运筹学与控制论

DOI:10.11721/cqnuj20150424

一类锥约束多目标优化问题的对偶研究*

李红梅[1,2]，高 英[1]

(1. 重庆师范大学 数学学院，重庆 401331；2. 重庆市南岸区茶园新城中学，重庆 401336)

摘要：考虑了一类锥约束多目标优化问题，对其建立了 4 种对偶模型。在广义不变凸性假设下，给出了 4 种对偶模型的弱对偶定理。在一定的约束品性下，给出了强对偶定理。再利用 Fritz-John 型必要性条件讨论了这 4 种对偶模型的逆对偶定理。所给出的弱对偶定理和逆对偶定理推广了已有文献相应的结果。

关键词：锥约束多目标优化；广义不变凸；对偶定理

中图分类号：O221.6　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1672-6693(2015)04-0001-07

多目标优化问题对偶理论的内容是非常丰富的，它在最优化理论的进展及算法中都具有十分重要的作用[1-2]。1961 年，Wolfe[3]首次利用 Kuhn-Tucker 最优性条件，在凸性假设下建立了单目标优化问题的对偶模型，称之为 Wolfe 对偶模型。随后，为了减弱凸性假设条件，Mond 和 Weir[4]提出了带非负变量的对偶模型，称之为 Mond-Weir 对偶模型，并在伪凸和拟凸的假设条件下给出了弱对偶定理。1975 年，Mangasarian[5]在一阶 Wolfe 型对偶模型的基础上通过引进二次可微函数，建立了单目标二阶和高阶对偶模型。Mond 和 Weir[6]考虑了另一种二阶和高阶对偶模型，并在高阶不变凸性假设下证明了对偶定理。随后，许多学者对不同类型的最优化问题研究其对偶定理，一方面给出凸性要求更弱的广义凸函数，然后给出其对偶定理；另一方面将两种对偶模型统一起来，研究统一的对偶模型，并给出其对偶定理[7-19]。然而，大部分的对偶模型都是 Wolfe 型和 Mond-Weir 型或者它们的统一形式。本文将讨论的是锥约束多目标优化问题的另外 4 种对偶模型。

1996 年，Nanda 和 Das[7]考虑了如下锥约束优化问题(NP)：

$$\begin{aligned} &\min \quad f(x),\\ &\text{s. t.} \quad g(x)\in C_2^*,\ x\in C_1。\end{aligned}$$

其中 $f:S\to\mathbf{R}$，$g:S\to\mathbf{R}^m$，f,g 均为二次可微的函数。$S\in\mathbf{R}^n$ 是闭集，C_1,C_2 分别为 $\mathbf{R}^n$ 和 $\mathbf{R}^m$ 中具有非空内部的闭凸锥，C_2^* 为 C_2 的负极锥。

受 Bazaraa 和 Goode[8]，Hanson 和 Mond[9]的启发，在伪不变凸和拟不变凸的假设条件下，Nanda 和 Das[5]试图推广 Mond-Weir[4]考虑的锥约束单目标优化模型。Chandra 和 Abha[1]指出 Nanda 和 Das[7]的研究工作中有瑕疵。随后，他们提出了 4 种修正的对偶模型，但是 Chanda 和 Abha[1]并没有考虑修正模型的逆对偶定理。后来，杨等人在文献[2]中证明了 4 种修正对偶模型的逆对偶定理并指出文献[7]中逆对偶的证明不太理想。

在文献[1-2,11]的基础之上，将锥约束单目标优化问题的 4 种修正对偶模型锥广为锥约束多目标优化问题的 4 种相应的对偶模型，分别对其建立了弱对偶、强对偶定理。再利用 Fritz-John 型必要性条件[12]建立了逆对偶定理。本文结构如下：文章第 2 部分，给出了一些预备知识和锥约束多目标优化问题的 4 种对偶模型。文章第 3 部分，分别给出并证明了 4 种对偶模型的弱对偶、强对偶和逆对偶定理。

1 预备知识

设 $\mathbf{R}^n$ 是 n 维欧式空间，$\mathbf{R}_+^n$ 是非负象限。设 C 是凸锥，C 的负极锥为 $C^*=\{z:x^{\mathrm{T}}z0,\forall x\in C\}$。对任意 $x,y\in\mathbf{R}^n$，给出以下符号：$x<y\Leftrightarrow y-x\in\operatorname{int}\mathbf{R}_+^n$，$x\leqslant y\Leftrightarrow y-x\in\mathbf{R}_+^n\setminus\{0\}$，$x\leqq y\Leftrightarrow y-x\in\mathbf{R}_+^n$。

定义 1 设 $S\subset\mathbf{R}^n$ 是闭集，函数 $f:S\to\mathbf{R}$ 在 S 上对于 η 是伪不变凸的，如果对任意 $x,u\in S$，有

$$\eta(x,u)^{\mathrm{T}}\nabla f(u)\geqq 0\Rightarrow f(x)\geqq f(u)。$$

* **收稿日期**：2014-04-08　　**修回日期**：2015-03-21　　**网络出版时间**：2015-5-15 10:55

资助项目：国家自然科学基金(No. 11201511；No. 11201379)；重庆市重点实验室项目(No. CSTC2011KLORSE03)

作者简介：李红梅，女，研究方向为最优化理论，E-mail：cqglihongmei@163.com；**通信作者**：高英，副教授，E-mail：gaoyingimu@163.com

网络出版地址：http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.n.20150515.1055.007.html

定义 2 设 $S\subset\mathbf{R}^n$ 是闭集,函数 $f:S\to\mathbf{R}$ 在 S 上对于 η 是拟不变凸的,如果对任意 $x,u\in S$,有

$$f(x)\geqq f(u)\Rightarrow\eta(x,u)^{\mathrm{T}}\nabla f(u)\geqq 0。$$

其中函数 $\eta:S\times S\to\mathbf{R}^n$。

定义 3 (i) 可行解 $\bar{x}$ 称为问题(NP)的弱有效解,若不存在 $x\in S$ 使得 $f(x)<f(\bar{x})$;(ii) 可行解 $\bar{x}$ 称为问题(NP)的有效解,若不存在 $x\in S$ 使得 $f(x)\leqslant f(\bar{x})$。

考虑如下的多目标优化模型(MOP):

$$\begin{aligned}&\min\quad f(x),\\&\text{s.t.}\quad g(x)\in C_2^*,24ptx\in C_1,\end{aligned}$$

其中 $f(x)=(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_p(x)):S\to\mathbf{R}^p$,$g:S\to\mathbf{R}^m$。$f$,$g$ 均为二次可微函数。

对于(MOP),建立如下4种对偶模型:

$$\begin{aligned}(\mathrm{MD})_1\quad&\max\quad f(u)-\{y^{\mathrm{T}}g(u)-u^{\mathrm{T}}\nabla(\lambda^{\mathrm{T}}f+y^{\mathrm{T}}g)(u)\}e,\\&\text{s.t.}\quad -\nabla(\lambda^{\mathrm{T}}f+y^{\mathrm{T}}g)(u)\in C_1^*, \qquad (1)\\&\qquad\ y\in C_2,\lambda^{\mathrm{T}}e=1,\lambda_i>0,i=1,2,\cdots,p。\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\mathrm{MD})_2\quad&\max\quad f(u),\\&\text{s.t.}\quad -\nabla(\lambda^{\mathrm{T}}f+y^{\mathrm{T}}g)(u)\in C_1^*,\\&\qquad\ y^{\mathrm{T}}g(u)-u^{\mathrm{T}}\nabla(\lambda^{\mathrm{T}}f+y^{\mathrm{T}}g)(u)\geqslant 0,\\&\qquad\ y\in C_2,\lambda^{\mathrm{T}}e=1,\lambda_i>0,i=1,2,\cdots,p。\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\mathrm{MD})_3\quad&\max\quad f(u)-\{u^{\mathrm{T}}\nabla(\lambda^{\mathrm{T}}f+y^{\mathrm{T}}g)(u)\}e,\\&\text{s.t.}\quad -\nabla(\lambda^{\mathrm{T}}f+y^{\mathrm{T}}g)(u)\in C_1^*,\\&\qquad\ y^{\mathrm{T}}g(u)\geqslant 0,y\in C_2,\lambda^{\mathrm{T}}e=1,\lambda_i>0,i=1,2,\cdots,p。\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\mathrm{MD})_4\quad&\max\quad f(u)+\{y^{\mathrm{T}}g(u)\}e,\\&\text{s.t.}\quad -\nabla(\lambda^{\mathrm{T}}f+y^{\mathrm{T}}g)(u)\in C_1^*, \qquad (2)\\&\qquad\ u^{\mathrm{T}}\nabla(\lambda^{\mathrm{T}}f+y^{\mathrm{T}}g)(u)\leqslant 0, \qquad (3)\\&\qquad\ y\in C_2,\lambda^{\mathrm{T}}e=1,\lambda_i>0,i=1,2,\cdots,p。\end{aligned}$$

其中 $e=(1,1,\cdots,1)\in\mathbf{R}^p$。

注 1 如果 $p=1$,(MOP)退化为(NP)且对偶模型 $(\mathrm{MD})_1\sim(\mathrm{MD})_4$ 相应的退化为文献[5]中的对偶模型 $(\mathrm{D})_1\sim(\mathrm{D})_4$。

2 对偶定理

接下来将分别建立4种对偶模型的弱对偶、强对偶和逆对偶定理。

定理 1 (弱对偶)设 x 和 (u,y) 分别为(MOP)和 $(\mathrm{MD})_1$ 的可行解。设对任意的 $v\in C_1^*$,$(\lambda^{\mathrm{T}}f+y^{\mathrm{T}}g)(u)+v^{\mathrm{T}}(\cdot)$ 对于函数 η 是伪不变凸的,则

$$f(x)\nleq f(u)+\{y^{\mathrm{T}}g(u)-u^{\mathrm{T}}\nabla(\lambda^{\mathrm{T}}f+y^{\mathrm{T}}g)(u)\}e。$$

证明 由(1)式知存在 $v\in C_1^*$ 使得 $v=-\nabla(\lambda^{\mathrm{T}}f+y^{\mathrm{T}}g)(u)$。上式乘以 $\eta(x,u)$ 得

$$\eta(x,u)^{\mathrm{T}}[\nabla(\lambda^{\mathrm{T}}f+y^{\mathrm{T}}g)(u)+v]=0。$$

因为 $\lambda^{\mathrm{T}}f+y^{\mathrm{T}}g+v(\cdot)$ 是伪不变凸的,故有

$$\lambda^{\mathrm{T}}f(x)+y^{\mathrm{T}}g(x)+v^{\mathrm{T}}(x)\geqslant\lambda^{\mathrm{T}}f(u)+y^{\mathrm{T}}g(u)+v^{\mathrm{T}}(u)。$$

又因 $y^{\mathrm{T}}g(x)\leqslant 0$ 和 $v^{\mathrm{T}}(x)\leqslant 0$ 知 $\lambda^{\mathrm{T}}f(x)\geqslant\lambda^{\mathrm{T}}f(u)+y^{\mathrm{T}}g(u)+v^{\mathrm{T}}(u)$。由 $\lambda^{\mathrm{T}}e=1$ 知

$$f(x)f(u)+\{y^{\mathrm{T}}g(u)+v^{\mathrm{T}}(u)\}e。$$

因此 $f(x)\nleq f(u)+\{y^{\mathrm{T}}g(u)-u^{\mathrm{T}}\nabla(\lambda^{\mathrm{T}}f+y^{\mathrm{T}}g)(u)\}e$。 证毕

定理 2 (弱对偶)设 x 和 (u,y) 分别为(MOP)和 $(\mathrm{MD})_2$ 的可行解。设 $\lambda^{\mathrm{T}}f$ 对于 η 是伪不变凸的且对任意的 $v\in C_1^*$,$y^{\mathrm{T}}g(u)+v^{\mathrm{T}}(\cdot)$ 是拟不变凸的,则 $f(x)\nleq f(u)$。

证明类似于定理1。

例 1 在(MOP)中,设函数 $f(x)=(e^{x_1+x_2},x_1+x_2)$,$g(x)=x_1+x_2-1$,$C_1=\mathbf{R}_+^2$,$C_2=\mathbf{R}_+$,则(MOP)退化为

$$\begin{aligned}&\min\quad (e^{x_1+x_2},x_1+x_2)\\&\text{s.t.}\quad x_1+x_2-1\leqslant 0,x_1,x_2\geqslant 0。\end{aligned}$$

容易验证$(x_1,x_2)=(0,0)$是(MOP)的有效解且对偶模型$(\mathrm{MD})_2$退化为

$$\begin{aligned}&\max\quad (e^{u_1+u_2},u_1+u_2),\\&\text{s.t.}\quad \lambda_1 e^{u_1+u_2}+\lambda_2+y\geqslant 0,\\&\qquad\quad \lambda_1(u_1+u_2)e^{u_1+u_2}+\lambda_2(u_1+u_2)+y\leqslant 0,y\geqslant 0。\end{aligned}$$

易知$\lambda=(\lambda_1,\lambda_2)$，其中$\lambda_1>0,\lambda_2>0$和$\lambda_1+\lambda_2=1$，对于$\eta(x,u)=x-u$，函数$\lambda^{\mathrm{T}}f$是伪不变凸的，$yg+v^{\mathrm{T}}u$是拟不变凸的，其中$x=(x_1,x_2)$，$u=(u_1,u_2)$。故定理 2 的条件满足，其结论应成立。

事实上，定理 2 的结论成立。因$\lambda_1(u_1+u_2)e^{u_1+u_2}+\lambda_2(u_1+u_2)+y\leqslant 0$和$y\geqslant 0$，有$(u_1+u_2)(\lambda_1 e^{u_1+u_2}+\lambda_2)\leqslant 0$，意味着$u_1+u_2\leqslant 0$，因此$(e^{u_1+u_2},u_1+u_2)\leqq(e^{x_1+x_2},x_1+x_2)$。即$(e^{x_1+x_2},x_1+x_2)\nleq(e^{u_1+u_2},u_1+u_2)$。

定理 3　（弱对偶）设x和(u,y)分别为(MOP)和$(\mathrm{MD})_3$的可行解。设对任意的$v\in C_1^*$，$\lambda^{\mathrm{T}}f+v^{\mathrm{T}}(\cdot)$对于$\eta$是伪不变凸函数，$y^{\mathrm{T}}g$对于$\eta$是拟不变凸的，则$f(x)\nleq f(u)-\{u^{\mathrm{T}}\nabla(\lambda^{\mathrm{T}}f+y^{\mathrm{T}}g)(u)\}e$。

证明类似于定理 1 的证明。

定理 4　（弱对偶）设x和(u,y)分别为(MOP)和$(\mathrm{MD})_4$的可行解。设对任意的$v\in C_1^*$，$\lambda^{\mathrm{T}}f+y^{\mathrm{T}}g$对于函数$\eta$是伪不变凸的，其中$\eta$满足$(\eta(x,u)+u)\in C_1$，则$f(x)\nleq f(u)+\{y^{\mathrm{T}}g(u)\}e$。

证明　由(2)式和假设$(\eta(x,u)+u)\in C_1$有$(\eta(x,u)+u)^{\mathrm{T}}[\nabla\lambda^{\mathrm{T}}f(u)+\nabla y^{\mathrm{T}}g(u)]\geqslant 0$，即：

$$\eta(x,u)^{\mathrm{T}}[\nabla\lambda^{\mathrm{T}}f(u)+\nabla y^{\mathrm{T}}g(u)]\geqslant -u^{\mathrm{T}}[\nabla\lambda^{\mathrm{T}}f(u)+\nabla y^{\mathrm{T}}g(u)]。$$

由(3)式得$\eta(x,u)^{\mathrm{T}}[\nabla\lambda^{\mathrm{T}}f(u)+\nabla y^{\mathrm{T}}g(u)]\geqslant 0$。因$\lambda^{\mathrm{T}}f+y^{\mathrm{T}}g$是一个伪不变凸函数：

$$\lambda^{\mathrm{T}}f(x)+y^{\mathrm{T}}g(x)\geqslant\lambda^{\mathrm{T}}f(u)+y^{\mathrm{T}}g(u)。$$

因$\lambda^{\mathrm{T}}e=1$知$f(x)+y^{\mathrm{T}}g(x)e\nleq f(u)+y^{\mathrm{T}}g(u)e$。由$y^{\mathrm{T}}g(x)\leqslant 0$得$f(x)\nleq f(u)+\{y^{\mathrm{T}}g(u)\}e$。　　证毕

例 2　对于例 1，其对偶模型$(\mathrm{MD})_4$退化为

$$\begin{aligned}&\max\quad (e^{u_1+u_2}+y(u_1+u_2-1),(u_1+u_2)+y(u_1+u_2-1)),\\&\text{s.t.}\quad \lambda_1 e^{u_1+u_2}+\lambda_2+y\geqslant 0,(u_1+u_2)(\lambda_1 e^{u_1+u_2}+\lambda_2+y)\leqslant 0,y\geqslant 0。\end{aligned}$$

易知$\lambda^{\mathrm{T}}f+yg$对于$\eta(x,u)=x-u$是伪不变凸函数且$\eta(x,u)+u=x\in C_1$，故定理 4 中的条件与结论满足。

事实上，定理 4 的结论确实成立。由$u_1+u_2\leqslant 0$和$y\geqslant 0$知

$$(e^{u_1+u_2}+y(u_1+u_2-1),(u_1+u_2)+y(u_1+u_2-1))\leqq(e^{x_1+x_2},x_1+x_2)。$$

因此$(e^{x_1+x_2},x_1+x_2)\nleq(e^{u_1+u_2}+y(u_1+u_2-1),(u_1+u_2)+y(u_1+u_2-1))$。

定理 5　（强对偶）设$\bar{x}$是(MOP)的有效解且单目标优化问题(P_i)：

$$\begin{aligned}&\min\quad f_i(x),\\&\text{s.t.}\quad g(x)\in C_2^*,f_j(x)\leqslant f_j(\bar{x}),j\neq i,x\in C_1。\end{aligned}$$

在$\bar{x}$处满足文献[10]中的约束品性，其中$i=1,2,\cdots,p$，则存在$\bar{y}\in C_2$，$\bar{\lambda}>0$使得$(\bar{\lambda},\bar{x},\bar{y})$是问题$(\mathrm{MD})_1$的可行解，且(MOP)和$(\mathrm{MD})_1$的目标函数值相等。此外，如果定理 1 中的假设条件成立，则$(\bar{\lambda},\bar{x},\bar{y})$是$(\mathrm{MD})_1$的有效解。

证明　因$\bar{x}$是(MOP)的有效解，故$\bar{x}$是问题(P_i)，$i=1,2,\cdots,p$的最优解，又因(P_i)，$i=1,2,\cdots,p$在$\bar{x}$处满足文献[10]中的约束品性，从而存在不全为零的$\alpha_k\in C_2$，$k=1,2,\cdots,m$和$\mu_j\geqslant 0,j\neq i$使得

$$\alpha_k^{\mathrm{T}}g(\bar{x})=0,k=1,2,\cdots,m。$$

且$[\nabla f_i(\bar{x})+\sum\limits_{j\neq i}^{p}\mu_j\nabla f_j(\bar{x})+\nabla\alpha_k^{\mathrm{T}}g(\bar{x})](x-\bar{x})\geqslant 0,\forall x\in C_1,i=1,2,\cdots,p$。

将以上p个式子相加得$\left[\sum\limits_{i=1}^{p}((1+\sum\limits_{j\neq i}^{p}\mu_j)\nabla f_i(\bar{x}))+\sum\limits_{k=1}^{m}\nabla\alpha_k^{\mathrm{T}}g(\bar{x})\right](x-\bar{x})\geqslant 0,\forall x\in C_1$。令

$$\frac{1+\sum\limits_{j\neq i}^{p}\mu_j}{\sum\limits_{i=1}^{p}(1+\sum\limits_{j\neq i}^{p}\mu_j)}=\bar{\lambda}_i,i=1,2,\cdots,p,\bar{y}=\frac{\sum\limits_{k=1}^{m}\alpha_k}{\sum\limits_{i=1}^{p}(1+\sum\limits_{j\neq i}^{p}\mu_j)_i}$$，有$\bar{\lambda}^{\mathrm{T}}e=1$且

$$[\sum_{i=1}^{p}\bar{\lambda}_i\nabla f_i(\bar{x})+\nabla\bar{y}^{\mathrm{T}}g(\bar{x})](x-\bar{x})\geqslant 0,\forall x\in C_1,$$

即存在 $\bar{\lambda}>0,\bar{y}\in C_2$ 使得

$$\bar{y}^{\mathrm{T}}g(\bar{x})=0,\tag{4}$$

且

$$[\nabla\bar{\lambda}^{\mathrm{T}}f(\bar{x})+\nabla\bar{y}^{\mathrm{T}}g(\bar{x})]^{\mathrm{T}}(x-\bar{x})\geqslant 0,\ \forall\, x\in C_1。\tag{5}$$

又因 $\bar{x}\in C_1$,C_1 是凸锥,因此 $x+\bar{x}\in C_1$,对任意的 $x\in C_1$ 成立。

在(5)式中,用 $x+\bar{x}$ 替换 x 得$[\nabla\bar{\lambda}^{\mathrm{T}}f(\bar{x})+\nabla\bar{y}^{\mathrm{T}}g(\bar{x})]^{\mathrm{T}}x\geqslant 0,\forall\, x\in C_1$,即$-[\nabla\bar{\lambda}^{\mathrm{T}}f(\bar{x})+\nabla\bar{y}^{\mathrm{T}}g(\bar{x})]\in C_1^*$,意味着$(\bar{\lambda},\bar{x},\bar{y})$是$(\mathrm{MD})_1$ 的可行解。再将 $x=0,x=2\bar{x}$ 带入(5)式得

$$[\nabla\bar{\lambda}^{\mathrm{T}}f(\bar{x})+\nabla\bar{y}^{\mathrm{T}}g(\bar{x})]^{\mathrm{T}}\bar{x}=0,\tag{6}$$

再由(4)、(6)式得$\bar{\lambda}^{\mathrm{T}}f(\bar{x})=\lambda^{\mathrm{T}}f(\bar{x})+\bar{y}^{\mathrm{T}}g(\bar{x})-\bar{x}^{\mathrm{T}}[\nabla(\lambda^{\mathrm{T}}f+\bar{y}^{\mathrm{T}}g)(\bar{x})]$,故$(\bar{\lambda},\bar{x},\bar{y})$是(MOP)的可行解且(MOP)和$(\mathrm{MD})_1$ 的目标函数值相等。

若定理1中的条件满足,则$(\bar{\lambda},\bar{x},\bar{y})$是$(\mathrm{MD})_1$ 的有效解。 证毕

注2 类似于定理5,可以证明$(\mathrm{MD})_2\sim(\mathrm{MD})_4$ 的强对偶定理.

定理6 (逆对偶)设$(\bar{u},\bar{y},\bar{\lambda})$是$(\mathrm{MD})_1$ 的有效解。如果:(i) 矩阵$\nabla^2(\bar{\lambda}^{\mathrm{T}}f+\bar{y}^{\mathrm{T}}g)(\bar{u})$是正定或者负定的;(ii) 向量组$\{\nabla f_1(\bar{u}),\cdots,\nabla f_p(\bar{u})\}$是线性无关的,其中 $p\leqslant n$。则 $\bar{u}$ 是(MOP)的可行解。此外,如果定理1中的广义凸性假设条件成立,则 $\bar{u}$ 是(MOP)的有效解。

证明 因$(\bar{u},\bar{y},\bar{\lambda})$是$(\mathrm{MD})_1$ 的有效解,故由 Fritz-John 型必要条件可知,存在 $\alpha,\eta\in\mathbf{R}_+^p$,$\beta\in C_1$,$\varepsilon\in\mathbf{R}^p$ 和 $\delta\in C_2^*$ 使得

$$(\alpha-\alpha^{\mathrm{T}}e\bar{\lambda})^{\mathrm{T}}\ \nabla f(\bar{u})+(\beta-\alpha^{\mathrm{T}}e\,\bar{u})^{\mathrm{T}}\ \nabla^2(\bar{\lambda}^{\mathrm{T}}f+\bar{y}^{\mathrm{T}}g)(\bar{u})=0,\tag{7}$$

$$\alpha^{\mathrm{T}}eg(\bar{u})+\nabla g(\bar{u})(\beta-\alpha^{\mathrm{T}}e\,\bar{u})-\delta=0,\tag{8}$$

$$\nabla f(\bar{u})(\beta-\alpha^{\mathrm{T}}e\,\bar{u})+\eta-\varepsilon e=0,\tag{9}$$

$$\beta^{\mathrm{T}}\ \nabla(\bar{\lambda}^{\mathrm{T}}f+\bar{y}^{\mathrm{T}}g)(\bar{u})=0,\tag{10}$$

$$\delta^{\mathrm{T}}\bar{y}=0,\tag{11}$$

$$\eta^{\mathrm{T}}\bar{\lambda}=0,\tag{12}$$

$$(\alpha,\beta,\delta,\eta)\geqslant 0,(\alpha,\beta,\delta,\eta,\varepsilon)\neq 0。\tag{13}$$

因 $\bar{\lambda}>0$,(12)式意味着 $\eta=0$。

(9)式乘以 $\bar{\lambda}$ 且由(12)式得 $\bar{\lambda}^{\mathrm{T}}[\nabla f(\bar{u})(\beta-\alpha^{\mathrm{T}}e\,\bar{u})-\varepsilon e]=0$。$(\alpha-\alpha^{\mathrm{T}}e\bar{\lambda})^{\mathrm{T}}\ \nabla f(\bar{u})$乘以 $\beta-\alpha^{\mathrm{T}}e\,\bar{u}$,再由上式可得$(\alpha-\alpha^{\mathrm{T}}e\bar{\lambda})^{\mathrm{T}}\ \nabla f(\bar{u})(\beta-\alpha^{\mathrm{T}}e\,\bar{u})=\alpha^{\mathrm{T}}[\nabla f(\bar{u})(\beta-\alpha^{\mathrm{T}}e\,\bar{u})-\varepsilon e]$。(7)式乘以 $\beta-\alpha^{\mathrm{T}}e\,\bar{u}$利用上式有

$$(\beta-\alpha^{\mathrm{T}}e\,\bar{u})^{\mathrm{T}}\ \nabla^2(\bar{\lambda}^{\mathrm{T}}f+\bar{y}^{\mathrm{T}}g)(\bar{u})(\beta-\alpha^{\mathrm{T}}e\,\bar{u})+\alpha^{\mathrm{T}}[\nabla f(\bar{u})(\beta-\alpha^{\mathrm{T}}e\,\bar{u})-\varepsilon e]=0。\tag{14}$$

由(9)式得

$$\alpha^{\mathrm{T}}[\nabla f(\bar{u})(\beta-\alpha^{\mathrm{T}}e\,\bar{u})-\varepsilon e]=-\alpha^{T}\eta=0\tag{15}$$

联合(14)、(15)式知$(\beta-\alpha^{\mathrm{T}}e\,\bar{u})^{\mathrm{T}}\ \nabla^2(\bar{\lambda}^{\mathrm{T}}f+\bar{y}^{\mathrm{T}}g)(\bar{u})(\beta-\alpha^{\mathrm{T}}e\,\bar{u})=0$。

由假设(i)得

$$\beta-\alpha^{\mathrm{T}}e\,\bar{u}=0。\tag{16}$$

由(7)、(16)式和假设(ii)知 $\alpha=\alpha^{\mathrm{T}}e\bar{\lambda}$。

下面证明 $\alpha\neq 0$。假设 $\alpha=0$,则由(16)式知 $\beta=0$,由(8)、(9)式得 $\delta=0,\varepsilon=0$。因此$(\alpha,\beta,\delta,\eta,\varepsilon)=0$,这与(13)式矛盾,因此 $\alpha\neq 0$。因 $\alpha\geqslant 0$,知 $\alpha^{\mathrm{T}}e>0$,从而由(16)式知 $\bar{u}\in C_1$,由(8)、(16)式得 $g(\bar{u})\in C_2^*$。因此,$\bar{u}$ 是(MOP)的可行解。

(9)式乘以 $\bar{y}$,由(11)、(16)式得 $\alpha^{\mathrm{T}}e\,\bar{y}^{\mathrm{T}}g(\bar{u})=0$,再由(10)、(16)式和前式知

$$\alpha^{\mathrm{T}}e\,\bar{u}^{\mathrm{T}}\ \nabla(\bar{\lambda}^{\mathrm{T}}f+\bar{y}^{\mathrm{T}}g)(\bar{u})-\alpha^{\mathrm{T}}e\,\bar{y}^{\mathrm{T}}g(\bar{u})=0。$$

因 $\alpha^{\mathrm{T}}e>0$ 得$\bar{y}^{\mathrm{T}}g(\bar{u})-\bar{u}^{\mathrm{T}}\ \nabla(\bar{\lambda}^{\mathrm{T}}f+\bar{y}^{\mathrm{T}}g)(\bar{u})=0$,因此$f(\bar{u})=f(\bar{u})-\{\bar{y}^{\mathrm{T}}g(\bar{u})-\bar{u}^{\mathrm{T}}\ \nabla(\bar{\lambda}^{\mathrm{T}}f+\bar{y}^{\mathrm{T}}g)(\bar{u})\}e$。这意味着(MOP)在 $\bar{u}$ 处的目标函数值和$(\mathrm{MD})_1$ 在$(\bar{\lambda},\bar{u},\bar{y})$处的目标函数值相等,因此由定理1知 $\bar{u}$ 是(MOP)的有效解。 证毕

定理7 设$(\bar{u},\bar{y},\bar{\lambda})$是$(\mathrm{MD})_2$ 的有效解。如果:(i) 矩阵$\nabla^2(\bar{\lambda}^{\mathrm{T}}f+\bar{y}^{\mathrm{T}}g)(\bar{u})$是正定或者负定的;(ii) 向量组$\{\nabla f_1(\bar{u}),\cdots,\nabla f_p(\bar{u})\}$是线性无关的,其中 $p\leqslant n$。则 $\bar{u}$ 是(MOP)的可行解。此外,如果定理2中的广义凸性假设条件成立,则 $\bar{u}$ 是(MOP)的有效解。

证明 因$(\bar{u},\bar{y},\bar{\lambda})$是$(\mathrm{MD})_2$ 的弱有效解,故由 Fritz-John 型必要条件可知,存在 $\alpha,\eta\in\mathbf{R}_+^p$,$\beta\in C_1$,$\varepsilon\in\mathbf{R}^p$ 和

$\delta\in C_2^*$ 使得：

$$(\alpha-\gamma\bar{\lambda})^{\mathrm{T}}\nabla f(\bar{u})+(\beta-\gamma\bar{u})^{\mathrm{T}}\nabla^2(\bar{\lambda}^{\mathrm{T}}f+\bar{y}^{\mathrm{T}}g)(\bar{u})=0,\tag{17}$$

$$(\beta-\gamma\bar{u})^{\mathrm{T}}\nabla g(\bar{u})+\gamma g(\bar{u})-\delta=0,\tag{18}$$

$$\nabla f(\bar{u})(\beta-\gamma\bar{u})+\eta-\varepsilon e=0,\tag{19}$$

$$\beta^{\mathrm{T}}\nabla(\bar{\lambda}^{\mathrm{T}}f+\bar{y}^{\mathrm{T}}g)(\bar{u})=0,\tag{20}$$

$$\gamma[y^{\mathrm{T}}g(\bar{u})-\bar{u}^{\mathrm{T}}\nabla(\bar{\lambda}^{\mathrm{T}}f+y^{\mathrm{T}}g)(\bar{u})]=0,\tag{21}$$

$$\delta^{\mathrm{T}}\bar{y}=0,\tag{22}$$

$$\eta^{\mathrm{T}}\bar{\lambda}=0,\tag{23}$$

$$(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\eta)\geqslant 0,(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\eta,\varepsilon)\neq 0。\tag{24}$$

因 $\bar{\lambda}>0$，由(23)式得 $\eta=0$。

(18)式乘以 $\bar{y}$ 由(22)式得 $(\beta-\gamma\bar{u})^{\mathrm{T}}\nabla\bar{y}^{\mathrm{T}}g(\bar{u})+\gamma\bar{y}^{\mathrm{T}}g(\bar{u})=0$，再由此式和(20)、(21)式得

$$(\beta-\gamma\bar{u})^{\mathrm{T}}\nabla(\bar{\lambda}^{\mathrm{T}}f)(\bar{u})=0。\tag{25}$$

(19)式乘以 $\bar{\lambda}$ 有

$$(\beta-\gamma\bar{u})^{\mathrm{T}}\nabla(\bar{\lambda}^{\mathrm{T}}f)(\bar{u})=\varepsilon。\tag{26}$$

比较(25)、(26)式有 $\varepsilon=0$。

(17)式乘以 $\beta-\gamma\bar{u}$，再由(19)式知 $(\beta-\gamma\bar{u})^{\mathrm{T}}\nabla^2(\bar{\lambda}^{\mathrm{T}}f+\bar{y}^{\mathrm{T}}g)(\bar{u})(\beta-\gamma\bar{u})=0$。由假设(i)得

$$\beta=\gamma\bar{u}。\tag{27}$$

由(17)、(27)式和假设(ii)有

$$\alpha=\gamma\bar{\lambda}。\tag{28}$$

下面证明 $\alpha\neq 0$。假设 $\alpha=0$，则由(27)、(28)式得 $\gamma=0,\beta=0$。由(18)式得 $\delta=0$。因此 $(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\eta,\varepsilon,\varepsilon)=0$，这与(24)式矛盾。因此 $\alpha\neq 0$ 且 $\gamma\neq 0$。由(27)式知 $\bar{u}\in C_1$，由(18)式和 $\delta\in C_2^*$ 得 $g(\bar{u})\in C_2^*$，因此，$\bar{u}$ 是(MOP)的可行解。

最后，由定理 2 知 $\bar{u}$ 是(MOP)的有效解。　　证毕

定理 8　设 $(\bar{u},\bar{y},\bar{\lambda})$ 是 $(\mathrm{MD})_3$ 的有效解，如果：(i) 矩阵 $\nabla^2(\bar{\lambda}^{\mathrm{T}}f+\bar{y}^{\mathrm{T}}g)(\bar{u})$ 是正定或者负定的；(ii) $\nabla(\bar{y}^{\mathrm{T}}g)(\bar{u})\neq 0$。则 $\bar{u}$ 是(MOP)的可行解。此外，如果定理 3 中的广义凸性假设条件成立，则 $\bar{u}$ 是(MOP)的有效解。

证明　因 $(\bar{u},\bar{y},\bar{\lambda})$ 是 $(\mathrm{MD})_3$ 的弱有效解，故由 Fritz-John 型必要条件可知，存在 $\alpha,\eta\in\mathbf{R}_+^p$，$\beta\in C_1$，$\varepsilon\in\mathbf{R}^p$ 和 $\delta\in C_2^*$ 使得：

$$(\alpha-\alpha^{\mathrm{T}}e\bar{\lambda})\nabla f(\bar{u})+(\beta-\alpha^{\mathrm{T}}e\bar{u})^{\mathrm{T}}\nabla^2(\bar{\lambda}^{\mathrm{T}}f+\bar{y}^{\mathrm{T}}g)(\bar{u})+(\gamma-\alpha^{\mathrm{T}}e)\nabla\bar{y}^{\mathrm{T}}g(\bar{u})=0,\tag{29}$$

$$(\beta-\alpha^{\mathrm{T}}e\bar{u})^{\mathrm{T}}\nabla g(\bar{u})+\gamma g(\bar{u})-\delta=0,\tag{30}$$

$$\nabla f(\bar{u})(\beta-\alpha^{\mathrm{T}}e\bar{u})+\eta-\varepsilon e=0,\tag{31}$$

$$\beta^{\mathrm{T}}\nabla(\bar{\lambda}^{\mathrm{T}}f+\bar{y}^{\mathrm{T}}g)(\bar{u})=0,\tag{32}$$

$$\gamma y^{\mathrm{T}}g(\bar{u})=0,\tag{33}$$

$$\delta^{\mathrm{T}}\bar{y}=0,\tag{34}$$

$$\eta^{\mathrm{T}}\bar{\lambda}=0,\tag{35}$$

$$(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\eta)\geqslant 0,(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\eta,\varepsilon)\neq 0。\tag{36}$$

因 $\bar{\lambda}>>0$，(35)式意味着 $\eta=0$。

(31)式乘以 $\bar{\lambda}$，由(35)式得

$$\bar{\lambda}^{\mathrm{T}}[\nabla f(\bar{u})(\beta-\alpha^{\mathrm{T}}e\bar{u})-\varepsilon e]=0。\tag{37}$$

(30)式乘以 $\bar{y}$，再由(33)、(34)式得

$$(\beta-\alpha^{\mathrm{T}}e\bar{u})^{\mathrm{T}}\nabla\bar{y}^{\mathrm{T}}g(\bar{u})=0。\tag{38}$$

(29)式乘以 $\beta-\alpha^{\mathrm{T}}e\bar{u}$，由(37)、(38)式可得

$$(\beta-\alpha^{\mathrm{T}}e\bar{u})^{\mathrm{T}}\nabla^2(\bar{\lambda}^{\mathrm{T}}f+\bar{y}^{\mathrm{T}}g)(\bar{u})(\beta-\alpha^{\mathrm{T}}e\bar{u})+\alpha^{\mathrm{T}}[\nabla f(\bar{u})(\beta-\alpha^{\mathrm{T}}e\bar{u})-\varepsilon e]=0。\tag{39}$$

由(31)式得

$$\alpha^{\mathrm{T}}[\nabla f(\bar{u})(\beta-\alpha^{\mathrm{T}}e\bar{u})-\varepsilon e]=-\alpha^{\mathrm{T}}\eta=0。\tag{40}$$

结合(39)、(40)式有

$$(\beta-\alpha^{\mathrm{T}}e\bar{u})^{\mathrm{T}}\nabla^2(\bar{\lambda}^{\mathrm{T}}f+\bar{y}^{\mathrm{T}}g)(\bar{u})(\beta-\alpha^{\mathrm{T}}e\bar{u})=0。$$

由假设(i)与上式知

$$\beta=\alpha^{\mathrm{T}}e\bar{u}。\tag{41}$$

下证 $\alpha\neq0$。假设 $\alpha=0$,则由(41)式知 $\beta=0$,(29)式退化为 $\gamma\nabla\bar{y}^{\mathrm{T}}g(\bar{u})=0$。

由假设(ii)得 $\gamma=0$,再由(30)、(31)式得 $\delta=0,\varepsilon=0$。因此$(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\eta,\varepsilon)=0$,这与(36)式矛盾,因此 $\alpha\neq0$,即有 $\alpha^{\mathrm{T}}e>0$,从而(41)式意味着 $\bar{u}\in C_1$。再由(30)、(41)式和 $\gamma=\alpha^{\mathrm{T}}e>0$ 知 $g(\bar{u})\in C_2^*$。因此,$\bar{u}$ 是(MOP)的可行解。

由(32)、(41)式和 $\alpha^{\mathrm{T}}e>0$ 知$f(\bar{u})=f(\bar{u})-\{\bar{u}^{\mathrm{T}}\nabla(\bar{\lambda}^{\mathrm{T}}f+\bar{y}^{\mathrm{T}}g)(\bar{u})\}e$。

因此,(MOP)在 $\bar{u}$ 处的目标函数值和$(\mathrm{MD})_3$ 在$(\bar{\lambda},\bar{u},\bar{y})$处的目标函数值相等。

最后,由定理 3 知 $\bar{u}$ 是(MOP)的有效解。 证毕

定理 9 设$(\bar{u},\bar{y},\bar{\lambda})$是$(\mathrm{MD})_4$ 的有效解,如果:(i) 矩阵$\nabla^2(\lambda^{\mathrm{T}}f+\bar{y}^{\mathrm{T}}g)(\bar{u})$正定或者负定;(ii) 向量$\{\nabla f_1(\bar{u}),\cdots,\nabla f_p(\bar{u}),\nabla\bar{y}^{\mathrm{T}}g(\bar{u})\}$线性无关,其中 $p\leqslant n-1$。则 $\bar{u}$ 是(MOP)的可行解。此外,如果定理 4 中的广义凸性假设条件成立,则 $\bar{u}$ 是(MOP)的有效解。

证明 因$(\bar{u},\bar{y},\bar{\lambda})$是$(\mathrm{MD})_3$ 的弱有效解,故由 Fritz-John 型必要条件可知,存在 $\alpha,\eta\in\mathbf{R}_+^p$,$\beta\in C_1$,$\gamma\in\mathbf{R}$ 和 $\delta\in C_2^*$ 使得:

$$(\beta-\gamma\bar{u})^{\mathrm{T}}\nabla^2(\bar{\lambda}^{\mathrm{T}}f+\bar{y}^{\mathrm{T}}g)(\bar{u})+\alpha^{\mathrm{T}}\nabla f(\bar{u})+\alpha^{\mathrm{T}}e\nabla\bar{y}^{\mathrm{T}}g(\bar{u})-\gamma\nabla(\bar{\lambda}^{\mathrm{T}}f+\bar{y}^{\mathrm{T}}g)(\bar{u})=0,\tag{42}$$

$$(\beta-\gamma\bar{u})^{\mathrm{T}}\nabla g(\bar{u})+\alpha^{\mathrm{T}}eg(\bar{u})-\delta=0,\tag{43}$$

$$\nabla f(\bar{u})(\beta-\gamma\bar{u})+\eta-\varepsilon e=0,\tag{44}$$

$$\beta^{\mathrm{T}}\nabla(\bar{\lambda}^{\mathrm{T}}f+\bar{y}^{\mathrm{T}}g)(\bar{u})=0,\tag{45}$$

$$\gamma\bar{u}^{\mathrm{T}}\nabla(\bar{\lambda}^{\mathrm{T}}f+\bar{y}^{\mathrm{T}}g)(\bar{u})=0,\tag{46}$$

$$\delta^{\mathrm{T}}\bar{y}=0,\tag{47}$$

$$\eta^{\mathrm{T}}\bar{\lambda}=0,\tag{48}$$

$$(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\eta)\geqslant0,(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\eta,\varepsilon)\neq0。\tag{49}$$

因 $\bar{\lambda}>0$,由(48)式知 $\eta=0$。

(44)式乘以 $\bar{\lambda}$,由(48)式知

$$\bar{\lambda}^{\mathrm{T}}[\nabla f(\bar{u})(\beta-\alpha\bar{u})-\varepsilon e]=0,\tag{50}$$

由(45)、(46)式得

$$(\beta-\gamma\bar{u})^{\mathrm{T}}\nabla(\bar{\lambda}^{\mathrm{T}}f+\bar{y}^{\mathrm{T}}g)(\bar{u})=0。\tag{51}$$

(42)式乘以 $\beta-\gamma\bar{u}$,再由上式知

$$(\beta-\gamma\bar{u})^{\mathrm{T}}\nabla^2(\bar{\lambda}^{\mathrm{T}}f+\bar{y}^{\mathrm{T}}g(\bar{u})(\beta-\gamma\bar{u})+\alpha^{\mathrm{T}}e\nabla\bar{y}^{\mathrm{T}}g(\bar{u})(\beta-\gamma\bar{u})+\alpha^{\mathrm{T}}\nabla f(\bar{u})(\beta-\gamma\bar{u})=0$$

结合(50)、(51)式得 $\alpha^{\mathrm{T}}e\nabla\bar{y}^{\mathrm{T}}g(\bar{u})(\beta-\gamma\bar{u})=-\alpha^{\mathrm{T}}e\nabla\bar{\lambda}^{\mathrm{T}}f(\bar{u})(\beta-\gamma\bar{u})=-\alpha^{\mathrm{T}}\varepsilon e$,再由(50)式和上式得

$$(\beta-\gamma\bar{u})^{\mathrm{T}}\nabla^2(\bar{\lambda}^{\mathrm{T}}f+\bar{y}^{\mathrm{T}}g)(\bar{u})(\beta-\gamma\bar{u})=\alpha^{\mathrm{T}}\eta=0$$

由假设(i)知

$$\beta=\gamma\bar{u}。\tag{52}$$

由(42)式,上式和假设(ii)知$\alpha=\gamma\bar{\lambda}$,$\gamma=\alpha^{\mathrm{T}}e$。

下证 $\alpha\neq0$。假设 $\alpha=0$,则由 $\gamma=\alpha^{\mathrm{T}}e$ 和(52)式知 $\gamma=0,\beta=0$。再由(43)、(44)式知 $\delta=0,\varepsilon=0$,因此$(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\eta,\varepsilon)=0$,这与(49)式矛盾,因此 $\alpha^{\mathrm{T}}e>0$。(52)式意味着 $\bar{u}\in C_1$。再由(43)、(52)式知 $g(\bar{u})\in C_2^*$。因此,$\bar{u}$ 是(MOP)的可行解。(43)式乘以 $\bar{y}$ 由(47)、(52)式可得$\alpha^{\mathrm{T}}\bar{y}^{\mathrm{T}}g(\bar{u})e=0$。由 $\alpha\geqslant0$,知$\bar{y}^{\mathrm{T}}g(\bar{u})e=0$。因此$f(\bar{u})=f(\bar{u})+\{\bar{y}^{\mathrm{T}}g(\bar{u})\}e$,即(MOP)在 $\bar{u}$ 处的目标函数值与$(\mathrm{MD})_4$ 在$(\bar{\lambda},\bar{u},\bar{y})$处的目标函数值相等。

最后,由定理 4 知 $\bar{u}$ 是(MOP)的有效解。 证毕

如果定理 9 中的条件(i)和(ii)不满足,则结果不一定成立。

例 3 对于例 2 中的目标函数,其对偶模型$(\mathrm{MD})_4$ 退化为

$$\begin{aligned}&\max\quad(e^{u_1+u_2}+y(u_1+u_2-1),(u_1+u_2)+y(u_1+u_2-1)),\\&\mathrm{s.\,t.}\quad\lambda_1e^{u_1+u_2}+\lambda_2+y\geqslant0,(u_1+u_2)(\lambda_1e^{u_1+u_2}+\lambda_2+y)\leqslant0,y\geqslant0。\end{aligned}$$

因 $u_1+u_2\leqslant0$,有$(-1,1)$是$(\mathrm{MD})_4$ 的弱有效解。矩阵$\nabla^2(\lambda^{\mathrm{T}}f+yg)(0,0)=\begin{pmatrix}\lambda_1&\lambda_1\\\lambda_1&\lambda_1\end{pmatrix}$不是正定或者负定的。

而且$\nabla f_1(0,0)=\begin{pmatrix} e^{u_1+u_2} \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\nabla f_2(0,0)=\begin{pmatrix} e^{u_1+u_2} \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$不是线性无关的，因此$(\mathrm{MD})_4$的条件不满足，故$(\mathrm{MD})_4$的弱有效解可能不是(MOP)的有效解。

事实上，(−1,1)确实不是(MOP)的有效解。

参考文献：

[1] Chandra S, Abha. A note on pseudo-invex and duality in nonlinear progrmming[J]. European Journal of Operational Reasearch, 2000, 122(1): 161-165.

[2] Yang X M, Yang X Q, Teo K L. Converse duality in nonlinear programming with cone constraints[J]. European Journal of Operational Reasearch, 2006, 170(2): 350-354.

[3] Wolfe P. A duality theorem for nonlinear programming[J]. Quart Appl Math, 1961, 12(5): 239-244.

[4] Mond B, Weir T. Generalized concavity and duality[C]// Schaible S, Ziemba W T. Generalized Concavity in Optimization and Economics. New York: Academic Press, 1981: 263-279.

[5] Mangasarian O L. Second and higher-order duality in nonlinear programming[J]. J Math Anal Appl, 1975, 51(3): 607-620.

[6] Mond B, Weir T. Generalized convexity and higher-order duality[J]. Journal of Mathematical Sciences, 1981/1982/1983, 16/17/18: 74-94.

[7] Nanda S, Das L N. Pseudo-invexity and duality in nonlinear programming[J]. European Journal of Operational Research, 1996, 88(3): 572-577.

[8] Bazaraa M S, Goode J J. On symmetric duality in nonlinear programming[J]. Operations Research, 1973, 21(1): 1-9.

[9] Hanson M A, Mond B. Further generalization of convexity in mathematical programming[J]. Journal of Informational and Optimization Sciences, 1982, 3: 25-32.

[10] Mangasarian O L. Nonlinear programming[M]. New York: McGraw-Hill, 1994.

[11] Yang X M, Yang X Q, Teo K L. Mixed type converse duality in multiobjective programming problems[J]. J Math Anal Appl, 2005, 304(1): 394-398.

[12] Bazaraa M S, Sherali H D, Shetty C M. Nonlinear programming: theorey and algorithms[M]. New York: John Wiley Sons Inc, 2006.

[13] Sawaragi, Yoshikazu. Date, theory of multiobjective optimization[D]. Japan: Department of Applied Matheatics Konan Uinversity, 1985.

[14] Yang X M, Yang X Q, Teo K L. Huard type second-order converse duality for nonlinear programming[J]. Appl Math Lett, 2005, 18(2): 205-208.

[15] Yang X M, Zhang P. On second-order converse duality for a nondifferentiable programming problem[J]. Bull Austral Math Soc, 2005, 72(2): 265-270.

[16] Yang X M, Teo K L. A converse duality theorem on higher-order dual models in nondifferentiable mathematical programming[J]. Optim Lett, 2012, 6(1): 11-15.

[17] Husain I, Rueda N G, Jabeen Z. Fritz john second-order duality for nonlinear programming[J]. Appl Math Lett, 2001, 14(4): 513-518.

[18] Ahmad I, Husain Z, Sharma S. Higher-order duality in nondifferentiable multiobjective programming[J]. Numer Func Anal Optimi, 2007, 28(9/10): 989-1002.

[19] Ahmad I, Husain Z, Sharma S. Higher-order duality in nondifferentiable minimax programming with generalized type I functions[J]. J Optim Theory Appl, 2009, 141(1): 1-12.

Operations Research and Cybernetics

Duality in Multiobjective Programming with Cone Constraints

LI Hongmei[1,2], GAO Ying[1]

(1. College of Mathematics Science, Chongqing Normal University, Chongqing 401331;

2. Chayuan Xincheng Middle School of Nanan District of Chongqing, Chongqing 401336, China)

Abstract: We establish four dual models for multiobjective programming problem with cone constraints and discuss weak duality theorems, strong duality theorems and converse duality theorems by using Fritz-John type necessary condition under generalized convexity assumptions. Our results extend several existing results of the existing literature.

Key words: multiobjective programming with cone constraints; generalized-invexity; duality theorems

(责任编辑　黄　颖)