_{EM}^{(l)}-\theta^{(l)})=diag(p_{EM}^{(l)}-p^{(l)}, \varphi_{i1,EM}^{(l)}-\varphi_{i1}^{(l)}, \varphi_{i2,EM}^{(l)}-\varphi_{i2}^{(l)})$,$\nabla^2 Q$ 和 ∇Q 分别表示函数 $Q(\theta|\theta^{(l)}, X)$ 在点 $\theta^{(l)}$ 处的 Hesse 矩阵和梯度,求解 $\partial^2 Q/\partial \theta^2$ 得

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial p^2}=-\frac{C_1^{(l)}}{p^2}-\frac{C_2^{(l)}}{(1-p)^2},$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \lambda_{it}^2}=-\frac{A_{it}^{(l)}}{\lambda_{it}^2}, \frac{\partial^2 Q}{\partial \alpha_{it}^2}=-\frac{A_{it}^{(l)}}{\alpha_{it}^2}-\lambda_{it} A_{it,x(\ln x)^2}^{(l)}, t=1,2。$$

再根据(13)～(15)式代入(16)式,解得

$$p^{(l+1)}=p^{(l)}+\frac{(1-p^{(l)})\left[C_1^{(l)}(1-p^{(l)})+p^{(l)} C_2^{(l)}\right]^2}{(C_1^{(l)}+C_2^{(l)})\left[C_1^{(l)}(1-p^{(l)})^2+C_2^{(l)}(p^{(l)})^2\right]},$$

$$\lambda_{it}^{(l+1)}=\lambda_{it}^{(l)}+\frac{\lambda_{it}^{(l)}(A_{it}^{(l)}-\lambda_{it}^{(l)} A_{it,x}^{(l)})^2}{A_{it}^{(l)} A_{it,x}^{(l)}}, t=1,2,$$

$$\alpha_{it}^{(l+1)}=\alpha_{it}^{(l)}+\frac{\alpha_{it}^{(l)}(A_{it}^{(l)}+\alpha_{it}^{(l)} A_{it,\ln x}^{(l)}-\lambda_{it}^{(l)}(\alpha_{it}^{(l)})^2 A_{it,x\ln x}^{(l)})}{A_{it}^{(l)}-\lambda_{it}^{(l)}(\alpha_{it}^{(l)})^2 A_{it,(\ln x)^2}^{(l)}}(\alpha_{it,EM}^{(l)}-\alpha_{it}^{(l)}), t=1,2。$$

将上述 MCE1 步、MCE2 步、MCM 步和 N-R 步进行迭代,直至 $\| \theta^{(l+1)}-\theta^{(l)} \|$ 小于某给定的阀值时即停止迭代。

5 恒加应力水平下截尾情形

设在应力水平 S_i 下共有 n_i 个样品,前 r_i 个次序统计量为 $x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{ir_i}$,即有 r_i 个样品失效被观测到,剩

下的 n_i-r_i 个未被观测。记 T_i 表示第 i 个应力下的截尾时间，在定数截尾情形下有 $T_i=x_{ir_i}$，在定时截尾情形下有 $T_i=\tau_i$。对于没有截尾的样本，定示性变量 $I_{ij}=I_i(\varphi=\varphi_{i1}|x_{ij})$，当 $I_{ij}=1$ 时表示在应力水平 S_i 下第 j 个样品取自密度为 f_{1i} 的总体，$I_{ij}=0$ 表示在应力水平 S_i 下第 j 个样品取自密度为 f_{2i} 的总体。此时 x_{ij} 与 I_{ij} 的联合分布为 $g(x_{ij},I_{ij};\theta)=(pf_{1i}(x_{ij}))^{I_{ij}}[(1-p)f_{2i}(x_{ij})]^{1-I_{ij}}$，由此 I_{ij} 在 x_{ij} 给定的条件分布为

$$P(I_{ij}=1|x_{ij};\theta_i)=\frac{pf_{1i}(x_{ij})}{f_i(x_{ij})},P(I_{ij}=0|x_{ij};\theta_i)=\frac{(1-p)f_{2i}(x_{ij})}{f_i(x_{ij})}。$$

对于截尾的样本，x_{ij} 与 I_{ij} 的联合分布为 $g(x_{ij},I_{ij};\theta)=(ps_{1i}(T_i))^{I_{ij}}[(1-p)s_{2i}(T_i)]^{1-I_{ij}}$，由此 I_{ij} 在 x_{ij} 给定的条件分布为

$$P(I_{ij}=1|x_{ij};\theta_i)=\frac{ps_{1i}(T_i)}{s_i(T_i)},P(I_{ij}=0|x_{ij};\theta_i)=\frac{(1-p)s_{2i}(T_i)}{s_i(T_i)}。$$

对于给定的初值 $\theta^{(0)}$，利用 MCEM 加速算法对参数进行估计：

MCE1 步：由 $p(I|\theta^{(l)},X)$ 随机地抽取 $n=\sum_{i=1}^{k}n_i$ 个随机数 $I_{ij}(i=1,2,\cdots,k,j=1,2,\cdots,n_i)$。

MCE2 步：计算似然函数的期望，即有

$$Q(\theta\mid\theta^{(l)},X)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}E(I_{ij}\mid x_{ij};\theta^{(l)})[\ln g(x_{ij},I_{ij};\theta)]=$$
$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{r_i}\{C_{ij,1}^{(l)}\ln[pf_{1i}(x_{ij})]+C_{ij,2}^{(l)}\ln[(1-p)f_{2i}(x_{ij})]\}+$$
$$\sum_{i=1}^{k}(n_i-r_i)\{D_{i,1}^{(l)}\ln[ps_{1i}(T_i)]+D_{i,2}^{(l)}\ln[(1-p)s_{2i}(T_i)]\},$$

其中 $C_{ij,1}^{(l)}=\frac{p^{(l)}f_{1i}^{(l)}(x_{ij})}{f_i^{(l)}(x_{ij})}$，$C_{ij,2}^{(l)}=\frac{(1-p^{(l)})f_{2i}^{(l)}(x_{ij})}{f_i^{(l)}(x_{ij})}$，$D_{i,1}^{(l)}=\frac{p^{(l)}s_{1i}^{(l)}(T_i)}{s_i^{(l)}(T_i)}$，$D_{i,2}^{(l)}=\frac{(1-p^{(l)})s_{2i}^{(l)}(T_i)}{s_i^{(l)}(T_i)}$，且有 $\ln s_{ti}(T_i)=-\lambda_{it}T_i^{\alpha_{it}}$，$t=1,2$。

MCM 步：将 $Q=Q(\theta|\theta^{(l)},X)$ 极大化，极大值点记为 $\theta_{EM}^{(l)}$，求解 $\partial Q/\partial\theta=0$ 得

$$\frac{\partial Q}{\partial p}=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\left[\frac{C_{ij,1}^{(l)}}{p}-\frac{C_{ij,2}^{(l)}}{1-p}\right]+\sum_{i=1}^{k}(n_i-r_i)\left[\frac{D_{i,1}^{(l)}}{p}-\frac{D_{i,2}^{(l)}}{1-p}\right],\tag{17}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial\lambda_{it}}=\sum_{j=1}^{r_i}C_{ij,t}^{(l)}\left(\frac{1}{\lambda_{it}}-x_{ij}^{\alpha_{it}}\right)-(n_i-r_i)D_{i,1}^{(l)}T_i^{\alpha_{it}},\tag{18}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial\alpha_{it}}=\sum_{j=1}^{r_i}C_{ij,t}^{(l)}\left(\frac{1}{\alpha_{it}}+\ln x_{ij}-\lambda_{it}x_{ij}^{\alpha_{it}}\ln x_{ij}\right)-(n_i-r_i)\lambda_{it}T_i^{\alpha_{it}}\ln T_i。\tag{19}$$

记 $C_t^{(l)}=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{r_i}C_{ij,t}^{(l)}$，$D_t^{(l)}=\sum_{i=1}^{k}(n_i-r_i)D_{i,t}^{(l)}$，$A_{it}^{(l)}=\sum_{j=1}^{r_i}C_{ij,t}^{(l)}$，$A_{it,x}^{(l)}=\sum_{j=1}^{r_i}C_{ij,t}^{(l)}x_{ij}^{\alpha_{it}}$，$A_{it,\ln x}^{(l)}=\sum_{j=1}^{r_i}C_{ij,t}^{(l)}\ln x_{ij}$，$A_{it,x(\ln x)^\gamma}^{(l)}=\sum_{j=1}^{r_i}C_{ij,t}^{(l)}x_{ij}^{\alpha_{it}}(\ln x_{ij})^\gamma$，$B_{it,T}^{(l)}=(n_i-r_i)D_{i,t}^{(l)}T_i^{\alpha_{it}}$，$B_{it,T(\ln T)^\gamma}^{(l)}=(n_i-r_i)D_{i,t}^{(l)}T_i^{\alpha_{it}}(\ln T_i)^\gamma$。且有 $\frac{\partial A_{it,x}^{(l)}}{\partial\alpha_{it}}=A_{it,x\ln x}^{(l)}$，$\frac{\partial^r A_{it,x(\ln x)^\gamma}^{(l)}}{\partial\alpha_{it}^r}=A_{it,x(\ln x)^{\gamma+r}}^{(l)}$，$\frac{\partial B_{it,T}^{(l)}}{\partial\alpha_{it}}=B_{it,T\ln T}^{(l)}$，$\frac{\partial^r B_{it,T(\ln T)^\gamma}^{(l)}}{\partial\alpha_{it}^r}=B_{it,T(\ln T)^{\gamma+r}}^{(l)}$，则解得

$$p_{EM}^{(l)}=\frac{C_1^{(l)}+D_1^{(l)}}{C_1^{(l)}+C_2^{(l)}+D_1^{(l)}+D_2^{(l)}},\lambda_{it,EM}^{(l)}=\frac{A_{it}^{(l)}}{B_{it,T}^{(l)}+A_{it,x}^{(l)}},t=1,2。$$

类似之前的讨论，方程(19)关于 α_{it} 没有显示解，故只能求其近似，使用 Chebyshev 迭代算法，将(19)式化简

$$A_{it}^{(l)}+\alpha_{it}A_{it,\ln x}^{(l)}-\alpha_{it}\lambda_{it}A_{it,x\ln x}^{(l)}-\alpha_{it}\lambda_{it}B_{it,T\ln T}^{(l)}=0。$$

记 $G(\alpha_{it})=A_{it}^{(l)}+\alpha_{it}A_{it,\ln x}^{(l)}-\alpha_{it}\lambda_{it}A_{it,x\ln x}^{(l)}-\alpha_{it}\lambda_{it}B_{it,T\ln T}^{(l)}$，并对 α_{it} 求一、二阶偏导得

$$G'=\frac{\partial G(\alpha_{it})}{\partial\alpha_{it}}=A_{it,\ln x}^{(l)}-\lambda_{it}A_{it,x\ln x}^{(l)}-\alpha_{it}\lambda_{it}A_{it,x(\ln x)^2}^{(l)}-\lambda_{it}B_{it,T\ln T}^{(l)}-\alpha_{it}\lambda_{it}B_{it,T(\ln T)^2}^{(l)},$$

$$G''=\frac{\partial G^2(\alpha_{it})}{\partial(\alpha_{it})^2}=-2\lambda_{it}(A_{it,x(\ln x)^2}^{(l)}+B_{it,T(\ln T)^2}^{(l)})-\lambda_{it}^{(l)}\alpha_{it}(A_{it,x(\ln x)^3}^{(l)}+B_{it,T(\ln T)^3}^{(l)})。$$

给定一个 α_{it} 的可行初值记为 z_0，z_m 表示第 m 次迭代的解，由 Chebyshev 迭代算法，得

$$z_{m+1}=z_m-\frac{A_{it}^{(l)}+\alpha_{it}A_{it,\ln x}^{(l)}-\alpha_{it}\lambda_{it}A_{it,x\ln x}^{(l)}-\alpha_{it}\lambda_{it}B_{it,T\ln T}^{(l)}}{A_{it,\ln x}^{(l)}-\lambda_{it}A_{it,x\ln x}^{(l)}-\alpha_{it}\lambda_{it}A_{it,x(\ln x)^2}^{(l)}-\lambda_{it}B_{it,T\ln T}^{(l)}-\alpha_{it}\lambda_{it}B_{it,T(\ln T)^2}^{(l)}}+JK,$$

其中 $K=\frac{2\lambda_{it}(A_{it,x(\ln x)^2}^{(l)}+B_{it,T(\ln T)^2}^{(l)})+\lambda_{it}^{(l)}\alpha_{it}(A_{it,x(\ln x)^3}^{(l)}+B_{it,T(\ln T)^3}^{(l)})}{2(A_{it,\ln x}^{(l)}-\lambda_{it}A_{it,x\ln x}^{(l)}-\alpha_{it}\lambda_{it}A_{it,x(\ln x)^2}^{(l)}-\lambda_{it}B_{it,T\ln T}^{(l)}-\alpha_{it}\lambda_{it}B_{it,T(\ln T)^2}^{(l)})^3}$,$J=(A_{it}^{(l)}+\alpha_{it}A_{it,\ln x}^{(l)}-\alpha_{it}\lambda_{it}A_{it,x\ln x}^{(l)}-\alpha_{it}\lambda_{it}B_{it,T\ln T}^{(l)})^2$。此时以 z_{m+1} 代替 $\alpha_{it,EM}^{(l)}$ 进行后面的计算。

N-R 步:计算求解 $\partial^2 Q/\partial\theta^2$ 得

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial p^2}=-\frac{C_1^{(l)}+D_1^{(l)}}{p^2}-\frac{C_2^{(l)}+D_2^{(l)}}{(1-p)^2},$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial\lambda_{it}^2}=-\frac{A_{it}^{(l)}}{\lambda_{it}^2},\frac{\partial^2 Q}{\partial\alpha_{it}^2}=-\frac{A_{it}^{(l)}}{\alpha_{it}^2}-\lambda_{it}(A_{it,x(\ln x)^2}^{(l)}+B_{it,T(\ln T)^2}^{(l)}),t=1,2。$$

再由(16)式解出迭代式,解得

$$p^{(l+1)}=p^{(l)}+\frac{p^{(l)}(1-p^{(l)})[(C_1^{(l)}+D_1^{(l)})(1-p^{(l)})+p^{(l)}(C_2^{(l)}+D_2^{(l)})]^2}{(C_1^{(l)}+C_2^{(l)}+D_1^{(l)}+D_2^{(l)})[(C_1^{(l)}+D_1^{(l)})(1-p^{(l)})^2+(p^{(l)})^2(C_2^{(l)}+D_2^{(l)})]},$$

$$\lambda_{it}^{(l+1)}=\lambda_{it}^{(l)}+\frac{\lambda_{it}^{(l)}(A_{it}^{(l)}-\lambda_{it}^{(l)}A_{it,x}^{(l)}-\lambda_{it}^{(l)}B_{it,T}^{(l)})^2}{A_{it}^{(l)}(A_{it,x}^{(l)}+B_{it,T}^{(l)})},t=1,2,$$

$$\alpha_{it}^{(l+1)}=\alpha_{it}^{(l)}+\frac{\frac{A_{it}^{(l)}}{\alpha_{it}}+A_{it,\ln x}^{(l)}-\lambda_{it}^{(l)}\alpha_{it}^{(l)}A_{it,x\ln x}^{(l)}-\lambda_{it}B_{it,T\ln T}^{(l)}}{\frac{A_{it}^{(l)}}{\alpha_{it}^2}+\lambda_{it}(A_{it,x(\ln x)^2}^{(l)}+B_{it,T(\ln T)^2}^{(l)})}(\alpha_{it,EM}^{(l)}-\alpha_{it}^{(l)}),t=1,2。$$

将上述 MCE1 步、MCE2 步、MCM 步和 N-R 步进行迭代,直至 $\|\theta^{(l+1)}-\theta^{(l)}\|$ 小于某给定的阀值时即停止迭代。

6 数据模拟

为验证 MCEM 加速算法的快速收敛性,进行数据模拟。在正常应力下,取两个样本 $W(1,3)$,$W(0.01,2)$生成30个随机数,其中来自第一个样本10个,第二个样本20个,共30个样品。在正常应力下的完全数据和按90%的定数截尾场合下,都给定初值:$p^{(0)}=0.5$,$\lambda_1^{(0)}=0.1$,$\lambda_2^{(0)}=0.005$,利用 MCEM 加速算法经过6次迭代都可得到收敛估计,如表1,2所示。

表1 正常应力下完全数据场合的 MCEM 加速算法数据模拟

l	$\hat{p}^{(l)}$	$\hat{\lambda}_1^{(l)}$	$\hat{\lambda}_2^{(l)}$	$a_1^{(l)}$	$a_2^{(l)}$	$A_1^{(l)}$	$A_2^{(l)}$
0	0.5	0.1	0.005	10.494 74	19.505 260 22	39.033 81	1 587.368 245
1	0.349 825	0.268 862 807	0.012 287 8	9.250 251	20.749 749 27	11.299 45	1 596.325 378
2	0.308 342	0.818 646 437	0.012 998 45	9.309 351	20.690 648 56	10.162 53	1 596.759 418
3	0.310 312	0.916 046 645	0.012 957 9	9.255 35	20.744 650 33	9.986 049	1 596.880 755
4	0.308 512	0.926 828 015	0.012 990 73	9.253 687	20.746 312 54	9.974 531	1 596.888 021
5	0.308 456	0.927 731 589	0.012 991 71	9.253 684	20.746 315 62	9.974 628	1 596.887 965
6	0.308 456	0.927 722 276	0.012 991 72				

表2 正常应力下定数截尾场合的 MCEM 加速算法数据模拟(截尾90%)

l	$\hat{p}^{(l)}$	$\hat{\lambda}_1^{(l)}$	$\hat{\lambda}_2^{(l)}$	$a_1^{(l)}+b_1^{(l)}$	$a_2^{(l)}+b_2^{(l)}$	$A_1^{(l)}+B_{1r}^{(l)}$	$A_2^{(l)}+B_{2r}^{(l)}$
0	0.5	0.1	0.005	6.697 826	27.233 816 47	23.579 5	2 175.213 627
1	0.197 392	0.284 052 974	0.010 592 76	8.478 164	21.521 836 22	9.900 195	1 566.467 773
2	0.282 605	0.856 363 277	0.011 823 95	9.279 464	20.720 536 04	10.079 96	1 566.035 903
3	0.309 315	0.920 585 585	0.011 315 54	9.361 409	20.638 591 13	10.163 87	1 565.958 938
4	0.312 047	0.921 047 562	0.011 263 76	9.369 302	20.549 092 96	10.177 61	1 559.754 135
5	0.313 162	0.920 579 82	0.011 258 8	9.374 383	20.625 616 93	10.186 44	1 565.941 351
6	0.312 479	0.920 280 516	0.011 255 6				

在恒加应力水平下完全数据情形下，假设在恒加应力条件下 $W(\lambda,\alpha)$ 中的参数 α 是不变的，这一假设符合寿命试验的特征，所以在某个应力下得到了 α 的迭代近似，在其他应力下可以用近似值代替。在此设 3 个加速应力下分别取 90 个随机数，使得来自每个应力水平下第一个样本和第二个样本容量之比为 0.5，设 S_1 下的混合样本取自 $W(10^{-3},3)$ 和 $W(10^{-4},2)$，S_2 下的混合样本取自 $W(1,3)$ 和 $W(10^{-2},2)$。此时根据数据估计其中的参数，利用 MCEM 加速算法经过 6 步迭代，参数估计基本收敛，迭代值过程如表 3 所示。通过比较表 1 与表 2 的迭代结果发现，在正常应力下定数截尾场合 $\hat{p}^{(l)}$ 的迭代值更接近真值，但 $\hat{\lambda}_1^{(l)}$ 和 $\hat{\lambda}_2^{(l)}$ 却与真值有较小偏差，而在正常应力下完全数据场合情况则恰好相反，这是因为在截尾场合被截尾的样品都来自第二个样本，对 p 值的估计更为精确，但通过截尾试验使得一部分样本信息损失了，从而导致 λ 的估计与真值存在一定精度内的偏差。

表 3　恒加应力下完全数据场合的 MCEM 加速算法数据模拟

S_1	l	$\hat{p}^{(l)}$	$\hat{\lambda}_{11}^{(l)}$	$\hat{\lambda}_{12}^{(l)}$	$\alpha_1^{(l)}$	$\alpha_2^{(l)}$
	0	0.5	0.01	0.005	3.794 74	2.505 260 22
	1	0.296 934	0.002 009	0.000 126	3.250 251	2.497 492 7
	2	0.325 127	0.001 69	0.000 121	3.309 351	2.690 648 56
	3	0.334 935	0.001 543	0.000 119	3.125 535	2.446 503 3
	4	0.339 523	0.001 466	0.000 118	3.025 369	2.391 974 7
	5	0.342 014	0.001 424	0.000 118	2.922 012	2.237 446 1
	6	0.343 457	0.001 399	0.000 118	2.915 666	2.182 917 5
S_2	l	$\hat{p}^{(l)}$	$\hat{\lambda}_{21}^{(l)}$	$\hat{\lambda}_{22}^{(l)}$		
	1	0.5	0.3	0.005		
	2	0.367 975	0.550 850 363	0.009 627 13		
	3	0.339 526	0.731 670 164	0.010 045 46		
	4	0.334 935	0.894 933	0.038 303		
	5	0.334 911	0.913 333	0.056 42		

7 讨论

在混合 Weibull 分布中，需要估计的参数为 $\theta=(p,\lambda_1,\alpha_1,\lambda_2,\alpha_2)'$，在利用 MCEM 加速算法对混合 Weibull 分布的参数进行估计时，进行到 MCM 步时需要解出 $\alpha_{it,EM}^{(l)}$，由于方程关于 α_{it} 没有显示解，故只能求近似解，若在小样本场合或缺失数据较多的情形下，参数估计的效率较低，一方面是由于两个总体的样本区分度太低引起，另一方面是在 $\lambda_{it,EM}^{(l)}$ 代入关于 α_{it} 的方程时，$\lambda_{it,EM}^{(l)}$ 的解仍是关于 α_{it} 的超越方程，从而使得 α_{it} 的解的精确性受到影响。同时在 N-R 步中函数 $Q(\theta|\theta^{(l)},X)$ 在点 $\theta^{(l)}$ 处的 Hesse 矩阵 $\nabla^2 Q$ 除了对角线元素外，其他元素也不为 0，且矩阵不对称，且这是不利于进行迭代运算的，并且在恒加应力条件下，如果不假设 $W(\lambda,\alpha)$ 中的参数 α 不变，则对 α_{it} 的估计将变得更加复杂，需要更多的编程计算，关于这一问题仍有待研究。

参考文献：

[1] 王建康. 混合分布理论及应用[J]. 生物数学学报，1995，10(3)：87-92.
Wang J K. Mixture distribution and its application[J]. Journal of Biomathematics，1995，10 (3)：87-92.

[2] 王承炜，吴冲锋，朱战宇. 混合分布理论研究[J]. 上海交通大学学报，2004，38(3)：335-339.
Wang C W，Wu C F，Zhu Z Y. Research on mixture distribution hypothesis[J]. Journal of Shanghai Jiaotong University，2004，38(3)：335-339.

[3] Diekinson J P. On the resolution of a mixture of observations from two gamma distributions by the method of maximum likelihood[J]. Metrika，1974(21)：133-141.

[4] 皮六一，刘忠，茹诗松. 持股市值、持股数量、持股种类的概率分布分析[J]. 应用概率统计，1998，4(14)：286-394.
Pi L Y，Liu Z，Ru S S. Probability distribution analysis on market value，amount and varities of stocks[J]. Chinese Journal of Applied Probability an Statistics，1998，4(14)：286-394.

[5] 王继霞，申培萍. 定时截尾下 Weibull 分布参数估计的 EM 算法[J]. 河南师范大学学报：自然科学版，2009，37(2)：9-

11.
Wang J X，Shen P P. The EM algorithm of parameter estimation of Weibull distribution under type-I censoring sample[J]. Journal of Henan Normal University：Natural Science，2009，37(2)：9-11.

[6] 仲崇新，张志华. 指数分布场合定时和定数截尾步进应力加速寿命试验的统计分析[J]. 应用概率统计，1991，1(7)：52-60.
Zhong C X，Zhang Z H. Statistical analysis of types 1 and 11 censoring data from step-stress accelerated life testing models under the exponential distribution[J]. Chinese Journal of Applied Probability an Statistics，1991，1(7)：52-60.

[7] 朱利平，卢一强，茆诗松. 混合指数分布的参数估计[J]. 应用概率统计，2006，22(2)：137-150.
Zhu L P，Lu Y Q，Mao S S. Estimation of parameters of mixed exponential distribution[J]. Chinese Journal of Applied Probability an Statistics，2006，22(2)：137-150.

[8] 马志明，刘瑞元，习丽. 多个子总体混合分布的参数估计[J]. 西北民族大学学报：自然科学版，2007，28(1)：11-15.
Ma Z M，Liu R Y，Xi L. Parameter estimation of mixed exponential distribution[J]. Journal of Northwest University for Nationalities：Natural Science，2006，22(2)：137-150.

[9] 罗季. Monte Carlo EM 加速算法[J]. 应用概率统计，2008，24(3)：311-318.
Luo J. Acceleration of Monte Carlo EM algorithm[J]. Chinese Journal of Applied Probability an Statistics，2008，24(3)：311-318.

[10] 严海芳，蒋卉. 混合指数分布恒加应力下的 MCEM 加速算法[J]. 湘潭大学自然科学学报，2011，33(3)：35-37.
Yan H F，Jiang H. MCEM algorithm of parameters estimation in mixture exponential distribution for constant stress accelerated[J]. Natural Science Journal of Xiangtan University，2011，33(3)：35-37.

[11] 严海芳，蒋卉. 定数截尾混合指数分布在恒加应力下的 MCEM 加速算法[J]. 数学的实践与认识，2012，42(1)：127-134.
Yan H F，Jiang H. MCEM algorithm of parameters estimation in constant stress accelerated life for mixture exponential distribution on type Ⅱ consoring[J]. Mathematics in Practice and Theory，2012，42(1)：127-134.

[12] 严海芳. 对数正态分布的 MCEM 加速算法[J]. 青海大学学报：自然科学版，2012，30(2)：74-76.
Yan H F. MCEM algorithm of parameters estimation for logarithmic normal distribution[J]. Journal of Qinghai University：Natural Science Edition，2012，30(2)：74-76.

[13] 李光辉，赵磊. 基于 Weibull 分布的定期检测的贮存系统可靠性模型[J]. 鲁东大学学报：自然科学版，2012，28(3)：219-222.
Li G H，Zhao L. The reliability model of periodically detecting storage system based on the Weibull distribution[J]. Ludong University Journal：Natural Science Edition，2012，28(3)：219-222.

MCEM Algorithm of Parameters Estimation of Mixed Weibull Distribution

LI Guanghui，ZHANG Hong，YE Xuguo
(School of Mathematics Science Kaili University，Kaili Guizhou 556011，China)

Abstract：This paper discusses the parameter estimation of mixed Weibull distribution in the normal stress and constant stress level. First，the overall construct two mixed Weibull distribution，then use MCEM accelerated algorithm to obtain the parameter estimates in Mixed Weibull distribution in the normal stress level when full data. Second，in the normal stress level，respectively censored tail circumstances and timing parameter estimation iterative solution obtained，and discuss when mixed Weibull distribution without redundancy parameters，use the Chebyshev iteration algorithm to get all the parameters estimation. Similarly，extending the case of normal stress level to constant applied stress. In the full data were censored data situation and the circumstances under which the parameter estimation. Finally we put forward further study.

Key words：mixed Weibull distribution；MCEM accelerated algorithm；censored data；normal stress；constant stress

（责任编辑　游中胜）