2015 年 5 月　　重庆师范大学学报（自然科学版）　　May 2015
第 32 卷第 3 期　　Journal of Chongqing Normal University(Natural Science)　　Vol.32 No.3

利用最小作用原理研究一类非自治二阶系统周期解

王少敏，杨存基

（大理学院 数学与计算机学院，云南 大理 671000）

摘要：主要研究以下二阶系统

$$\begin{cases} \ddot{u}(t)-A(t)u(t)=\nabla F(t,u(t)), \\ u(0)-u(T)=\dot{u}(0)-\dot{u}(T)=0, \end{cases} \quad \text{a. e. } t\in[0,T]$$

的周期解的存在性。当 $F(t,x)=F_1(t,x)+F_2(x)$ 满足假设（A）且具有局部有界性 $\liminf\limits_{|x|\to+\infty}\frac{1}{|x|^{2\alpha}}\int_0^T F(t,x)\mathrm{d}t > \frac{2T(\int_0^T r_1(t)\mathrm{d}t)^2}{12-T\int_0^T k(t)\mathrm{d}t}$ 及 A(t)满足条件 $(A(t)x,x)\ge h(t)|x|^{\beta}+w(t)$ 时，通过使用最小作用原理得到了一个新的周期解的存在性定理，改进了已有结果。

关键词:粒子滤波；权值优化；门限；均方根误差；重采样
中图分类号：O177.25　　**文献标志码**：　A　　**文章编号**：

考虑二阶非自治系统

$$\begin{cases} \ddot{u}(t)-A(t)u(t)=\nabla F(t,u(t)), \\ u(0)-u(T)=\dot{u}(0)-\dot{u}(T)=0, \end{cases} \quad \text{a. e. } t\in[0,T], \tag{1}$$

其中 $T>0$，$A(t)=[a_{ij}(t)]$ 是一个连续的 *N* 阶对称矩阵，$F:[0,T]\times R^N\to R$ 满足如下条件：

(A) 对于每个 $x\in R^N$，$F(t,x)$ 关于 t 可测，对 a. e. $t\in[0,T]$，$F(t,x)$ 关于 x 连续可微，且存在 $a\in C(R^+,R^+)$，$b\in L^1(0,T;R^+)$ 使得对任意 $x\in R^N$ 和 a. e. $t\in[0,T]$ 有

$$|F(t,x)|\le a(|x|)b(t),\quad |\nabla F(t,x)|\le a(|x|)b(t)。$$

众所周知，$u\in H_T^1$ 是问题(1)的一个解的充要条件是 u 是泛函 φ 的一个临界点。当 $A(t)\equiv 0$，$t\in[0,T]$ 时，许多学者已通过使用最小作用原理和临界点理论中的极大极小方法获得了很多存在性结果[1-5]，其中文献[1]在一些新的超二次条件下，得到了系统(1)的周期解的存在性；文献[2]和文献[3]使用极大极小方法研究了局部超二次条件下的系统(1)的周期解；文献[4]研究了次调和解；文献[5]使用最小作用原理研究了系统（1）。当 $A(t)$ 是一般的 *N* 阶连续对称矩阵时，文献[6]研究了多个周期解的存在性;文献[7]利用环绕定理，得到了具有不定号位势的系统(1)周期解的存在性；特别地，在文献[5]中，作者在 $F(t,x)$ 满足条件

收稿日期：2014-04-30　　修回日期：2014-06-24
资助项目：国家自然科学基金（No. 11261002）；云南省科技厅应用基础项目（No. 2011FZ167）
作者简介：王少敏，女，副教授，研究方向为非线性分析，E-mail:shaominwang2006@126.com

“$\left|\nabla F(t,x)\right| \le f(t)\left|x\right|^{\alpha} + g(t)$”及“$\lim\limits_{|x|\to+\infty}\dfrac{1}{\left|x\right|^{2\alpha}}\int_0^T F(t,x)\mathrm{d}t = +\infty$”下使用最小作用原理研究了系统(1)的周期解的存在性，本文将使用最小作用原理进一步研究系统(1)的解的存在性，将条件“$\lim\limits_{|x|\to+\infty}\dfrac{1}{\left|x\right|^{2\alpha}}\int_0^T F(t,x)\mathrm{d}t = +\infty$”减弱为 “$\liminf\limits_{|x|\to+\infty}\dfrac{1}{\left|x\right|^{2\alpha}}\int_0^T F(t,x)\mathrm{d}t$ 有一定的下界”，进而获得了一个新的存在性定理。

1 主要结果

定理 1 设 $F(t,x)=F_1(t,x)+F_2(x)$，$F(t,x)$ 满足条件(A)，$A(t)$ 及 $F_1(t,x),F_2(x)$ 满足以下条件：

(i) 存在 $f,g\in L^1(0,T;R^+)$ 及 $\alpha\in[0,1)$，使得

$$\left|\nabla F_1(t,x)\right| \le r_1(t)\left|x\right|^{\alpha} + r_2(t) \qquad \forall x\in R^N,\ a.e.t\in[0,T]。 \tag{2}$$

(ii) 存在$k\in L^1(0,T;\mathrm{R}^+)$且$0<\int_0^T k(t)\mathrm{d}t<\dfrac{12}{T}$，使得

$$(\nabla \mathrm{F}_2(x)-\nabla \mathrm{F}_2(y),x-y)\ge -\mathrm{k(t)}\,|x-y|^2,\ \forall x,y\in R^N,\ \text{a.e. } t\in[0,T]。 \tag{3}$$

(iii) 存在 $h,\mathrm{w}\in L^1(0,T;R^+)$ 及 $\beta\in[0,2)$且$2\alpha>\beta$，使得

$$(A(t)x,x)\ge h(t)\,|x|^{\beta}+w(t),\ \forall(t,x)\in[0,T]\times R^N。 \tag{4}$$

(iv)

$$\liminf_{|x|\to+\infty}\frac{1}{\left|x\right|^{2\alpha}}\int_0^T F(t,x)\mathrm{d}t > \frac{2T\left(\int_0^T r_1(t)\mathrm{d}t\right)^2}{12-T\int_0^T k(t)\mathrm{d}t} \tag{5}$$

则问题(1)至少存在一个周期解。

$H_T^{1`}=\{u:[0,T]\to R^N \mid u$ 是绝对连续，$u(0)=u(T)$，$\dot u\in L^2(0,T;R^{\mathrm{N}})\}$是一个 Hilbert 空间，具有范数

$$\left\|u\right\| = \left(\int_0^T \left|u\right|^2 dt + \int_0^T \left|\dot u(t)\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}},\ \forall\ u\in H_T^1$$

在 $\mathrm{H}_\mathrm{T}^{1`}$ 上定义泛函

$$\varphi(u)=\frac{1}{2}\int_0^{\mathrm{T}}\left|\dot u(t)\right|^2\mathrm{dt}+\frac{1}{2}\int_0^T(A(t)u(t),u(t))\mathrm{d}t+\int_0^{\mathrm{T}}F(t,u(t))\mathrm{d}t,$$

则 $\varphi(u)$ 在 H_T^1 上连续可微且弱下半连续。

对 $\forall u \in H_T^1$，令 $\overline{u} = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\mathrm{d}t$，$\tilde{u}(t) = u(t) - \overline{u}$，则有如下重要不等式

$$\|\tilde{u}\|_\infty^2 \le \frac{T}{12}\int_0^T |\dot{u}(t)|^2 \mathrm{d}t \text{（sobolev 不等式）。}$$

为方便起见。记 $M_1 = \int_0^T k(t)\mathrm{d}t, M_2 = \int_0^T r_1(t)\mathrm{d}t, M_3 = \int_0^T r_2(t)\mathrm{d}t$。

2 定理的证明

由(5)式知，存在 $a_1 > \frac{2T}{12 - TM_1}$，使得

$$\liminf_{|x|\to+\infty} \frac{1}{|x|^{2\alpha}}\int_0^T F(t, x)\mathrm{d}t > a_1 M_2^2。 \tag{6}$$

由(2)式及 sobolev 不等式得

$$\left|\int_0^T [F_1(t, u(t)) - F_1(t, \overline{u})]\mathrm{d}t\right| = \left|\int_0^T\int_0^1 (\nabla F_1(t, \overline{u} + s\tilde{u}), \tilde{u})\mathrm{d}s\mathrm{d}t\right| \le$$

$$\int_0^T\int_0^1 r_1(t) \mid \overline{u} + s\tilde{u} \mid^\alpha \cdot \mid \tilde{u} \mid \mathrm{d}s\mathrm{d}t + \int_0^T\int_0^1 r_2(t) \mid \tilde{u}(t) \mid \mathrm{d}s\mathrm{d}t \le$$

$$2|\overline{u}|^\alpha \|\tilde{u}\|_\infty \int_0^T r_1(t)\mathrm{d}t + 2\|\tilde{u}\|_\infty^{\alpha+1}\int_0^T r_1(t)\mathrm{d}t + \|\tilde{u}\|_\infty \int_0^T r_2(t)\mathrm{d}t \le$$

$$\frac{1}{a_1}\|\tilde{u}\|_\infty^2 + a_1 M_2^2 |\overline{u}|^{2\alpha} + 2M_2\|\tilde{u}\|_\infty^{\alpha+1} + M_3\|\tilde{u}\|_\infty \le \frac{T}{12a_1}\|\dot{u}\|_2^2 + a_1 M_2^2|\overline{u}|^{2\alpha} + c_1\|\dot{u}\|_2^{\alpha+1} + c_2\|\dot{u}\|_2。 \tag{7}$$

由(3)式及 Sobolev 不等式，有

$$\int_0^T [F_2(u(t)) - F_2(\overline{u})]\mathrm{d}t = \int_0^T\int_0^1 (\nabla F_2(\overline{u} + s\tilde{u}(t)), \tilde{u}(t))\mathrm{d}s\mathrm{d}t = \int_0^T\int_0^1 (\nabla F_2(\overline{u} + s\tilde{u}(t)) - \nabla F_2(\overline{u}), \tilde{u}(t))\mathrm{d}s\mathrm{d}t \ge$$

$$-\int_0^T\int_0^1 \frac{1}{s} k(t) \mid s\tilde{u}(t) \mid^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}t \ge -\frac{1}{2}\|\tilde{u}\|_\infty^2\int_0^T k(t)\mathrm{d}t \ge -\frac{T}{24}M_1\|\dot{u}\|_2^2 \tag{8}$$

$$\frac{1}{2}\int_0^T (A(t)u(t), u(t))\mathrm{d}t \ge \frac{1}{2}\int_0^T h(t) \mid u(t) \mid^\beta \mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0^T w(t)\mathrm{d}t \ge -2\int_0^T h(t)(\mid \overline{u} \mid^\beta + \|\tilde{u}\|_\infty^\beta)\mathrm{d}t \ge$$

$$-2\int_0^T h(t)\mathrm{d}t \mid \overline{u} \mid^\beta - c_3\|\dot{u}\|_2^\beta \tag{9}$$

因此，由(7)～(9)式，有

$$\varphi(\mathrm{u}) = \frac{1}{2}\int_0^T |\dot{u}(t)|^2\mathrm{d}t + \int_0^T F(t, u(t))\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0^T (A(t)u(t), u(t))\mathrm{d}t =$$

$$\frac{1}{2}\|\dot{u}\|_2^2 + \int_0^T [F_1(t, u(t)) - F_1(t, \overline{u})]\mathrm{d}t + \int_0^T [F_2(u(t)) - F_2(\overline{u})]\mathrm{d}t + \int_0^T F(t, \overline{u})\mathrm{d}t +$$

$$\frac{1}{2}\int_0^T(A(t)u(t),u(t))\mathrm{d}t\ge(\frac{1}{2}-\frac{T}{12a_1}-\frac{M_1T}{24})\|\dot u\|_2^2-c_1\|\dot u\|_2^{\alpha+1}-c_2\|\dot u\|_2-c_3\|\dot u\|_2^{\beta}-2\int_0^T h(t)dt\,|\bar u|^{\beta}+$$

$$|\bar u|^{2\alpha}\left(\frac{1}{|\bar u|^{2\alpha}}\int_0^T F(t,\bar u)\mathrm{d}t-a_1M_2^2\right)。$$

因为$\|u\|\to\infty\Leftrightarrow(|\bar u|^2+\|\dot u\|_2^2)^{\frac{1}{2}}\to\infty$，而由$a_1>\frac{2T}{12-TM_1}$知$\frac{1}{2}-\frac{T}{12a_1}-\frac{M_1T}{24}>0$，又由(6)式有$\varphi(u)\to+\infty$（$\|u\|\to\infty$），因此，$\varphi$在$H_T^1$上达到极小。由文献[8]中的定理 1.1 和推论 1.1 知结论成立。

证毕

注：定理 1 中的条件“$\liminf\limits_{|x|\to+\infty}\frac{1}{|x|^{2\alpha}}\int_0^T F(t,x)\mathrm{d}t>\frac{2T(\int_0^T r_1(t)\mathrm{d}t)^2}{12-T\int_0^T k(t)\mathrm{d}t}$”比文献[5]中的定理 1 中的条件“$\lim\limits_{|x|\to+\infty}\frac{1}{|x|^{2\alpha}}\int_0^T F(t,x)\mathrm{d}t=+\infty$”弱，且系统中的$A(t)$不恒等于零，所以定理 1 推广了文献[5]中的定理 1。

参考文献：

[1]Fei G H. On periodic solutions of superquadratic Hamiltonian systems[J].Electon J Differential Equations,2002(8):1-1.

[2]Schechter M. Periodic solution of second order non-autonomous dynamical systems[J].Bound Value Probl,2006:1-9.

[3]Wang Z Y, Zhang J H, Zhang Z T. Periodic solutions of second order non-autonomous Hamiltonian systems with local superquadratic potential[J].Nonlinear Anal,2009,70: 3672-3681.

[4] Tao Z L,Tang C L.Periodic and subharmonic solutions of second order Hamiltonian systems[J].J. Math Anal Appl, 2004,293:435-445.

[5] Tang C L. Periodic solutions for non-autonomous second order systems with sublinear nonlinearity [J].Proc Amer Math Soc，1998,126:3263-3270.

[6] Faraci F. Multiple periodic solutions for second order systems with changing sign potential[J]. J Math Amal Appl,2006,319:567-578.

[7] Xiao L,Tang X H. Existence of periodic solutions to second-order Hamiltonian systems with potential indefinite in sign[J]. Nonlinear Anal,2008,69:3999-4011.

[8] Mawhin J，Willem M.Critical point theory and Hamiltonian systems[M]. Berlin/New York:Springer-Verlag, 1989.

On Periodic Solutions for a Class of Non-autonomous Second Order Systems by the Least Action Principle

WANG Shaomin,YANG Cunji

（Department of Mathematics and computer, Dali University, Dali, Yunnan 671000, China;）

Abstract: The purpose of this paper is to study the existence of periodic solutions of the following second order systems

$$\begin{cases} \ddot{u}(t) - A(t)u(t) = \nabla F(t,u(t)), \\ u(0) - u(T) = \dot{u}(0) - \dot{u}(T) = 0, \end{cases} \qquad \text{a.e. } t \in [0,T]$$

When $F(t,x) = F_1(t,x) + F_2(x)$ satisfies assumption (A) and the potential function satisfies the locally boundary condition

$$\liminf_{|x|\to+\infty} \frac{1}{|x|^{2\alpha}} \int_0^T F(t,x)\mathrm{d}t > \frac{2T(\int_0^T r_1(t)\mathrm{d}t)^2}{12 - T\int_0^T k(t)\mathrm{d}t}$$ and $A(t)$ satisfies the condition $(A(t)x, x) \geq h(t)\,|x|^{\beta} + w(t)$.

One new existence theorem of the periodic solution is obtained by using the least action principle. Our result improves previously known result.

Keywords: periodic solutions; the least action principle; second order systems

(责任编辑　游中胜)