正规族与分担集合

李运通[1]，刘芝秀[2]

(1.陕西铁路工程职业技术学院 基础课部，陕西 渭南 714000；2. 南昌工程学院 理学院，南昌 330099)

摘要：主要证明了涉及分担集合的亚纯函数的正规定则。已有文献证明了在亚纯函数函数族中，若任意函数的零点为 $k+1$ 重，且任意两个函数的 k 阶导数分担一个二值集合，则该函数族正规。利用 Zalcman-Pang 方法，证明了 $k=0$ 的情况。设 a,b,c 为 3 个互不相同的有限复数，$S=\{a,b\}$，h 为有穷正数，F 是区域 D 内的一族亚纯函数，若满足：1）对于 F 中任意的两个函数 f,g，f,g 在 D 内分担集合 $\{a,b\}$；2）对于 F 中任意的函数 f，$f=c\Rightarrow\left|f'\right|\le h$，则 F 在 D 内正规。并举例说明定理的条件 2）不可以去掉。

关键词：正规族；亚纯函数；分担集合.

中图分类号：O174.52

1 主要结果

设区域 D 为定义在复平面 **C** 上的区域，F 为区域 D 内一族亚纯函数。如果从这个族中每一个函数序列 $\left\{f_n(z)\right\}$ (n=1,2,…)均可以选出一个子序列 $f_{n_k}(z)$ (k=1,2,…)在区域 D 上按球面距离一致收敛为一个亚纯函数或者恒为无穷，则称族 $\{f(z)\}$ 在区域 D 上正规。

设 f 与 g 为平面区域 D 上两个非常数的亚纯函数，a 为有穷复数，定义

$$\overline{E_f}(a)=\{z\in D: f(z)=a\}。$$

称 f 与 g 以 a 为 IM 公共值，是指 $f-a$ 与 $g-a$ 的零点相同，记作 $\overline{E_f}(a)=\overline{E_g}(a)$ [1-2]。

在 1992 年，W.Schwick [3]最先把分担值与正规族联系起来，并证明了定理 A。

定理 A 设 F 为单位圆盘 Δ 上的亚纯函数族，a_1，a_2，a_3 为 3 个互为判别的有穷复数。如果任意的 $f\in F$，a_1，a_2，a_3 为 f 和 f' 在 Δ 上的 IM 分担值，则 F 在 Δ 上正规。

1994 年，孙道椿[4]证明了定理 B。

定理 B 设 a,b,c 为 3 个互不相同的扩充平面上的复数，F 是区域 D 内的一族亚纯函数，对于 F 中任意的两个函数 f,g，f,g 在 D 内分担 a,b,c，则 F 在 D 内正规。

在文献[5]中，方明亮和洪伟进一步推广了上述结论，结果如下。

----

* **收稿日期：**2013-12-23　　**修回日期：**2014-1-8
资助项目：陕西铁路工程职业技术学院基金项目(No.2013-12),南昌工程学院青年基金项目(No.2014KJ025)
作者简介：李运通，男，讲师，研究方向为复分析，Email：liyuntong2005@163.com

定理 C 设 a,b,c 为 3 个互不相同的扩充平面上的复数，F 是区域 D 内的一族亚纯函数，对于 F 中任意的两个函数 f,g， f,g 在 D 内分担集合 $S=\{a,b,c\}$，则 F 在 D 内正规。

2004 年，方明亮和 Zalcman [6] 证明了下述结果。

定理 D 设 k 为正整数， $a\neq 0$ 为一有限常数， F 为区域 D 上的亚纯函数族，如果对任意的 $f,g\in F$，有 f 和 g 在 D 上 IM 分担 0， $f^{(k)}$ 和 $g^{(k)}$ 在 D 上 IM 分担 a，且对任意的 $f\in F$ 的零点重级至少为 $k+2$，则 F 在 D 上正规。

最近，方明亮和 Zalcman [7]证明了下述结果.

定理 E 设 k 为正整数， a,b 为两个互不相同的有限复数， F 是区域 D 内的一族亚纯函数，所有零点至少为 $k+1$ 重，若对于 F 中任意的两个函数 f,g， $f^{(k)}$ 和 $g^{(k)}$ 在 D 内分担集合 $S=\{a,b\}$，则 F 在 D 内正规。

那么，当 $k=0$ 时，定理 C 是否依然成立？本文证明了下述结论。

定理 1 设 a,b,c 为 3 个互不相同的有限复数，$S=\{a,b\}$， h 为有穷正数， F 是区域 D 内的一族亚纯函数，若满足：1）对于 F 中任意的两个函数 f,g， f,g 在 D 内分担集合 $\{a,b\}$；2）对于 F 中任意的函数 f， $f=c\Rightarrow\left|f'\right|\leq h$，则 F 在 D 内正规。

下面例子说明条件 2)： $f=c\Rightarrow\left|f'\right|\leq h$ 是不能省略的，以及条件 a,b,c 为 3 个互不相同的有限复数也是必要的。

例 设 $F=\{f_n\}=\{\frac{1}{e^{nz}-1}\}$，则 $f_n\neq 0,1$ ，所以对于 F 中任意的两个函数 f,g， f,g 在 D 内分担集合 $\{0,1\}$；而 $\frac{\left|f_n'(0)\right|}{1+\left|f_n(0)\right|^2}=n\to\infty$，显然 F 在单位圆盘上不正规。

2 引理

引理 1[8] (Zalcman 引理)设 F 为单位圆盘 Δ 上的亚纯函数族，对任意的 $f\in F$， f 的所有零点重数 $\geq l$， f 的所有极点重数 $\geq j$。设 α 为任一实数满足 $-j<\alpha<l$，则 F 在 $z_0\in\Delta$ 的任一领域内不正规的充要条件是存在：1） 函数列 $f_k\in F$；2） 复数列 $z_k\to z_0$， $z_k\in\Delta$；3） 正数列 $\rho_k\to 0$，使得 $\rho_k^{-\alpha}f_k(z_k+\rho_k\xi)$ 在复平面 C 上内闭一致收敛于非常数的亚纯函数 $g(\xi)$，且 $g(\xi)$ 的级至多为 2，且它的零点(极点)重数 $\geq l(j)$ 。

3 定理 1 的证明

若F在D内不正规，则至少存在一点z_0，使得F在z_0点不正规。以下分两种情形。

情形 1，若 $f(z_0)\neq a,b$，则存在圆盘$\Delta(z_0,\delta)=\{z:|z-z_0|<\delta\}$使得在$\Delta(z_0,\delta)$内 $f(z)\neq a,b$。由 Zalcman 引理可得：1）存在函数列 $f_n\in F$；2）正数r和点列$z_n\to z_0$，$|z_n|<r$；3）正数列$\rho_n\to 0^+$，使得

$$g_n(\xi)=f_n(z_n+\rho_n\xi)-c\to g(\xi)。$$

按球面距离内闭一致收敛，其中$g(\xi)$为一非常数亚纯函数，满足$g^{\#}(\xi)\le g^{\#}(0)=1$。可以断言$g(\xi)\neq a-c,b-c$。事实上，若$g(\xi_0)=a-c$，利用 Hurwitz 定理可知，存在点列$\xi_n,\xi_n\to\xi_0$，使得当$n$足够大时，可得$a-c=g_n(\xi_n)=f_n(z_n+\rho_n\xi_n)-c$，通过简单计算有$f_n(z_n+\rho_n\xi_n)=a$，这与$f(z)\neq a,b$矛盾。同理有：$g(\xi)\neq b-c$。可以断言$g(\xi)$的零点均为重级零点，若$g(\xi)\neq 0$，则有 Picard 定理可得，$g(\xi)$为常数，矛盾；设$g(\xi_0)=0$，由于$g(\xi)\not\equiv 0$，那么由 Hurwitz 定理，存在$\xi_n,\xi_n\to\xi_0$，当$n$充分大时，有$0=g_n(\xi_n)=f_n(z_n+\rho_n\xi_n)-c$，从而得$f_n(z_n+\rho_n\xi_n)=c$。由定理条件有$\left|f_n'(z_n+\rho_n\xi_n)\right|\le h$，从而

$$g'(\xi_0)=\lim_{n\to\infty}\rho_n f_n'(z_n+\rho_n\xi)=0$$

因此$g(\xi)$的零点均为重级零点。

对$g(\xi)$应用 Nevanlinna 第一和第二基本定理得

$$T(r,g)\le \bar{N}(r,\frac{1}{g})+\bar{N}(r,\frac{1}{g-(a-c)})+\bar{N}(r,\frac{1}{g-(b-c)})+S(r,g)\le$$
$$\frac{1}{2}N(r,\frac{1}{g})+S(r,g)\le\frac{1}{2}T(r,g)+S(r,g)$$

所以$T(r,g)\le S(r,g)$，即$g(\xi)$为常数，矛盾。

情形 2，若 $f(z_0)=a$或b，不妨设则存在圆盘$\Delta^o(z_0,\delta)=\{z:0<|z-z_0|<\delta\}$使得在$\Delta^o(z_0,\delta)$内 $f(z)\neq a,b$。不失一般性，假设$\{f_n\}$为函数族F中的函数列使得$f_n(z_0)=a$由 Zalcman 引理可得：1）存在函数列$f_n\in F$；2）正数r和点列$z_n\to z_0$，$|z_n|<r$；3）正数列$\rho_n\to 0^+$，使得

$$g_n(\xi)=f_n(z_n+\rho_n\xi)-c\to g(\xi)。$$

按球面距离内闭一致收敛，其中 $g(\xi)$ 为一非常数亚纯函数，满足 $g^{\#}(\xi)\le g^{\#}(0)=1$。类似情形 1 同样的方法可以证明：$g(\xi)\ne b-c$，并且 $g(\xi)$ 的零点重数均 ≥ 2。我们断言 $g(\xi)-(a-c)$ 只有一个零点。若 $g(\xi)\ne(a-c)$，和情形 1 同理可得 $g(\xi)$ 为常数，矛盾。

假设至少存在两个不同的零点 ξ_0 和 ξ_0^*，则存在 δ' 使得 $D(\xi_0,\delta')\bigcap D(\xi_0^*,\delta')=\varnothing$，其中 $D(\xi_0,\delta')=\{\xi:\left|\xi-\xi_0\right|<\delta'\}$ 和 $D(\xi_0^*,\delta')=\{\xi:\left|\xi-\xi_0^*\right|<\delta'\}$。由 Hurwitz 定理，存在点列 $\xi_n\in D(\xi_0,\delta')$ 和 $\xi_n^*\in D(\xi_n^*,\delta')$，使得对于充分大的 n 有：

$$g_n(\xi_n)-(a-c)=f_n(z_n+\rho_n\xi_n)-a=0.$$

$$g_n(\xi_n^*)-(a-c)=f_n(z_n+\rho_n\xi_n^*)-a=0.$$

由假设可知，对于任意的 n，$f_n(z)-a$ 只有一个零点 z_0，所以

$$z_n+\rho_n\xi_n=z_0,\quad z_n+\rho_n\xi_n^*=z_0$$

因此

$$\xi_n=\frac{z_0-z_n}{\rho_n},\quad \xi_n^*=\frac{z_0-z_n}{\rho_n}$$

这与 $\xi_n\in D(\xi_0,\delta')$ 和 $\xi_n^*\in D(\xi_n^*,\delta')$，以及 $D(\xi_0,\delta')\bigcap D(\xi_0^*,\delta')=\varnothing$ 相矛盾，因此 $g(\xi)-(a-c)$ 只有一个零点。

情形 2.1，假设 $g(\xi)$ 为超越亚纯函数，则 $O(\log r)=S(r,g)$，对 $g(\xi)$ 应用 Nevanlinna 第一和第二基本定理得

$$T(r,g)\le\bar{N}(r,\frac{1}{g})+\bar{N}(r,\frac{1}{g-(a-c)})+\bar{N}(r,\frac{1}{g-(b-c)})+S(r,g)\le$$
$$\frac{1}{2}N(r,\frac{1}{g})+O(\log r)+S(r,g)\le\frac{1}{2}T(r,g)+S(r,g)$$

所以 $T(r,g)\le S(r,g)$，即 $g(\xi)$ 为常数，矛盾。

情形 2.2，假设 $g(\xi)$ 为有理函数。由 $g(\xi)\ne b-c$，可知

$$g(\xi)=(b-c)+\frac{1}{p(\xi)}=\frac{1+(b-c)p(\xi)}{p(\xi)}\tag{1}$$

其中 $p(\xi)$ 为多项式函数。

又因为$g(\xi)-(a-c)$只有一个零点，所以可得：

$$g(\xi)-(a-c)=(b-a)+\frac{1}{p(\xi)}=\frac{1+(b-a)p(\xi)}{p(\xi)}=\frac{A(\xi-\alpha)^n}{p(\xi)} \qquad （2）$$

其中A为非零常数。

又因为$g(\xi)$的零点均为重级零点，由（1）可得，$p(\xi)$的次数≥ 2，结合（2）可得，$n\geq 2$。

由（2）式可知：$1+(b-a)p(\xi)=A(\xi-\alpha)^n$，所以$p'(\xi)=\dfrac{An(\xi-\alpha)^{n-1}}{b-a}$，即$p'(\xi)$只有一个零点$\alpha$。

由（1）式可知：$1+(b-c)p(\xi)$的零点均为重级零点，且$(1+(b-c)p(\xi))'=(b-c)p'(\xi)$只有一个零点$\alpha$，所以$1+(b-c)p(\xi)=B(\xi-\alpha)^n$（$B\neq 0$），结合（1）可得：$g(\alpha)=0$。这与（2）式中$g(\alpha)=a-c\neq 0$相矛盾。 证毕

定理得证。

参考文献:

[1] Schiff J.Normal Families[M].Berlin: Springer-Verlag,1993.

[2] Gu Y X,Pang X C, Fang M L. Normal families and its application[M].Beijing: Science Press, 2007.

[3] Schwick W.Sharing values and normality[J]. Arch Math,1992,59(2):50-54.

[4] Sun D C.The shared value criterion for normality[J]. J.Wuhan Univ.Natur.Sci.,1994, 3:9-12.

[5] Fang M L,Hong W.Some results on normal family of meromorphic functions[J].Bull Malays Math Sci Soc,2000, 23(2):143-151.

[6] Fang M L,Zalcman L.A note on normality and shared values[J].J.Aust.Math.Soc.2004,76(1):141-150.

[7] Fang M L,Zalcman L. Normality and shared sets[J].J.Aust.Math.Soc.2009,86(3):339-354

[8] Zalcman L.Normal families: New perspectives[J]. Bull.Amer.Math.1998,35 (3),215-230.

Normality and Shared Set

LI Yuntong[1], LIU Zhixiu[2]

(1.Department of Basic course, Shaanxi Railway Institute, Weinan Shaanxi 714000;

2. College of Science, Nanchang Institute of Technology, Nanchang 330099, China)

Abstract: In this paper, the author prove a normality criterion for a family of meromorphic functions involving set sharing. Some papers proved: Let F be a family of meromorphic functions defined in D, all of whose zeros have multiplicity at least $k+1$. If, for each pair of functions f and g in F, $f^{(k)}$ and $g^{(k)}$ share the set $\{a,b\}$, then F is normal in D. The author using the Zalcman—Pang's method prvove the case for $k=0$. Let a,b and c be three distinct complex number, h be a positive number. Let F be a family of meromorphic functions defined in D. If (1) for each pair of functions f and g in F, f and g share the set $\{a,b\}$; (2) for each function f and g in F, $f=c \Rightarrow |f'| \le h$, then F is normal in D.

Keywords：normal family; meromorphic function; shared set.