平面压缩映射的 Hölder 线性化

杨柳芳，张文萌

(重庆师范大学 数学学院,重庆 401331)

摘要：Hartman 线性化定理证明了双曲微分同胚在其不动点附近可以被拓扑共轭于其线性部分。为了在线性化的过程中保留更多的动力学性质，则其中的共轭映射至少是 Hölder 连续的。对于C^1和$C^{1,1}$映射，有文献分别估计了相应共轭映射的 Hölder 指数。笔者研究了对于光滑性介于C^1与$C^{1,1}$之间的$C^{1,\alpha}$ ($\alpha\in(0,1)$)映射。将利用含已知映射迭代的序列去逼近共轭方程的解，从而证明$C^{1,\alpha}$平面压缩映射线性化的局部 Hölder 连续性，扩展已有的结论。先把上述逼近中的极限转换为函数项级数。然后，通过估计映射迭代的收敛速度，证明该级数的一致收敛性并计算其 Hölder 指数。

关键词：平面压缩映射；线性化；Hölder 连续

中图分类号：O193　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1672-6693(2015)03- -

1　预备知识

令$\left(X,\|\cdot\|\right)$为一个 Banach 空间。映射$F:X\to X$的线性化问题即寻找满足共轭方程

$$\Phi\circ F=\Lambda\circ\Phi \tag{1}$$

的可逆映射Φ，其中Λ是F在其不动点处的 Fréchet 导数（即F的线性部分）。线性化使得我们可以借助于线性系统来了解非线性系统的动力学性质,是研究系统局部定性性质的基本方法之一。虽然著名的 Hartman 线性化定理[1]证明了C^1微分同胚在双曲不动点附近拓扑共轭于其线性部分，其中双曲不动点是指F在该点导数的谱与单位圆不相交,但为了在线性化的过程中保留更多的动力学性质，人们往往会期望共轭映射拥有比连续更好的性质。比如 Hölder 连续性，即一个映射Φ满足条件

$$\|\Phi(x)-\Phi(y)\|\le L\|x-y\|^{\beta}, \tag{2}$$

其中$L>0$为常数,$\beta\in(0,1]$为 Hölder 指数。这时就需要考虑 Hölder 线性化问题。

由于在研究 Lax-Oleinik 半群等问题中的应用[2,3]，Hölder 线性化引起了众多学者的注意。早在 1990 年，Strien 就在他的文献[4]里指出：Hartman 线性化中的共轭映射Φ实际上还是局部 Hölder 连续的。然而，

----

* **收稿日期**：2014 年 5 月 7 日　　**修回日期**：2015 年 1 月 15 日
资助项目：重庆市教育委员会科学技术研究项目（KJ130605）；重庆师范大学基金项目（13XLZ04）
作者简介：杨柳芳，女，硕士研究生，研究方向为微分方程与动力系统，Email：82915534@qq.com；**通讯作者**：张文萌，Email：mathzwm@sina.com

对该结论的严格证明直到 2007 年才由 Barreira 和 Valls 在文献[5]中给出。他们证明了 Hartman 线性化定理中共轭映射的 Hölder 指数 $\beta\in(0,\beta_0)$，其中 $\beta_0\in(0,1)$ 由线性部分的谱决定。此外，Tan 在文献[6]中证明了 $\mathbf{R}^n$ 中的一部分 $C^{1,1}$ 映射（C^1 且导函数满足李普希茨条件）能够被 $C^{0,\beta}$ 线性化（即(2)式成立），其中 $\beta\in(0,1)$ 可以任意接近于 1。因此，一个自然的问题是：对于光滑性介于 C^1 与 $C^{1,1}$ 之间的 $C^{1,\alpha}$ $(\alpha\in(0,1))$ 映射，其线性化又会有怎样的光滑度？这里，$C^{1,\alpha}$ 意味着映射 F 是 C^1 的，且其导函数具有 Hölder 连续性，即满足：

$$\|DF(x)-DF(y)\|\le L\|x-y\|^{\alpha},\quad \alpha\in(0,1)。$$

本文将针对二维 $C^{1,\alpha}$ 压缩映射 $F:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ 回答上述问题。具体地说，将讨论 F 线性部分（即 Λ）的特征值 $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbf{C}$ 满足 $0<|\lambda_1|\le|\lambda_2|<1$ 的情形。值得注意的是在该情形下，当

$$\alpha>\alpha_0:=1-\log|\lambda_1|/\log|\lambda_2|\in(0,1) \tag{3}$$

时，所有 $C^{1,\alpha}$ 映射都可以在不动点附近被 C^1 线性化[7]，这自然蕴含了局部 Hölder 线性化。又由文献[8]，知道当

$$0<|\lambda_1|<|\lambda_2|<1\text{ 且 }0<\alpha\le\alpha_0 \tag{4}$$

时存在反例，其在不动点的任何小邻域之内都不能被 C^1 线性化。因此，本文重点关注(4)情形下的 Hölder 线性化，估计其指数 β。通过利用含已知映射迭代的函数序列去逼近共轭方程的解，将证明当已知映射的光滑度介于 C^1 与 C^{1,α_0} 之间时，线性化的光滑度则介于 β_0 与 1 之间。

2 主要结果及证明

在 $\lambda_1\ne\lambda_2$ 的情形下，不失一般性，可以假设 $\Lambda:=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2)$。此外，记 $x:=(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2$，定义其范数 $\|\cdot\|$ 为 $\|x\|:=\max\{|x_1|,|x_2|\},\forall x\in\mathbf{R}^2$。则我们的主要定理如下：

定理 1 设 $F:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ 为一个 $C^{1,\alpha}$ 映射 $(\alpha\in(0,\alpha_0])$，且 $F(O)=O,DF(O)=\Lambda$。则在情形(4)下，存在原点 O 的邻域 $U\subset\mathbf{R}^2$ 和同胚映射 $\Phi:U\to\mathbf{R}^2$ 使得方程(1)成立，其中 Φ 在 U 上是 Hölder 连续的（即(2)式成立）且 Hölder 指数

$$\beta=\begin{cases}1-\varepsilon, & \text{当}\alpha=\alpha_0\text{时，}\\ (\alpha_0^{-1}-1)\alpha(1-\alpha)^{-1}, & \text{当}(\alpha_0^{-1}+1)^{-1}\le\alpha<\alpha_0\text{时，}\\ 1-\alpha_0, & \text{当}0<\alpha<(\alpha_0^{-1}+1)^{-1}\text{时，}\end{cases}\tag{5}$$

其中$\varepsilon>0$可以任意小。

为了证明定理 1，首先给出以下几个引理:

引理 1[8] 令映射F由定理 1 给出。则存在一个$C^{1,\alpha}$微分同胚$\Theta:U\to\mathbf{R}^2$，其中$\Theta(O)=O,\ D\Theta(O)=\mathrm{id}$（即恒等映射），使得$C^{1,\alpha}$映射$\tilde{F}:=\Theta\circ F\circ\Theta^{-1}$满足

$$\pi_1\tilde{F}(0,x_2)=0,\pi_2\tilde{F}(x)=\lambda_2x_2,\forall x_2\in U\cap\mathbf{R},\forall x\in U\text{。}\tag{6}$$

易知，上述引理中得到的映射$\tilde{F}$满足

$$\tilde{F}(O)=O,D\tilde{F}(O)=\varLambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2)\text{。}\tag{7}$$

引理 1 意味着只需要考虑新映射$\tilde{F}$。因为如果$\tilde{F}$能够被线性化，即存在$C^{0,\beta}$变换$\varPsi$使得$\varPsi\circ\tilde{F}=\varLambda\circ\varPsi$那么定理 1 中的$\varPhi$就可以被定义为$\varPhi:=\varPsi\circ\varTheta$。

引理 2[7] 设$\tilde{F}$由引理 1 给出。则不等式

$$\left\|\tilde{F}^n(x)\right\|\le K|\lambda_1|^n,\qquad\left\|D\tilde{F}^n(x)\right\|\le K|\lambda_2|^n,\qquad\forall x\in U,\forall n\in\mathbf{N},\tag{8}$$

成立，其中$K>0$为常数。

引理 3[9] 令$(Z,\|\cdot\|)$为 Banach 空间，$\varOmega\in Z$为原点的一个邻域。假设对于任意自然数$k\in\mathbf{N}$映射$P_k:\varOmega\to Z$是 Hölder 连续的，并且存在正数τ_1,τ_2使得

$$\|P_k(z)\|\le M\tau_1^{\,k},\qquad\|P_k(z)-P_k(\tilde{z})\|\le M\tau_2^{\,k}\|z-\tilde{z}\|^{\mu},\qquad\forall z,\tilde{z}\in\varOmega,\tag{9}$$

其中$\mu\in(0,1],M>0$为常数。如果存在常数$\rho>0$使得$\rho\tau_1<1,$则在原点附近有

$$\sum_{n=0}^{\infty}\rho^k\|P_k(z)-P_k(\tilde{z})\|\le L\|z-\tilde{z}\|^{\beta},\tag{10}$$

其中$L>0$为常数，且指数$\beta>0$有如下定义

$$\beta=\begin{cases}\mu, & \rho\tau_2<1,\\ \mu-\varepsilon, & \rho\tau_2=1,\\ (\log\tau_1+\log\rho)(\log\tau_1-\log\tau_2)^{-1}\mu, & \rho\tau_2>1,\end{cases}\tag{11}$$

其中$\varepsilon>0$可以任意小。

定理 1 的证明 首先，定义$\Psi:=\lim_{n\to\infty}\Lambda^{-n}\widetilde{F}^n$。 如果该极限存在，则可以验证

$$\Psi\circ\widetilde{F}=\lim_{n\to\infty}\Lambda^{-n}\widetilde{F}^{n+1}=\Lambda\lim_{n\to\infty}\Lambda^{-(n+1)}\widetilde{F}^{n+1}=\Lambda\circ\Psi,$$

即Ψ是满足线性化的共轭映射。为了研究Ψ的存在性及连续性，根据(6)式，令

$$D\widetilde{F}^n(x)=\begin{pmatrix} a_n(x) & b_n(x) \\ 0 & \lambda_2{}^n \end{pmatrix}，\ \forall n\in\mathbf{N}\cup\{0\},$$

其中$a_n(x):=\partial(\pi_1\widetilde{F}^n)/\partial x_1, b_n(x):=\partial(\pi_1\widetilde{F}^n)/\partial x_2$。显然，$a_n$和$b_n$为分别满足$a_n(O)=\lambda_1{}^n$和$b_n(O)=0$的$C^{0,\alpha}$函数。并且根据不等式$\left\|D\widetilde{F}(x)-\Lambda\right\|=\left\|D\widetilde{F}(x)-D\widetilde{F}(O)\right\|\le L\|x\|^\alpha$与

$$\left\|\widetilde{F}^i(x)\right\|\le\left\|D\widetilde{F}^i(x)\right\|\cdot\|x\|\le\prod_{j=0}^{i-1}\left\|D\widetilde{F}(\widetilde{F}^j(x))\right\|\le(|\lambda_2|+\delta)^i\qquad\forall i\in\mathbf{N},$$

其中$\delta>0$是一个使得$|\lambda_2+\delta|<1$的常数，有

$$\left\|D\widetilde{F}^n(x)\right\|\le\prod_{i=0}^{n-1}\left\|D\widetilde{F}(\widetilde{F}^i(x))\right\|\le\prod_{i=0}^{n-1}\left(\|\Lambda\|+L\left\|\widetilde{F}^i(x)\right\|^\alpha\right)\le\prod_{i=0}^{n-1}\left(|\lambda_2|+L\left(|\lambda_2|+\delta\right)^{i\alpha}\right)=$$

$$|\lambda_2|^n\prod_{i=0}^{n-1}\left(1+\frac{L}{|\lambda_2|}\left(|\lambda_2|+\delta\right)^{i\alpha}\right)\le K|\lambda_2|^n, \tag{12}$$

其中$K:=\prod_{i=0}^{\infty}\left(1+\frac{L}{|\lambda_2|}\left(|\lambda_2|+\delta\right)^{i\alpha}\right)\in(0,\infty)$。断言以下不等式成立：

$$|a_{n+1}(x)-\lambda_1a_n(x)|\le K_1\left(|\lambda_1||\lambda_2|^\alpha\right)^n,\qquad\forall x\in U, \tag{13}$$

其中$K_1>0$为常数。实际上，容易知道

$$D\widetilde{F}^n(x)=D\widetilde{F}\left(\widetilde{F}^{n-1}(x)\right)D\widetilde{F}^{n-1}(x)=$$

$$\begin{pmatrix} a_1\left(\widetilde{F}^{n-1}(x)\right) & b_1\left(\widetilde{F}^{n-1}(x)\right) \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{n-1}(x) & b_{n-1}(x) \\ 0 & \lambda_2{}^{n-1} \end{pmatrix}。 \tag{14}$$

因此，$a_n(x)=a_1\left(\widetilde{F}^{n-1}(x)\right)a_{n-1}(x)$。 于是通过归纳可以得到$a_n(x)=\prod_{i=0}^{n-1}a_1\left(\widetilde{F}^i(x)\right),\ \forall n\in\mathbf{N}$。又$\widetilde{F}$是$C^{1,\alpha}$的，则总存在常数$L>0$使得

$$\begin{aligned}|a_{n+1}(x)-\lambda_1a_n(x)|\le\left|a_1\left(\widetilde{F}^n(x)\right)-\lambda_1\right|\left|\prod_{i=0}^{n-1}\left|a_1\left(\widetilde{F}^i(x)\right)\right|\right|\le\left\|D\widetilde{F}\left(\widetilde{F}^n(x)\right)-\Lambda\right\|\left|\prod_{i=0}^{n-1}\left|a_1\left(\widetilde{F}^i(x)\right)\right|\right|\le \\ L\left\|\widetilde{F}^n(x)\right\|^\alpha\prod_{i=0}^{n-1}\left|a_1\left(\widetilde{F}^i(x)\right)\right|\le L\left\|D\widetilde{F}^n(x)\right\|^\alpha\prod_{i=0}^{n-1}\left|a_1\left(\widetilde{F}^i(x)\right)\right|\end{aligned} \tag{15}$$

另一方面，

$$\left|a_1(x)\right| = \left|\lambda_1 + \frac{\partial(\pi_1 F)(x)}{\partial x_1} - \frac{\partial(\pi_1 F)(O)}{\partial x_1}\right| \le \left|\lambda_1\right| + L\left\|x\right\|^{\alpha}, \tag{16}$$

结合(12)式与(15)～(16)式可得

$$\begin{aligned}\left|a_{n+1}(x)-\lambda_1 a_n(x)\right| &\le LK^{\alpha}\left|\lambda_2\right|^{n\alpha}\prod_{i=0}^{n-1}\left(\left|\lambda_1\right|+L\left(\left|\lambda_2\right|+\delta\right)^{i\alpha}\right)\le \\ LK^{\alpha}\left|\lambda_2\right|^{n\alpha}\left|\lambda_1\right|^{n}&\prod_{i=0}^{n-1}\left(1+\frac{L}{\left|\lambda_1\right|}\left(\left|\lambda_2\right|+\delta\right)^{i\alpha}\right)\le LK^{\alpha}M\left(\left|\lambda_1\right|\left|\lambda_2\right|^{\alpha}\right)^{n},\end{aligned} \tag{17}$$

其中

$$M := \prod_{i=0}^{\infty}\left(1+\frac{L}{\left|\lambda_1\right|}\left(\left|\lambda_2\right|+\delta\right)^{i\alpha}\right) \in (0,\infty) 。 \tag{18}$$

结合(17)和(18)式可以证明(13)式。对于 $b_n(x)$ 的估计，由文献[7]中(2.15)式之下的公式可知

$$\left|b_{n+1}(x)-\lambda_1 b_n(x)\right| \le K_1 \max\left\{\left(\left|\lambda_1\right|\left|\lambda_2\right|^{\alpha}\right)^n, \left(\left|\lambda_1\right|^{\alpha}\left|\lambda_2\right|\right)^n\right\} = K_1\left(\left|\lambda_1\right|^{\alpha}\left|\lambda_2\right|\right)^n, \quad \forall x \in U, \tag{19}$$

因为 $\alpha \le \alpha_0$。

上述(13)式说明函数列 $\left(\lambda_1^{-n}a_n(x)\right)_{n\in\mathbf{N}}$ 在 U 上是一致收敛的，因为

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_1^{-n}a_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\lambda_1^{-(n+1)}a_{n+1}(x)-\lambda_1^{-n}a_n(x)\right\}+a_0(x) 。$$

由此，可以定义连续函数 $\varphi: U \to \mathbf{R}$ 为

$$\varphi(x) := \lim_{n\to\infty}\lambda_1^{-n}a_n(x), \quad \forall x \in U,$$

其中 $\varphi(O)=1$。

另一方面，由(6)式递推可得 $\pi_1\tilde{F}^n(0,x_2)=0,\ \forall n\in\mathbf{N}, \forall x_2 \in U\cap\mathbf{R}$。综上有

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_1^{-n}\pi_1\tilde{F}^n(x) = \lim_{n\to\infty}\int_0^{x_1}\lambda_1^{-n}a_1(t,x_2)\mathrm{d}t = \int_0^{x_1}\phi(t,x_2)\mathrm{d}t 。$$

这就意味着

$$\Psi(x) = \lim_{n\to\infty}\Lambda^{-n}\tilde{F}^n(x) = \left(\lim_{n\to\infty}\lambda_1^{-n}\pi_1\tilde{F}^n(x), x_2\right) = \left(\int_0^{x_1}\phi(t,x_2)\mathrm{d}t, x_2\right), \quad \forall x \in U, \tag{20}$$

其中 π_1 为到 x_1 轴的投影，且 Ψ 可以被证明是一个同胚映射[8]。

最后证明极限 $\Psi(x)=\lim_{n\to\infty}\Lambda^{-n}\tilde{F}^n(x)$ 的 Hölder 连续性。注意到对任意 $x, y \in U$ 有

$$\left|\lim_{n\to\infty}\lambda_1^{-n}\pi_1\widetilde{F}^{n}(x)-\lim_{n\to\infty}\lambda_1^{-n}\pi_1\widetilde{F}^{n}(y)\right|\le$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\left\{\lambda_1^{-(n+1)}\pi_1\widetilde{F}^{n+1}(x)-\lambda_1^{-n}\pi_1\widetilde{F}^{n}(x)\right\}-\left\{\lambda_1^{-(n+1)}\pi_1\widetilde{F}^{n+1}(y)-\lambda_1^{-n}\pi_1\widetilde{F}^{n}(y)\right\}\right|+\left|x_1-y_1\right|。\tag{21}$$

由引理 3, 可以设

$$\rho:=\frac{1}{|\lambda_1|},\qquad P_n(x):=\pi_1\widetilde{F}^{n+1}(x)-\lambda_1\pi_1\widetilde{F}^{n}(x)。$$

那么根据(6)式中的第一个式子和(13)式有

$$\left|P_n(x)\right|=\left|\pi_1\widetilde{F}^{n+1}(x)-\lambda_1\pi_1\widetilde{F}^{n}(x)\right|\le\left|\left\{\pi_1\widetilde{F}^{n+1}(x)-\lambda_1\pi_1\widetilde{F}^{n}(x)\right\}-\left\{\pi_1\widetilde{F}^{n+1}(0,x_2)-\lambda_1\pi_1\widetilde{F}^{n}(0,x_2)\right\}\right|\le$$
$$\sup_{\xi\in U}\left|\frac{\partial\left(\pi_1\widetilde{F}^{n+1}\right)(\xi)}{\partial x_1}-\lambda_1\frac{\partial\left(\pi_1\widetilde{F}^{n}\right)(\xi)}{\partial x_1}\right|\cdot\left|x_1\right|\le\sup_{\xi\in U}\left|a_{n+1}(\xi)-\lambda_1a_n(\xi)\right|\le M_1\left(\left|\lambda_1\right|\left|\lambda_2\right|^{\alpha}\right)^n,\tag{22}$$

其中 $M_1>0$ 为常数。注意上式中的第 2 个不等式由微分中值定理可得。根据引理 2 及(19)式有

$$\left|P_n(x)-P_n(y)\right|\le\left|\left\{\pi_1\widetilde{F}^{n+1}(x)-\lambda_1\pi_1\widetilde{F}^{n}(x)\right\}-\left\{\pi_1\widetilde{F}^{n+1}(y)-\lambda_1\pi_1\widetilde{F}^{n}(y)\right\}\right|\le$$
$$\sup_{\eta\in U}\left\|D\left(\pi_1\widetilde{F}^{n+1}\right)(\eta)-\lambda_1D\left(\pi_1\widetilde{F}^{n}\right)(\eta)\right\|\cdot\left\|x-y\right\|\le\tag{23}$$
$$\sup_{\eta\in U}\max\left\{\left|a_{n+1}(\eta)-\lambda_1a_n(\eta)\right|,\left|b_{n+1}(\eta)-\lambda_1b_n(\eta)\right|\right\}\left\|x-y\right\|\le M_1\left(\left|\lambda_1\right|^{\alpha}\left|\lambda_2\right|\right)^n\left\|x-y\right\|。$$

比较引理 3 中的条件(9)式与(22)和(23)式，令

$$\tau_1:=\left|\lambda_1\right|\left|\lambda_2\right|^{\alpha},\qquad\tau_2:=\left|\lambda_1\right|^{\alpha}\left|\lambda_2\right|,\qquad\mu:=1。$$

显然，$\rho\tau_1=\left|\lambda_2\right|^{\alpha}<1$ 且由 α_0 的定义(3)计算可得

$$\rho\tau_2=\left|\lambda_1\right|^{\alpha-1}\left|\lambda_2\right|\begin{cases}=1, & 当\alpha=\alpha_0时,\\ >1, & 当\alpha<\alpha_0时。\end{cases}$$

那么根据(10)和(11)式，得到

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\left\{\lambda_1^{-(n+1)}\pi_1\widetilde{F}^{n+1}(x)-\lambda_1^{-n}\pi_1\widetilde{F}^{n}(x)\right\}-\left\{\lambda_1^{-(n+1)}\pi_1\widetilde{F}^{n+1}(y)-\lambda_1^{-n}\pi_1\widetilde{F}^{n}(y)\right\}\right|=$$
$$\left|\lambda_1\right|^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n\left|P_n(x)-P_n(y)\right|\le\begin{cases}L\left\|x-y\right\|^{1-\varepsilon}, & 当\alpha=\alpha_0时,\\ L\left\|x-y\right\|^{\left(\alpha_0^{-1}-1\right)\alpha(1-\alpha)^{-1}}, & 当\alpha<\alpha_0时,\end{cases}\tag{24}$$

其中 $\varepsilon>0$ 可以任意小。最后，结合(20)、(21)和(24)式则有

$$\beta=\begin{cases}1-\varepsilon, & 当\alpha=\alpha_0时,\\ (\alpha_0^{-1}-1)\alpha(1-\alpha)^{-1}, & 当0<\alpha<\alpha_0时。\end{cases}$$

通过直接的计算可以知道，当$\alpha<\alpha_0$时，上述β是α的递增函数，且满足

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0^-}\beta(\alpha)=1,\qquad \beta\left((\alpha_0^{-1}+1)^{-1}\right)=1-\alpha_0,\qquad \lim_{\alpha\to\alpha_0^+}\beta(\alpha)=0\text{。}$$

另一方面，由文献[5]中定理 1，本文第一节中提到的指数$\beta_0=1-\alpha_0\in(0,1)$。

综上所述，得到以下结论：

$$\beta=\begin{cases}1-\varepsilon, & \text{当}\alpha=\alpha_0\text{时，}\\ (\alpha_0^{-1}-1)\alpha(1-\alpha)^{-1}, & \text{当}(\alpha_0^{-1}+1)^{-1}\le\alpha<\alpha_0\text{时，}\\ 1-\alpha_0, & \text{当}0<\alpha<(\alpha_0^{-1}+1)^{-1}\text{时,}\end{cases}$$

即(5)式得证，从而定理证毕。 证毕

参考文献：

[1] P. Hartman. Ordinary Differential Equations[M]. New York: John Wiley & Sons, 1964.

[2] R. Iturriaga, H. Sachez-Morgado, Hyperbolicity and exponential convergence of the Lax-Oleinik semigroup[J]. J. Differential Equations,2009,246 :1744-1753.

[3] K. Wang, J. Yan. The rate of convergence of new Lax-Oleinik type operators for time-periodic positive definite Lagrangian systems[J]. Nonlinearity, 2012, 25:2039-2057.

[4] S. Strien. Smooth linearization of hyperbolic fixed points without resonance conditions[J]. J. Differential Equations, 1990,85: 66-90.

[5] L. Barreira,C. Valls. Hölder Grobman-Hartman linearization [J]. Discrete Contin. Dyn. Syst., 2007,18:187-197.

[6] B. Tan, σ-Hölder continuous linearization near hyperbolic fixed points in $\mathbf{R}^n$ [J]. J. Differential Equations,2000,162: 251-269.

[7] W. M. Zhang, W. N. Zhang. C^1 linearization for planar contractions[J]. J. Funct. Anal, 2011,260:2043-2063.

[8] W. M. Zhang, W. N. Zhang. Sharpness for C^1 linearization of planar hyperbolic diffeomorphisms[J]. J. Differential Equations,2014,257:4470-4502.

[9] W. M. Zhang, W. N. Zhang, W. Jarczyk. Sharp regularity of linearization for $C^{1,1}$ hyperbolic diffeomophisms [J]. Math.Ann,2014, 358:69-113.

Hölder Linearization for Planar Contractions

YANG Liufang, ZHANG Wenmeng

(College of Mathematics Science, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: The Hartman linearization theorem says that a hyperbolic diffeomorphism can be topologically conjugated to its linear part near a fixed point. In order to preserve more dynamical properties in the process of linearization, one would expect that the conjugacy is at least Hölder continuous. For C^1 and $C^{1,1}$ maps, the estimates for the Hölder exponents have been given respectively. A natural question arises: What do we have for $C^{1,\alpha}$ ($\alpha \in (0,1)$) maps? By employing sequences involving iteration of the given maps to approximate solutions of the conjugacy equation, we prove locally Hölder linearization for planar $C^{1,\alpha}$ contractions so as to extend the previous results. Our strategy is to first transform the limit in the above-mentioned approximation into series of functions. Then, by estimating the convergence rate of the iteration, we show the uniform convergence of the series and compute the Hölder exponent.

Key words: planar contractions; linearization; Hölder continuous