可完备化的广义 Heisenberg 代数

石 亚 峰
（喀什师范学院 数学系，新疆 喀什 844000）

摘要：主要研究了广义 Heisenberg 代数的性质和分类，给出了它的代数结构，即它是一类特殊的二步幂零李代数，并给出广义 Heisenberg 代数在实数域上可完备化的充要条件是它的复化李代数可完备化。在此基础上，进而证明了当广义 Heisenberg 代数的中心维数 $\dim c(n)=1,2,3$ 时，它是可完备化的幂零李代数。

关键词：可解完备李代数；广义 Heisenberg 代数；极大环面
中图分类号：O15　　**文献标志码**:A

完备李代数 L 的定义是由 N.Jacobson 给出的，即 L 满足条件：1) 中心为零，$C(L)=0$; 2)所有导子都是内导子，即 $Der(L)=ad(L)$。与此同时他还给出了复半单李代数是完备的，非交换的二维李代数也是完备的结论。不久 G. Leger 找到了一些可解完备李代数的例子[1]，进而证明了如下定理。

定理 1 一个可解完备李代数是完备的当且仅当 $Der(L)=ad(L)$。

实际上孟道骥在完备李代数这个领域做了许多系统性的研究工作，得到了一系列深刻的定理，例如可解完备李代数的结构定理和分解唯一性定理等等。而且他还找到了许多完备李代数的例子[2-5]。即便现在已经找到了非常多的完备李代数的例子，但是想要对它进行完全的分类却是极其困难的工作。到目前为止，只有可解完备李代数是最有希望了解清楚的一类完备李代数。根据孟道骥[4]中的结果，可解完备李代数是由其幂零根基完全决定的。因而可解完备李代数的研究可完全归结于可完备化幂零李代数的研究。

下列李代数是可完备化幂零李代数：1) 交换李代数和 Heisenberg 李代数[6]；2) 拟 Heisenberg 李代数和一些二步幂零李代数[7]；3) 极大秩幂零李代数[8]；4) 某些 filiform 李代数[9]和拟 filiform 李代数[10]。

本文将讨论广义 Heisenberg 代数的结构，即它是一类特殊的二步幂零李代数，进而证明当它的中心维数是 1,2,3 时，相应的广义 Heisenberg 代数是可完备化幂零李代数。

1 基本知识

定义 1 假定 N 是一个幂零李代数，由 N 的半单线性变换组成的 $Der(N)$ 的交换子代数 H 称为 N 的一个环面。N 的极大环面的维数称为 N 的秩，记为 $rank(N)$。

定义 2 如果对于李代数 L 的子代数 S 中的任意元素 t，均能使 adt 为 L 的半单线性变换，则称 S

____

* **收稿日期**：2013-12-31　　**修回日期**：2015-01-10
作者简介：石亚峰，男，讲师，研究方向为描述集合论、泛函分析、点集拓扑，概率数理统计,E-mail:

为 L 的环面子代数。

如果任何真包含 S 的子代数不是环面子代数，则称 S 为 L 的极大环面子代数。

易知 L 的环面子代数是可交换的，而 L 的极大环面子代数一定包含 L 的中心。

设 N 是一个幂零李代数，H 是它的一个极大环面，在向量空间 $L(L=H\ltimes N)$ 上定义 $[h_1+n_1,h_2+n_2]=h_1(n_2)-h_2(n_1)+[n_1,n_2]$，$\forall h_i\in H, n_i\in N, i=1,2$，则 L 是一个可解李代数。上述构造的只是极小一部分的可解李代数，但下面这个定理则保证了可解李代数一定是这个类型的[11]。

定理 2 设 L 是一个可解完备李代数，则下述 3 个结论成立：1) L 的分解式为：$L=H\ltimes N$ (其中 H 为 L 的一个极大环面子代数，N 为 L 的极大幂零理想)；2) adH 在 N 上的限制 $adH|_N$ 是 N 的一个极大环面；3) H 与 N 的极大环面同构。

注 可解完备李代数的同构[11]。

定理 3 设 $L_i=H_i\ltimes N_i$（$i=1,2$）为两个可解完备李代数(其中 N_i 为 L_i（$i=1,2$）的幂零根基)，则 $N_1\cong N_2$ 当且仅当 $L_1\cong L_2$。

通过上述定理知道可解完备李代数完全由它的幂零根基所决定。因此有下述定义。

定义 3 如果存在 N 的一个极大环面 H，使 $L=H\ltimes N$ 完备，则称幂零李代数 N 是可完备化的，此时 N 可以简称为 CN 李代数。

定理 4[11] 如果幂零李代数 N 有理想的直和分解 $N=N_1\oplus N_2\oplus\cdots\oplus N_r$，则 N 是 CN 李代数当且仅当 N_i（$1\le i\le r$）均为 CN 李代数。

定义 5 假定 N 是 L 的幂零理想，H 是 L 的环面子代数。如果 $H\cap C_L(N)=0$，则称 H 是 L 的对 N 的正则环面。

引理 1[12] 设 H 是 L 的正则环面子代数，则 $Der(L)=D_0+adL$，这里 $D_0=\{\varphi\in Der(L)|\ \in H$。

如果令 N 是一个幂零李代数，H 是 N 上的一个极大环面，并且 $L=H\ltimes N$（$H\neq 0$），则有 H 是 L 的一个正则环面，于是有定理 5。

定理 5 如果 N 是一个幂零李代数，H 是 N 上的一个极大环面，且满足 $L=H\ltimes N$，则 L 是一个完备可解李代数当且仅当 $D_0\subset adL$（其中 $D_0=\{\varphi\in Der(L)\,|\,\varphi(H)=0\}$）。

2 广义 Heisenberg 代数

定义 6 设 n 是一个实二步幂零李代数，$<,>$ 是 n 上的一个内积。令 $c(n)$ 是 n 的中心，V 是其正交补子空间。对任何一个向量 $Z\in c(n)$，定义一个线性变换 $J_Z:V\to V$ 满足下面的关系式

$$<J_Z X,Y>=<[X,Y],Z>,\forall X,Y\in V。$$

李代数 n 称为广义 Heisenberg 代数，若对 $\forall Z\in c(n)$, 线性变换 J_Z 满足等式 $(J_Z)^2=-<Z,Z>id_V$。

广义 Heisenberg 代数的分类已经完成了。对任意维数的中心 $c(n)$，都有一系列维数的广义 Heisenberg 代数。如果把 V 看成 $c(n)$ 模（通过 J_Z 作用），那么每个广义 Heisenberg 代数可分解成一些不可约 $c(n)$ 模的直和。如果 $\dim c(n)\neq 3(\mathrm{mod}\,4)$，则不可约 $c(n)$ 模都是等价的，否则有两个相同维数的互不等价的不可约 $c(n)$ 模。不可约 $c(n)$ 模的维数可由表 1 给出。

表 1　不可约 $c(n)$ 模的维数

$c(n)$ 模	$8p$	$8p+1$	$8p+2$	$8p+3$	$8p+4$	$8p+5$	$8p+6$	$8p+7$
V	2^{4p}	2^{4p+1}	2^{4p+2}	2^{4p+2}	2^{4p+3}	2^{4p+5}	2^{4p+3}	2^{4p+3}

注意到广义 Heisenberg 代数是定义在实数域上的，由下述定理保证了它可完备化当且仅当其复化李代数可完备化。

定理 6[11] 实李代数完备当且仅当其复化李代数是完备的。

在以下章节将考虑 $\dim c(n)=1,2,3$ 的情况，并证明相应的广义 Heisenberg 代数都是可完备化的。对于中心维数大于等于 4 的情形，由于其李代数结构极其复杂，计算相应的极大环面需要占据的篇幅过大，将另作文章阐述之，请见后续工作。

3 可完备化的幂零李代数

3.1 中心维数 $\dim c(n)=1$ 的情况

注意到每个非退化的反对称的线性变换 $J:V\to V$ 在一组恰当的基下有矩阵表示 $\begin{pmatrix}0 & I\\ -I & 0\end{pmatrix}$。这样就可找到 n 的一组基 $\{x_1,y_1,x_2,y_2,\ldots,x_n,y_n,z\}$，满足李括号 $[x_i,y_i]=z,1\le i\le n,$ 其他李括号均为 0。把此 $2n+1$ 维的广义 Heisenberg 代数记为 H^n，注意到它就是一般意义上的 Heisenberg 代数，从而 H^n

是可完备化的。

3.2 中心维数 $\dim c(n)=2$ 的情况

设 L 是 $4n+2$ 维的实向量内积空间，令 $\{E_1,E_2,\cdots,E_{4n},Z_1,Z_2\}$ 是 L 上的一组标准正交基。定义 L 上的李括号为

$$[E_{4p+1},E_{4p+2}]=0,[E_{4p+1},E_{4p+3}]=Z_1,[E_{4p+1},E_{4p+4}]=Z_2,$$

$$[E_{4p+2},E_{4p+3}]=Z_2,[E_{4p+2},E_{4p+4}]=-Z_1,[E_{4p+3},E_{4p+4}]=0,\quad \forall p=0,1,\cdots,n-1。$$

对其他的 $k,l=0,1,\cdots,4n,$ $[E_k,E_l]=0,$ $k=0,1,\cdots,4n,l=1,2$，$[E_k,Z_l]=0,$ 并且 $[Z_1,Z_2]=0$。

容易知道，Z_1 和 Z_2 生成李代数 L 的中心。经过繁琐的计算，对每个 $Z\in c(L),$ $(J_Z)^2=-<Z,Z>id,$ 所以 L 是中心维数为 2 的广义 Heisenberg 代数。

对 L 的每个线性子空间 $D_p=span\{E_{4p+1},E_{4p+2},E_{4p+3},E_{4p+4}\}$ $(\forall 0\le p\le n-1)$ 都是 $c(L)$ 的不可约模，并且相互等价。也就是说，$L=c(L)+\sum_{p=0}^{n-1}D_p=span<Z_1,Z_2>+\sum_{p=0}^{n-1}D_p$。现在考虑 L 的复化。

定理 7 $L^C\cong H^n\oplus H^n,$ 从而 L^C 是可完备化的幂零李代数。

证明 令 $F_{4p+1}=E_{4p+1}+iE_{4p+2},F_{4p+2}=E_{4p+3}+iE_{4p+4},\quad F_{4p+3}=E_{4p+1}-iE_{4p+2},F_{4p+4}=E_{4p+3}-iE_{4p+4},$ $W_1=2Z_1+2iZ_2,W_2=2Z_1-2iZ_2,$ 则

$$[F_{4p+1},F_{4p+2}]=[E_{4p+1},E_{4p+3}]+[E_{4p+1},iE_{4p+4}]+[iE_{4p+2},E_{4p+3}]+[iE_{4p+2},E_{4p+4}]=Z_1+iZ_2+iZ_2+Z_1=W_1,$$

$$[F_{4p+1},F_{4p+3}]=0,$$

$$[F_{4p+1},F_{4p+4}]=[E_{4p+1},E_{4p+3}]-[E_{4p+1},iE_{4p+4}]+[iE_{4p+2},E_{4p+3}]-[iE_{4p+2},iE_{4p+4}]=Z_1-iZ_2+iZ_2-Z_1=0,$$

$$[F_{4p+2},F_{4p+3}]=[E_{4p+3},E_{4p+1}]-[E_{4p+3},iE_{4p+2}]+[iE_{4p+4},E_{4p+1}]-[iE_{4p+4},iE_{4p+2}]=$$

$$-Z_1+iZ_2-iZ_2+Z_1=0,$$

$$[F_{4p+2},F_{4p+4}]=0,$$

$$[F_{4p+3},F_{4p+4}]=[E_{4p+1},E_{4p+3}]-[E_{4p+1},iE_{4p+4}]-[iE_{4p+2},E_{4p+3}]+[iE_{4p+2},iE_{4p+4}]=Z_1-iZ_2-iZ_2+Z_1=W_2,$$

对其他的 $k,l=0,1,\cdots,n-1,$ $[F_k,F_l]=0,$ $[F_k,W_i]=0,i=1,2,$ $[W_1,W_2]=0$ 。这样令

$$L_1 = span\{F_{4p+1}, F_{4p+2}, W_1\}(p=0,1,\dots n-1),\ L_2 = span\{F_{4p+3}, F_{4p+4}, W_2\}(p=0,1,\dots n-1),$$

则 $L_1 \cong H^n$， $L_2 \cong H^n$, 并且 $[L_1, L_2]=0,\ L^C = L_1 \oplus L_2$, 因此 $L^C \cong H^n \oplus H^n$ 。由定理 4 知 L^C 是可完备化幂零李代数。 证毕

3.3 中心维数 $\dim c(n)=3$ 的情况

设 L 是 $4(n+m)+2$ 维的实向量内积空间，令 $\{E_1, E_2, \cdots, E_{4n}, F_1, F_2, \cdots, F_{4m}, Z_1, Z_2, Z_3\}$ 是 L 上的一组标准正交基。定义 L 上的李括号为

$$[E_{4p+1}, E_{4p+2}] = Z_1, [E_{4p+1}, E_{4p+3}] = Z_2, [E_{4p+1}, E_{4p+4}] = Z_3,$$

$$[E_{4p+2}, E_{4p+3}] = Z_3, [E_{4p+2}, E_{4p+4}] = -Z_2, [E_{4p+3}, E_{4p+4}] = Z_1,\ \forall p = 0,1,\cdots, n-1。$$

$$[F_{4q+1}, F_{4q+2}] = Z_1, [F_{4q+1}, F_{4q+3}] = Z_2, [F_{4q+1}, F_{4q+4}] = Z_3,$$

$$[F_{4q+2}, F_{4q+3}] = -Z_3, [F_{4q+2}, F_{4q+4}] = Z_2, [F_{4q+3}, F_{4q+4}] = -Z_1,\ \forall q = 0,1,\cdots, m-1。$$

对其他 $i, j = 0,1,\cdots, 4n, k, l = 1,2,\cdots, 4m, s, t = 1,2,3,$ 有

$$[E_i, E_j] = 0, [F_k, F_l] = 0, [E_i, F_k] = 0, [E_i, Z_s] = 0, [F_k, Z_s] = 0, [Z_s, Z_t] = 0 。$$

容易知道， Z_1, Z_2 和 Z_3 生成李代数 L 的中心。经过繁琐的计算，对每个 $Z \in c(L),\ (J_Z)^2 = -<Z, Z> id$, 所以 L 是中心维数为 3 的广义 Heisenberg 代数。这样设 $c(L) = span\{Z_1, Z_2, Z_3\}$， $D_p = span\{E_{4p+1}, E_{4p+2}, E_{4p+3}, E_{4p+4}\}$， $p = 0,1,\cdots, n-1$, $\bar{D}_q = span\{F_{4q+1}, F_{4q+2}, F_{4q+3}, F_{4q+4}\}$, $q = 0,1,\cdots, m-1$。则 D_p 和 $\bar{D}_q$ 是不可约 $c(L)$ 模，且相互不等价。再令 $n_p = c(L) + D_p$, $\bar{n}_q = c(L) + \bar{D}_q$, 易知 n_p $(p = 0,1,\cdots, n-1)$ 互相同构， $\bar{n}_q$ $(q = 0,1,\cdots, m-1)$ 互相同构，但是 n_p 和 $\bar{n}_q$ 是互不同构的 7 维实李代数。对于他们的复化，有如下引理。

引理 2 $\forall p = 0,1,\dots, n-1,\ q = 0,1,\dots, m-1,\ {n_p}^C \cong {\bar{n}_q}^C$ 。

证明 只需证明 ${n_0}^C \cong {\bar{n}_0}^C$ 。设映射 $\varphi: {n_0}^C \to {\bar{n}_0}^C$ 为 $\varphi(E_1) = -iF_1$， $\varphi(E_2) = iF_2$, $\varphi(E_3) = iF_3$, $\varphi(E_4) = -iF_4$, $\varphi(Z_1) = Z_1$, $\varphi(Z_2) = Z_2$, $\varphi(Z_3) = Z_3$ 的线性扩充。则经由简单的计算可得 $[-iF_1, iF_2] = Z_1$, $[-iF_1, iF_3] = Z_2$, $[-iF_1, iF_4] = Z_3$, $[iF_2, iF_3] = Z_3$， $[iF_2, iF_4] = -Z_2$, $[iF_3, iF_4] = Z_1$, 易知 φ 为李代数同构。 证毕

定理 8 $L^C = c(L)^C + \sum_{p=0}^{n+m-1} D_p{}^C$ 。

现在计算 L^C 的极大环面。为此，先设 $W_{4p+1} = E_{4p+1} + iE_{4p+4}$， $W_{4p+2} = \frac{1}{2}(E_{4p+2} + iE_{4p+3})$, $W_{4p+3} = E_{4p+3} + iE_{4p+2}$， $W_{4p+4} = \frac{1}{2}(E_{4p+4} + iE_{4p+1})$， $p = 0,1,\cdots,n+m-1$， $S_1 = Z_1 + iZ_2$， $S_2 = Z_1 - iZ_2$， $S_3 = Z_3$, 则易知 $\{W_{4p+1}, W_{4p+2}, W_{4p+3}, W_{4p+4}, p = 0,1,\cdots,n+m-1, S_1, S_2, S_3\}$ 为 L^C 的一组基，并且 $[W_{4p+1}, W_{4p+2}] = S_1$， $[W_{4p+1}, W_{4p+3}] = 0$， $[W_{4p+1}, W_{4p+4}] = S_3$， $[W_{4p+2}, W_{4p+3}] = S_3$， $[W_{4p+2}, W_{4p+4}] = 0$, $[W_{4p+3}, W_{4p+4}] = S_2$, $\forall p = 0,1,\cdots,n+m-1$ 。而对于其他的 $k,l = 0,1,2,\cdots,n+m-1$, 则有 $[W_k, W_l] = 0$ 。

引理 3 在 L^C 的一组基 $\{W_{4p+1}, W_{4p+2}, W_{4p+3}, W_{4p+4}, p = 0,1,\ldots n+m-1, S_1, S_2, S_2\}$ 下，矩阵集合 $H = \{(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{4(n+m)}, \mu_1, \mu_2, \mu_3)\}$ ，这里 $\lambda_{4p+1} + \lambda_{4p+2} = \mu_1$， $\lambda_{4p+3} + \lambda_{4p+4} = \mu_2$， $\lambda_{4p+1} + \lambda_{4p+4} = \mu_3$， $\lambda_{4p+2} + \lambda_{4p+3} = \mu_3, \forall p = 0,1,\cdots,n+m-1$ 是 L^C 的极大环面。

证明 首先由这组基知， H 是 L^C 上的环面。其次，注意到 H 包含一个特征值互异元素 $h = diag(1,0,0,-1,5,-4,4,-5,\cdots,4(n+m-1),-4(n+m),4(n+m),-4(n+m-1),1,-1,0)$, 因此所有与 h 交换的半单线性导子在上述基下一定是对角型的。不妨设 s 是与 H 交换的一个导子，有矩阵表示 $s = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{4(n+m)}, \mu_1, \mu_2, \mu_3)$ 。由于 s 是 L^C 上的导子，从而

$$\lambda_{4p+1} + \lambda_{4p+2} = \mu_1,\ \lambda_{4p+3} + \lambda_{4p+4} = \mu_2,\ \lambda_{4p+1} + \lambda_{4p+4} = \mu_3,\ \lambda_{4p+2} + \lambda_{4p+3} = \mu_3 。$$

故 $s \in H$ ，因此 H 是 L^C 的极大环面。 证毕

定理 9 $g = H \dotplus L^C$ 是可解完备李代数。

证明 设 $D_0 = \{\varphi \in Der(g) \mid \varphi(H) = 0\}$ 。 $\forall \varphi \in Der(g)$, 有 $\varphi(L^C) \subset L^C$, 则 $\varphi|_{L^C}$ 可以看作 L^C 上与 H 交换的的导子。由于 H 包含特征值互易的半单线性变换，则类似引理 2 的证明可知， $\varphi|_{L^C} \in H$ 。从而 $D_0 \subset adH$ ，即 g 是可解完备李代数。 证毕

参考文献

[1] G. Leger, Derivations of Lie algebra III[J], Duke math J, 1963, 30: 637-645.

[2] 孟道骥，完备李代数[J]，南开大学学报， 1985，（2）: 9-19.

Meng D J,Complete Lie algebras[J].Journal of Nankai University,1985,(2):9-19

[3] D. Meng, some results on complete Lie algebras[J], commutications in Algebra, 1994, 22:5497-5507.

[4] 朱林生，孟道骥，广义 Kac-Moody 代数与无限维完备 Lie 代数[J]，南开大学学报，1995,28（1）:5-10.

Zhu L S,Meng D J,Generalized Kac-Moody algebras and infinite dimension complete Lie algebras[J], Journal of Nankai University,1995,28(1):5-10

[5] 朱林生，孟道骥，广义 Kac-Moody 代数的导子[J]，数学年刊，A 辑，1996, 17:271-276.

Zhu L S,Meng D J,Derivation of generalized Kac-Moody algebras[J],Annals Mathematics,A,1996,17:271-276

[6] D. Meng, Complete Lie algebras and Heisenberg Lie algebras[J], Comm. Algebra. 1994;22:5509-5524.

[7] B. Ren, D. Meng, Some 2-step nilpotent Lie algebras I[J], Linear Algebra and Appl. 2001;338:77-98.

[8] D. Meng, L. Zhu, Solvable complete Lie algebras I[J], Comm.Algebra, 1996;24:4181-4197.

[9] J. M. Ancochea Bermudez, R. Campoamor, Completable filiform Lie algebras[J], Linear Algebra and Appl, 2003, 367:185-191.

[10] E. A. Luengo, J. M. Ancochea Bermudez, L. G. Vergnolle, Completeness of quasi-filiform Lie algebras[J], Linear and Multilinear Alg, 2013, 61(5):582-595

[11] 孟道骥，朱林生，姜翠波，完备李代数[M]，科学出版社，北京，2001.

Meng D J,Zhu L S,Jiang C B, Complete Lie algebras[M],Science Press,Beijing,2001

[12] 任斌，孟道骥，DerL=adL 的一个充分必要条件[J]，数学学报，2000, 43(1):55-60.

Ren B,Meng D J,A necessary and sufficient condition of DerL=adL[J],Journal of Mathematics,2000,43(1):55-60

Completable of Generalized Heisenberg Algebras

SHI Yafeng

(Department of Mathematics ,Kashgar Teachers College,Xinjiang 844007, China)

Abstract：This paper mainly studies the properties and classification of generalized Heisenberg algebras，the algebraic structure of it is given which is a special class of two step nilpotent Lie algebras. and generalized Heisenberg algebras in the real domain necessary and sufficient condition for acomplete is its complex Lie algebra can be complete. And proves that the generalized Heisenberg algebras with the dimension of center no more than 3 are completable Lie algebras.

Key words: solvable Lie algebra; generalized Heisenberg algebra; maximal torus.