非线性椭圆问题的紧致差分格式及瀑布两网格法

李　明，赵金娥

（红河学院 数学学院，云南 蒙自 661199）

摘要：许多科学工程问题可归结为求解非线性椭圆问题,讨论二维非线性椭圆问题的离散格式及其数值解法。首先，将泊松方程的四阶紧致差分格式推广至二维非线性椭圆问题,提出了紧致差分(CFD)格式，基于CFD格式,选取合适的步长，形成粗网格层和细网格层。在粗网格层上，使用牛顿法求得对应的非线性方程的高精度数值解；在细网格层上，运用插值算子将粗网格上的数值解进行插值，得到细层上较好的初始值，并再次使用牛顿法进行求解,提出了 CFD 格式下的瀑布两网格(CTG)法。数值实验表明提出的 CFD 格式具有四阶计算精度，CTG 法迭代步数少、计算时间短.

关键词：非线性椭圆问题；　紧致差分格式;瀑布两网格法

中国分类号：O241.6　　　**文献标志码：**　A　　　**文章编号：**

有限差分法是求解偏微分方程(PDE)的一类常见的离散方法。为了提高有限差分法的精度，文献[1-5]提出了求解泊松方程的高精度差分格式。文献[6-7]给出了对流扩散方程的高阶差分格式。文献[8]讨论了 Navier-Stokes 方程组的高精度紧致差分格式。

多重网格(MG)法是快速求解 PDE 离散化方程组常用的一类数值算法。其中，瀑布型多重网格(CMG)法只需要插值和磨光，算法简洁高效，成为 MG 法研究领域的热点之一。CMG 法于上世纪 90 年初，由 Bornemann F, Deufhard P 等人提出(见文献[9])。文献[10]中大量的数值实验表明 CMG 法非常有效。石钟慈、许学军对 CMG 法进行理论分析[11−15]。李郴良提出使用高效的插值算子，有助于加快 CMG 法的收敛速度[16]。许进超提出了求解非线性椭圆问题的两网格法[17]。Timmermann、黄云清、周叔子等人进一步研究了求解非线性椭圆问题的 CMG 法[18−25]。

为了进一步发展非线性椭圆方程的离散格式和 CMG 法。我们在文献[1]的基础上，提出了离散一类二维非线性椭圆问题的紧致差分(CFD)格式。基于该离散格式，结合文献[16,25]的思想，提出了瀑布两网格(CTG)法。数值结果表明，CFD 格式计算精度为四阶。CTG 法无需使用中间网格层，计算量少、计算时间短、稳健性强。

1 模型问题及差分格式

考虑如下二维非线性椭圆问题

$$\begin{cases} -\Delta u(x,y)=f(x,y,u), & \text{in } \Omega \\ u(x,y)=0, & \text{on } \partial\Omega \end{cases}, \tag{1}$$

其中，$u(x,y)$ 为待求的足够光滑的函数，源函数 $f(x,y,u)$ 是以 x , y , u 为自变量的已知连续函数，Ω 为二维凸多边形区域。

收稿日期：2014-01-04　　修回日期：2014-02-24
资助项目：国家自然科学基金(No.11161014);云南省科技厅青年项目(No.2012FD054)
作者简介：李明，男，讲师，研究方向为偏微分方程数值解，E-mail:lm-001@126.com;

当 $f(x,y,u)=k^2(u)u$ 时(k 为与 u 有关的参数)，方程(1)为非线性 Helmholtz 方程；当 $f(x,y,u)=-u^p$ 时，方程(1)是天体物理学中的 Lane-Emden 方程；当 $f(x,y,u)=4u^3$ 时，即为化学反应中的 Arrhenius 源项。若源函数 $f(x,y,u)$ 与 u 无关，则方程(1)是泊松方程。因此方程(1)的数值解法在科学工程计算领域中有着重要的应用价值和研究意义。

不妨取 Ω 为矩形区域 $[0,L_x]\times[0,L_y]$ 。将 $[0,L_x]$ 均分成 n_x 等份，即 $\Delta x=L_x/n_x$ ，类似地，将 $[0,L_y]$ 分成 n_y 等份，$\Delta y=L_y/n_y$ ，取 $r=\Delta x/\Delta y$ 。网格点 (x_i,y_j) 对应于 $x_i=i\Delta x$ ，$y_j=j\Delta y$ ，$0\le i\le n_x$ ，$0\le j\le n_y$ 。约定下标 (i,j) 对应于网格点 (x_i,y_j) 。

文献[1]针对二维泊松方程

$$-\Delta\bar{u}(x,y)=\bar{f}(x,y)，\quad (x,y)\in[0,L_x]\times[0,L_y]$$

基于上述网格剖分，提出了四阶紧致差分格式

$$-\frac{1+r^2}{2}[\bar{u}_{i-1,j-1}+\bar{u}_{i-1,j+1}+\bar{u}_{i+1,j-1}+\bar{u}_{i+1,j+1}]-(5r^2-1)[\bar{u}_{i,j-1}+u_{i,j+1}]-$$
$$(5-r^2)[\bar{u}_{i-1,j}+\bar{u}_{i+1,j}]+10(1+r^2)\bar{u}_{i,j}=\frac{\Delta x^2}{2}[8\bar{f}_{i,j}+\bar{f}_{i-1,j}+\bar{f}_{i+1,j}+\bar{f}_{i,j-1}+\bar{f}_{i,j+1}]。\qquad (2)$$

在文献[1]的基础上,使用 $f(x,y,u)$ 代替 $\bar{f}(x,y)$ ，提出问题(1)的紧致差分(CFD)格式

$$\begin{aligned}&-\frac{1+r^2}{2}[u_{i-1,j-1}+u_{i-1,j+1}+u_{i+1,j-1}+u_{i+1,j+1}]-(5r^2-1)[u_{i,j-1}+u_{i,j+1}]\\&-(5-r^2)[u_{i-1,j}+u_{i+1,j}]+10(1+r^2)u_{i,j}=\frac{\Delta x^2}{2}[8f(x_i,y_j,u_{i,j})+f(x_{i-1},y_j,u_{i-1,j})+\\&\qquad f(x_{i+1},y_j,u_{i+1,j})+f(x_i,y_{j-1},u_{i,j-1})+f(x_i,y_{j+1},u_{i,j+1})],\end{aligned}\qquad (3)$$

结合问题(1)的边界条件，由(3)式可得非线性方程组 $F(x,y,u)=0$ 。选取一系列步长 $h_l=h_0/2^l$ ，$l=0,1,\cdots,M$ ，为方便起见，取 $h_l=\Delta x_l=\Delta y_l$ ，即 $r=1$ ，由(3)式离散问题(1)可得一系列对应的网格层 Z_l 和非线性方程组

$$F_l(x,y,u)=0，\quad l=0,1,\cdots,M, \qquad (4)$$

其中，下标 l 对应于步长 h_l 。

2 牛顿法及瀑布型多重网格法

牛顿法是求解非线性方程 $F(u)=0$ 常用的一类方法，当迭代解足够靠近问题真解时，具有二阶的收敛速度。其算法流程如下

算法 1　牛顿(Newton)法

步骤 1　给定初始值 u^0 及误差限 ε_1，ε_2，置 $k:=0$；

步骤 2　置 $b^k:=F(u^k)$，若 $\|b^k\|\le\varepsilon_1$，转步骤 6，否则，转步骤 3;

步骤 3　计算 $F(u^k)$ 的 Jacobi 矩阵 $F'(u^k)$，记 $A^k:=F'(u^k)$，转步骤 4;

步骤 4　解线性方程组 $A^k\Diamond u^k=-b^k$ 得 $\Diamond u^k$，　并置 $u^{k+1}:=u^k+\Diamond u^k$，转步骤 5;

步骤 5　若 $\|\Diamond u^k\|\le\varepsilon_2$，转步骤 6，否则，置 $k:=k+1$，$u^k:=u^{k+1}$，转步骤 2;

步骤 6　停止，输出有关数据.

注：取 $\varepsilon_1=\varepsilon_2=10^{-8}$

初始值 u^0 的选取，将直接影响牛顿法的迭代次数和计算时间。为了给出一个较好的初始值，以实现问题的更快求解，人们发展了 CMG 法(详见文献[18-24])。该类算法的基本思想是，首先求解粗层网格上的高精度近似解，接着，使用插值算子(通常取线性插值)为相邻的细层网格提供初始值，再在该层上使用牛顿法进行求解，直至最细层网格。CMG 法流程如下。

算法 2　CMG 法

步骤 1　使用 k_0 次牛顿法求解 $F_0(x,y,u)=0$ 的近似解 u_0^*，置 $l:=1$，转步骤 2;

步骤 2　使用插值算子将 u_{l-1}^* 插值到相邻细层网格 Z_l 上，得 u_l^0，转步骤 3;

步骤 3　以 u_l^0 为初始值，使用 k_l 次牛顿法求解 $F_l(x,y,u)=0$ 得 u_l^*，转步骤 4;

步骤 4　若 $l<M$，置 $l:=l+1$，转步骤 2，否则输出 u_M^*。

其中，步骤 2 中插值算子通常使用线性插值算子。

3 瀑布两网格法

在通常的 CMG 法中，需要使用多个中间网格层，用于将粗层上的解，逐层“传递”到最细层。为了节省中间网格层上的计算量，李郴良在文献[16]中提出求解线性椭圆问题的瀑布两网格法，即只使用最粗层网格和最细层网格，使用二次插值算子将最粗层上的解插值到最细网格层。文献[25]将这一思想推广到非线性椭圆问题。借鉴文献[16,25]的思想，我们提出 CFD 格式下瀑布两网格(CTG)法，其基本思想为：使用插值算子 I_3 将最粗网格层 Z_0 上的高精度近似解 u_0^*，插值到最细层网格 Z_M 上，得到 Z_M 上初始值 u_M^0，接着使用牛顿法求解 $F_M(x,y,u)=0$。算法流程如下

算法 3　CTG 法

步骤 1. 使用 k_0 次牛顿法求解 $F_0(x,y,u)=0$ 得 u_0^*；

步骤 2. 插值，$u_M^0 := I_3 u_0^*$；

步骤 3. 以 u_M^0 为初始值，使用 k_M 次牛顿法求解 $F_M(x,y,u)=0$ 得 u_M^*；

与通常的 CMG 法(即算法 2)比较可知，CTG 法无需使用中间层网格 Z_1，Z_2，……，Z_{M-1}，直接将最粗层上的解插值到最细层网格上。与文献[25]中基于经典的二阶中心差分格式的牛顿—瀑布两网格法的不同之处在于，CTG 法是基于紧致差分格式（CFD）而提出来的。

4 数值实验

为了验证本文提出的 CFD 格式及 CTG 法的有效性，在 $\Omega:[0,1]\times[0,1]$ 上考虑如下算例。

算例 1　真解为 $u=(\mathrm{e}^{\sin(\pi x)}-1)\log(y+1)(y-1)$，源函数为

$$f(x,y,u)=u^3+\frac{(e^{\sin(\pi x)}-1)(y-1)}{(y+1)^2}-\frac{2e^{\sin(\pi x)}-2}{y+1}-\pi^2\ln(y+1)\,e^{\sin(\pi x)}\cos^2(\pi x)(y-1)$$
$$+\pi^2\ln(y+1)e^{\sin(\pi x)}\sin(\pi x)(y-1).$$

算例 2　真解为 $u=(1-x^2)(1-y^4)(\mathrm{e}^{\sin(x)}-1)(1-\frac{1}{\cos(y)})$，源函数为

$$f(x,y,u)=ue^u+2(y^4-1)(\frac{1}{\cos(y)}-1)(e^{\sin(x)}-1)+12y^2(x^2-1)(\frac{1}{\cos(y)}-1)(e^{\sin(x)}-1)$$
$$+\frac{(x^2-1)(y^4-1)(e^{\sin(x)}-1)}{\cos(y)}+\frac{2\sin^2(y)(x^2-1)(y^4-1)(e^{\sin(x)}-1)}{\cos^3(y)}$$
$$+\frac{8y^3\sin(y)(x^2-1)(e^{\sin(x)}-1)}{\cos^2(y)}-e^{\sin(x)}\sin(x)(x^2-1)(y^4-1)(\frac{1}{\cos(y)}-1)$$
$$+4xe^{\sin(x)}\cos(x)(y^4-1)(\frac{1}{\cos(y)}-1)+e^{\sin(x)}\cos^2(x)(x^2-1)(y^4-1)(\frac{1}{\cos(y)}-1).$$

4.1 离散格式的比较

本节比较经典二阶中心差分(SOCD)格式

$$-\frac{u_{i-1,j}-2u_{i,j}+u_{i+1,j}}{\Delta x^2}-\frac{u_{i,j-1}-2u_{i,j}+u_{i,j+1}}{\Delta y^2}=f(x_i,y_j,u_{i,j})$$

和本文提出的 CFD 格式的计算效率。对于这两种离散格式下的非线性方程组，均使用牛顿法求解，初始值取元素全为 10 的列向量，其维数等于非线性方程的未知量个数。

约定“$\| u_h^* - u \|_\infty$”表示 SOCD 格式(或 CFD 格式)下步长 h 对应的解 u_h^* 与真解 u 的无穷范数误差。“cpu”表示差分格式离散及求解的计算时间(s)。记“k”为求解过程中牛顿法的迭代次数。记收敛阶 $order$ 为

$$order = \log_2\left(\frac{\| u_h - u \|_\infty}{\| u_{h/2} - u \|_\infty}\right)。$$

表 1　SOCD 格式和 CFD 格式下算例 1 的数值结果

$1/h$	SOCD				CFD			
	$\| u_h^* - u \|_\infty$	$order$	k	cpu	$\| u_h^* - u \|_\infty$	$order$	k	cpu
16	1.36E-03	----	8	0.03	9.02E-06	----	8	0.03
32	3.37E-04	2.01	8	0.14	5.57E-07	4.02	8	0.21
64	8.43E-05	2.00	8	0.55	3.47E-08	4.00	8	0.54
128	2.11E-05	2.00	8	1.59	2.17E-09	4.00	8	1.97
256	5.27E-06	2.00	8	6.13	1.36E-10	4.00	8	9.14
512	1.32E-06	2.00	8	29.58	8.46E-12	4.00	8	43.66

表 2　SOCD 格式和 CFD 格式下算例 2 的数值结果

$1/h$	SOCD				CFD			
	$\| u_h^* - u \|_\infty$	$order$	k	cpu	$\| u_h^* - u \|_\infty$	$order$	k	cpu
16	1.87E-03	----	14	0.05	2.84E-05	----	14	0.07
32	4.73E-04	1.99	14	0.30	1.80E-06	3.98	14	0.35
64	1.19E-04	1.99	14	0.87	1.13E-07	3.99	14	0.96
128	2.97E-05	2.00	14	3.07	7.06E-09	4.00	14	3.10
256	7.44E-06	2.00	14	12.46	4.42E-10	4.00	14	16.33
512	1.86E-06	2.00	14	67.25	2.76E-11	4.00	14	95.38

观察比较表 1、表 2 中数据可以看出：

1) 相同剖分规模下，CFD 格式的计算精度远高于 SOCD 格式。比如，表 1 中 $1/h = 512$ 时，SOCD 格式下的计算精度为 1.32×10^{-6}，使用 8 次牛顿迭代，耗时 29.58 s，CFD 格式下的误差为 8.46×10^{-12}，使用 8 次牛顿迭代，耗时 43.66 s。可见虽然 CFD 格式耗时约为 SOCD 格式的两倍，但 CFD 格式的精度要高出 6 个量级。

2) 计算精度大致相当的情况下，CFD 格式的计算规模更小、计算时间更短。比如表 1 中，对于 CFD 格式，$1/h = 32$ 时计算精度为 5.57×10^{-7}，计算时间为 0.21 s。对于 SOCD 格式，当 $1/h = 512$ 时计算精度为 1.32×10^{-6}，计算时间为 29.58 s。可知，此时 CFD 格式的计算精度与 SOCD 格式大致相当，在计算规模和计算时间方面，CFD 格式明显优于 SOCD 格式。

3) CFD 格式收敛阶更高。通过观察表 1、表 2 中 *order* 对应的列，可知，CFD 格式收敛阶为 4，而 SOCD 格式的收敛阶仅为 2。这意味着，当剖分步长缩小至原来的 1/2 倍时，CFD 格式的计算误差仅为原误差的 1/16，有助于用较小的剖分规模，获得较高的计算精度。

4) 使用牛顿法求解 CFD 格式下和 SOCD 格式下非线性方程的迭代次数基本相当。这意味着，CFD 格式下非线性方程的求解难度与 SOCD 格式基本相当。

4.2 多重网格法的比较

本小节，比较 CFD 格式下，通常的 CMG 法和本文的 CTG 法求解离散算例 1 和算例 2 的计算效率。

最粗网格层 Z_0 上的初始值为元素全为 10 的列向量，其维数等于 Z_0 上未知量个数。记“h_0”和“h_M”分别表示 Z_0 和 Z_M 上的步长。记“$\|u_M^*-u\|_\infty$”表示算法求出的数值解 u_M^* 和真解 u 的无穷范数误差。记“cpu”表示算法的计算时间(s)。

表 3　$M=2$ 时，通常的 CMG 法和 CTG 法求解算例 1 的数值结果

$\frac{1}{h_0}$	$\frac{1}{h_M}$	通常的 CMG 法 $\|u_M^*-u\|_\infty$	cpu	k_0	k_1	k_2	CTG 法 $\|u_M^*-u\|_\infty$	cpu	k_0	k_2
32	128	2.17E-09	1.75	8	3	2	2.17E-09	0.95	8	2
64	256	1.36E-10	6.22	8	2	2	1.36E-10	3.31	8	2
128	512	8.46E-12	31.12	8	2	2	8.45E-12	16.44	8	2

表 4　$M=3$ 时，通常的 CMG 法和 CTG 法求解算例 1 的数值结果

$\frac{1}{h_0}$	$\frac{1}{h_M}$	通常的 CMG 法 $\|u_M^*-u\|_\infty$	cpu	k_0	k_1	k_2	k_3	CTG 法 $\|u_M^*-u\|_\infty$	cpu	k_0	k_3
16	128	2.17E-09	1.45	8	3	3	2	2.17E-09	0.53	8	2
32	256	1.36E-10	5.96	8	3	2	2	1.36E-10	2.84	8	2
64	512	8.46E-12	31.08	8	2	2	2	8.46E-12	14.87	8	2

表 5　$M=4$ 时，通常的 CMG 法和 CTG 法求解算例 1 的数值结果

$\frac{1}{h_0}$	$\frac{1}{h_M}$	通常的 CMG 法 $\|u_M^*-u\|_\infty$	cpu	k_0	k_1	k_2	k_3	k_4	CTG 法 $\|u_M^*-u\|_\infty$	cpu	k_0	k_3
8	128	2.17E-09	1.50	8	3	3	3	2	2.17E-09	0.60	8	2
16	256	1.36E-10	5.69	8	3	3	2	2	1.36E-10	2.63	8	2
32	512	8.46E-12	30.01	8	3	2	2	2	8.46E-12	15.19	8	2

表 6　$M=5$ 时，通常的 CMG 法和 CTG 法求解算例 1 的数值结果

$\frac{1}{h_0}$	$\frac{1}{h_M}$	通常的 CMG 法 $\|u_M^*-u\|_\infty$	cpu	k_0	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	CTG 法 $\|u_M^*-u\|_\infty$	cpu	k_0	k_5
4	128	2.17E-09	1.75	7	3	3	3	3	2	2.17E-09	0.80	7	3

8	256	1.36E-10	7.46	8	3	3	3	2	2	1.36E-10	3.00	8	2
16	512	8.47E-12	31.18	8	3	3	2	2	2	8.46E-12	16.16	8	2

表 7　$M=2$ 时，CMG 法和 CTG 法求解算例 2 的数值结果

$\frac{1}{h_0}$	$\frac{1}{h_M}$	通常的 CMG 法					CTG 法			
		$\Vert u_M^* - u \Vert_\infty$	cpu	k_0	k_1	k_2	$\Vert u_M^* - u \Vert_\infty$	cpu	k_0	k_2
32	128	7.06E-09	1.98	14	3	2	7.06E-09	1.03	14	2
64	256	4.42E-10	7.07	14	2	2	4.42E-10	3.73	14	2
128	512	2.76E-11	35.44	14	2	2	2.76E-11	18.78	14	2

表 8　$M=3$ 时，CMG 法和 CTG 法求解算例 2 的数值结果

$\frac{1}{h_0}$	$\frac{1}{h_M}$	通常的 CMG 法						CTG 法			
		$\Vert u_M^* - u \Vert_\infty$	cpu	k_0	k_1	k_2	k_3	$\Vert u_M^* - u \Vert_\infty$	cpu	k_0	k_3
16	128	7.06E-09	1.70	14	3	3	2	7.06E-09	0.59	14	2
32	256	4.42E-10	6.55	14	3	2	2	4.42E-10	3.14	14	2
64	512	2.76E-11	33.59	14	2	2	2	2.76E-11	16.33	14	2

表 9　$M=4$ 时，CMG 法和 CTG 法求解算例 2 的数值结果

$\frac{1}{h_0}$	$\frac{1}{h_M}$	通常的 CMG 法							CTG 法			
		$\Vert u_M^* - u \Vert_\infty$	cpu	k_0	k_1	k_2	k_3	k_4	$\Vert u_M^* - u \Vert_\infty$	cpu	k_0	k_3
8	128	7.06E-09	1.65	14	3	3	3	2	7.06E-09	0.78	14	3
16	256	4.42E-10	6.30	14	3	3	2	2	4.42E-10	2.88	14	2
32	512	2.76E-11	31.68	14	3	2	2	2	2.76E-11	15.97	14	2

表 10　$M=5$ 时，CMG 法和 CTG 法求解算例 2 的数值结果

$\frac{1}{h_0}$	$\frac{1}{h_M}$	通常的 CMG 法								CTG 法			
		$\Vert u_M^* - u \Vert_\infty$	cpu	k_0	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	$\Vert u_M^* - u \Vert_\infty$	cpu	k_0	k_5
4	128	7.06E-09	1.70	14	3	3	3	3	2	7.06E-09	0.76	14	3
8	256	4.42E-10	6.52	14	3	3	3	2	2	4.42E-10	4.18	14	3
16	512	2.76E-11	31.25	14	3	3	2	2	2	2.76E-11	14.81	14	2

通过观察比较表 3 至表 10 中的数据，可以发现：

1) 在相同计算规模下，通常的 CMG 法和 CTG 法具有相同的计算精度，但 CTG 法所需计算时间约为 CMG 法的一半。

2) CMG 法和 CTG 法中 k_0, k_M 分别对应相等。但 CTG 法无需使用中间网格层，省去了离散形成中间网格层和在中间网格层上使用牛顿法，因此 CTG 法所需计算量少于 CMG 法。

3) CMG 法和 CTG 法在各层上的迭代次数，不随剖分规模的增加而增加，具有较强稳健性。

5 结论

本文中提出了离散非线性椭圆问题的 CFD 格式和该格式下的 CTG 法，数值实验验证了 CFD 格式具有四阶的计算精度，CTG 法计算时间短、计算量少、稳健性强。

参考文献

[1] Zhang J. Multigrid method and fourth-order compact scheme for 2D Poisson equation with unequal mesh-size discretization[J]. Comp Phys, 2002, (179): 170-179.

[2] 葛永斌，吴文权，卢曦．基于二维泊松方程六阶紧致格式的多重网格方法[J]．上海理工大学学报, 2002, 24(4): 337-344.

Ge Y B, Wu W Q, Lu X. Sixth-order compact multigrid method for the 2D Poisson equation[J]. Journal of University of Shanghai for Science and Technology, 2002, 24(4): 337-344.

[3] 葛永斌,田振夫,马红磊．三维泊松方程的高精度多重网格解法[J].应用数学,2006,19(2): 313-318.

Ge Y B, Tian Z F, Ma H L, A high accuracy multigrid method for the three-dimensional Poisson equation[J].Mathematica Applicata, 2006, 19 (2) : 313-318.

[4] 田振夫.泊松方程的高精度三次样条差分方法[J]. 西北师范大学学报:自然科学版,1996(2): 13-17.

Tian Z F. Cubic-spline difference method of high accuracy for Poisson equation[J].Journal of Northwest Normal University:Natural Science, 1996(2): 13-17.

[5] 豆桂芳，吴振远,杜艳林.三维泊松方程的七点差分格式[J].工程地球物理学报,2009,6(6): 802-805.

Dou G F, Wu Z Y, Du Y L. The serven-point difference scheme for the three-dimensional Poisson’s equation[J].Chinese Journal of Engineering Geophysics, 2009, 6(6): 802-805.

[6] 田芳，田振夫．定常对流扩散反应方程非均匀网格上高精度紧致差分格式[J]．工程数学学报, 2009, 26(2): 219-225.

Tian F, Tian Z F. A high accuracy compact difference scheme for convection diffusion reaction equation on non-uniform grid[J].Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2009, 26(2): 219-225.

[7] 高智．对流扩散方程的绝对稳定高阶中心差分格式[J]．力学学报, 2010, 42(5): 811-817.

Gao Z. Two absolute stability, higher-order central difference schemes for the convective-diffusion equation[J].Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2010, 42(5): 811-817.

[8] 葛永斌，田振夫．二维非定常不可压涡量-速度 Navier-Stokes 方程组的高精度紧致差分格式[J]. 水动力学研究与进展(A 辑), 2010,25(1): 67-75.

Ge Y B, Tian Z F. A high order compact difference scheme for solving the 2D unsteady incompressible Navier-Stokes equations in vorticity-velocity formulation[J]. Chinese Journal of Hydrodynamics, 2010, 25(1): 67-75.

[9] Bornemann F, Deufhard P. The cascadic multigrid method for elliptic problems[J]. Numer Math, 1996, 75(2): 125-152.

[10] Bornemann F, Deufhard P. The cascadic multigrid method[C]//The Eighth Interational Conference on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations. New York: Wiley and Sons, 1997.

[11] Shaidurov V V. Some estimates of the rate of convergence for the cascadic conjugate-gradient method[J].Comp Math Appl,1996,31(4): 161-171.

[12] Shi Z C, Xu X J. Cascadic multigrid method for elliptic problems[J]. Numer Math,1999,7(3): 199-209.

[13] Shi Z C, Xu X J. Cascadic multigrid method for parabolic problems[J].Comp Math,2000, 18(5): 551-560.

[14] Shi Z C, Xu X J. A new cascadic multigrid[J]. Science in China Serics A: Mathematics, 2001, 44(1): 21-30.

[15] 石钟慈, 许学军, 黄云清. 经济的瀑布型多重网格法[J]. 中国科学(A 辑),2007,50(2): 1766-1780.

Shi Z C, Xu X J, Huang Y Q. Economical cascadic multigrid method (ECMG)[J]. Science in China Serics A:Mathematics,2007,50(2):1766-1780.

[16] 李郴良,陈传淼,许学军. 基于超收敛和外推方法的一类新的瀑布型多重网格方法[J].计算数学, 2007, 29(4): 439-448.

Li C L, Chen C M, Xu X J. A new cascadic multigrid method based on supper convergence and extrapolation[J].Mathematica Numerica Sinica,2007, 29(4): 439-448.

[17] Xu J C. A novel two-grid method for semilinear elliptic equations[J]. SIAM Journal on Scientific Compting, 1994,15(1): 231-237.

[18] Timmermann G. A cascadic multigrid algorithms for semilinear elliptic problems[J]. Numer Math, 2000, 86: 717-731.

[19] Huang Y Q, Shi Z C, Tang T, et al. A multilevel successive iteration method for nonlinear elliptic problems[J]. Math Comp, 2004, 57: 525-539.

[20] 周叔子, 祝树金. 半线性问题的瀑布型多重网格法[J]. 应用数学, 2002, 15(3): 136-139.

Zhou S Z, Zhu S J. A cascadic multigrid method for semilinear problems[J].Mathematica Application, 2002, 15(3): 136-139.

[21] 祝树金, 周叔子. 一类半线性椭圆问题的瀑布型多重网格法[J]. 数学理论与应用, 2002, 22(1): 1-4.

Zhu S J, Zhou S Z. A cascadic multigrid method for nonlinear elliptic problems[J]. Mathematical Theory and Applications, 2002, 22(1): 1-4.

[22] 邹战勇. 半线性椭圆问题的 Mortar 有限元逼近的瀑布型多重网格法[J].数学理论与应用, 2006, 26(1): 39-41.

Zou Z Y. Cascadic multigrid method for a mortar element approximation of a semilinear elliptic problem[J].Mathematical Theory and Applications, 2006, 26(1): 39-41.

[23] 禹海雄, 孙哲. 一类半线性椭圆问题的瀑布型多重网格法[J]. 湖南大学学报:自然科学版, 2011, 38(8): 79-81.

Yu H X, Sun Z. On the convergence of a cascadic multigrid method for a kind of semilinear elliptic problems[J]. Journal of Hunan University :Natural Sciences, 2011, 38(8): 79-81.

[24] 禹海雄. 几类非线性问题的多重网格解法[D]. 长沙: 湖南大学博士论文. 2011.

Yu H X. Multigrid methods for several kinds of nonlinear problems[D].Changsha:Hunan University,2011.

[25] 李明, 李郴良, 崔向照. 求解半线性椭圆问题的牛顿-瀑布型两层网格法[J].数值计算与计算机应用, 2011, 32(4): 315-320.

Li M, Li C L, Cui X Z. A newton-cascadic two-level method for semilinear elliptic problems[J]. Journal on Numerical Methods and Computer Applications, 2011, 32(4): 315-320.

[26] 李明, 李郴良, 崔向照 等. 一种求解泊松方程的瀑布型代数两层网格法[J].高等学校计算数学学报, 2012, 34(2): 153-159.

Li M, Li C L, Cui X Z, et al. A cascadic algebraic two-level grid method for Poisson equations[J]. Numerical Mathematics:A Journal of Chinese Universities, 2012, 34(2): 153-159.

Compact Finite Difference Scheme and Cascadic Two Grid Method for Nonlinear Elliptic Problem*

LI Ming, ZHAO Jin'e
(Department of Mathematics, Honghe University, Mengzi Yunnan 661199)

Abstract: Many science engineering problems can be attributed to solve a nonlinear elliptic problem. In this paper, a compact finite difference (CFD) scheme and a numerical method are discussed for the two dimensional nonlinear elliptic problem. Firstly, a compact finite difference (CFD) scheme is proposed, based on a fourth order compact finite difference scheme for Poisson problem. Secondly, a coarse grid and a fine grid can be given, by choosing proper step length. On the coarse grid, Newton method is used to solve the nonlinear equation, and the high accuracy approximate solution is obtained. A better initial value is provided on fine grid, by using interpolation operator. Newton method is used again for the initial value. A cascadic two grid (CTG) method is proposed. Numerical experiments of the CFD scheme and CTG method are given, which demonstrate that the new CFD scheme with accuracies of fourth order, and the CTG method is effective.

Keywords: nonlinear elliptic problem; compact finite difference scheme; cascadic two grid method

（责任编辑　游中胜）