2015 年 7 月　　重庆师范大学学报(自然科学版)　　Jul. 2015
第 32 卷 第 4 期　　Journal of Chongqing Normal University (Natural Science)　　Vol. 32 No. 4

运筹学与控制论

DOI:10.11721/cqnuj20150410

向量优化中集合的一些拓扑与代数性质*

张万里，刘金杰，赵克全
(重庆师范大学 数学学院，重庆 401331)

摘要:在假设 B 下,证明了 int $(S+F)=\text{int } S+F$,建立了两个集合拓扑闭包相等与拓扑内部相等之间的等价条件。结合 Flores-Bazán 等人的思想,基于集合的代数闭包和代数内部提出了假设 B_1。在假设 B_1 下,证明了 cor $(S+F)=\text{cor } S+F$,得到了集合的代数闭包一定是代数闭集,代数内部一定是代数开集等结果。这些结果是对假设 B 下集合性质的进一步补充和拓展。

关键词:假设 B;拓扑性质;代数性质

中图分类号:O221.6　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2015)04-0008-04

1 预备知识

向量优化是具有重要应用价值的、新兴的和多学科交叉的研究领域,是最优化及应用研究中十分重要的研究内容。解的统一性概念和标量化研究是向量优化问题研究中非常重要的两个方面。解的概念和标量化的研究通常需要借助于 free-disposal 集和改进集等大量数学工具,见文献[1-7]。

2007 年,Bonnisseau 等人[4]在 P 是闭凸锥的情况下提出了 free-disposal 假设 P。2010 年,Tammer 等人[5]又在 P 是闭凸锥的情况下提出了强 free-disposal 假设 P_S。2011 年,Flores-Bazán 等人[8]在不涉及凸锥 P 的情况下提出了更广的假设 B。此外,Flores-Bazán 等人研究了假设 B 下集合的一些拓扑性质,并在假设 B 条件下得到了统一解的标量化结果。其它一些关于假设 B 的研究结果见文献[9]等。

受文献[8,10-11]等研究工作的启发,在假设 B 下证明了 int $(S+F)=\text{int } S+F$,cl $(S+F)=\text{cl}(\text{int } S+F)$,基于拓扑闭包和拓扑内部建立了两个集合的等价条件。结合 Flores-Bazán 等人的思想在实线性空间中提出了假设 B_1,并在假设 B_1 下,证明了 cor $(S+F)=\text{cor } S+F$,$(S+F)^c=(\text{cor } S+F)^c$,得到了集合的代数闭包一定是代数闭集,代数内部一定是代数开集等结果。基于代数闭包和代数内部的概念建立了两个集合的等价条件。这些结果是对假设 B 性质的进一步补充和推广。

下面给出本文将要用到的一些记号。$\mathbf{R}^n$ 表示 n 维欧几里得空间,且:

$$\mathbf{R}^n_+=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_i\geqslant 0,i=1,2,\cdots,n\},\mathbf{R}^n_{++}=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_i>0,i=1,2,\cdots,n\}。$$

cl S,int S,S^c,cor S 分别表示 S 的拓扑闭包、拓扑内部、代数闭包、代数内部。

2 假设 B 下集合的一些拓扑性质

这一部分假设 Y 是实拓扑线性空间。Flores-Bazán 等人[8]提出的假设 B 如下。

假设 B　$0\neq q\in Y$,$S\subseteq Y$,使得 $\text{cl } S+\mathbf{R}^1_{++}q\subseteq\text{int } S$。

注 1　若 $S\subseteq Y$ 满足假设 B,则 int $S\neq\varnothing$。

注 2　显然 $S\subseteq Y$ 满足假设 B,S 不一定是凸集也不一定是锥。

下面给出将要用到的引理。

* 收稿日期:2014-05-28　　修回日期:2015-03-03　　网络出版时间:2015-3-24 13:53
资助项目:国家自然科学基金项目(No. 11301574;No. 11271391);第二批重庆市高等学校青年骨干教师资助计划;重庆市研究生科研创新项目(No. CYS14136)
作者简介:张万里,男,研究方向为向量优化理论,E-mail: mathwlzhang@163.com;通信作者:赵克全,副教授,E-mail: kequanz@163.com
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.n.20150324.1353.031.html

引理 1[8]　设 $S\subseteq Y$ 为非空集,S 关于 $0\neq q\in Y$ 满足假设 B,则 $\mathrm{int}\,(\mathrm{cl}\,S)=\mathrm{int}\,S$;$\mathrm{cl}\,(\mathrm{int}\,S)=\mathrm{cl}\,S$。

引理 2[10]　设 $S,F\subseteq Y$ 为两个非空集,若 $\mathrm{int}\,S\neq\varnothing$,则 $\mathrm{int}\,S+F\subseteq\mathrm{int}\,(S+F)$。

Tanka 等人[10]在凸性条件下证明了 $\mathrm{int}\,(S+F)=\mathrm{int}\,S+F$。下面在假设 B 条件下证明相同的结果。

定理 1　设 $S,F\subseteq Y$ 为两个非空集,S 关于 $0\neq q\in Y$ 满足假设 B,则 $\mathrm{int}\,(S+F)=\mathrm{int}\,S+F$。

证明　由引理 2 得 $\mathrm{int}\,S+F\subseteq\mathrm{int}\,(S+F)$,故只需证明 $\mathrm{int}\,(S+F)\subseteq\mathrm{int}\,S+F$。

$\forall x\in\mathrm{int}\,(S+F)$,由定义存在一个零邻域 U 使得 $x-U\subseteq S+F$。则存在 $r\in\mathbf{R}^1_{++}$,使得 $rq\in U$,故 $x-rq\in x-U\subseteq S+F$。即 $x\in S+rq+F$。由 S 关于 $0\neq q\in Y$ 满足假设 B,得 $x\in S+rq+F\subseteq\mathrm{int}\,S+F$。

由 x 的任意性得 $\mathrm{int}\,(S+F)\subseteq\mathrm{int}\,S+F$。　证毕

推论 1　设 $S,F\subseteq Y$ 为两个非空集,分别关于 $0\neq q_1,q_2\in Y$ 满足假设 B,则

$$\mathrm{int}\,S+\mathrm{int}\,F=\mathrm{int}\,(S+F)=\mathrm{int}\,S+F=S+\mathrm{int}\,F=\mathrm{int}\,S+\mathrm{cl}\,F=\mathrm{cl}\,S+\mathrm{int}\,F。$$

注 3　设 $S,F\subseteq Y$ 为两个非空集,分别关于 $0\neq q\in Y$ 满足假设 B,推论 1 的结论显然成立。

Breckner[11]证明了在 F 是凸锥情况下 $\mathrm{cl}\,(S+F)=\mathrm{cl}\,(\mathrm{int}\,S+F)$ 成立,下面的例子表明:S 关于 $0\neq q\in Y$ 满足假设 B,F 不是凸锥 $\mathrm{cl}\,(S+F)=\mathrm{cl}\,(\mathrm{int}\,S+F)$ 也成立。

例 1　令 $Y=\mathbf{R}^2$,且:

$S=\{(x_1,x_2)\mid 1\leqslant x_1+x_2,1\leqslant x_2\}\cup\{(x_1,x_2)\mid 1\leqslant x_1,0\leqslant x_2\leqslant 1\}$,$F=\{(x_1,x_2)\mid 0\leqslant x_1\leqslant 1,0\leqslant x_2\leqslant 1\}$。
则 $\mathrm{cl}\,(S+F)=\mathrm{cl}\,(\mathrm{int}\,S+F)=S$。

定理 2　设 $S,F\subseteq Y$ 为两个非空集,S 关于 $0\neq q\in Y$ 满足假设 B,则 $\mathrm{cl}\,(S+F)=\mathrm{cl}\,(\mathrm{int}\,S+F)$。

证明　根据文献[8]的注 4.1 有 $S+\mathbf{R}^1_{++}q=\mathrm{cl}\,S+\mathbf{R}^1_{++}q=\mathrm{int}\,S$。故 $S+\mathbf{R}^1_{++}q+F=\mathrm{int}\,S+F$。进而得

$$\mathrm{cl}\,(S+F)\subseteq\mathrm{cl}\,(S+F)+\mathbf{R}^1_{+}q\subseteq\mathrm{cl}\,((S+F)+\mathbf{R}^1_{++}q)\subseteq\mathrm{cl}\,(\mathrm{int}\,S+F)。$$

此外,显然有 $\mathrm{cl}\,(\mathrm{int}\,S+F)\subseteq\mathrm{cl}\,(S+F)$。　证毕

推论 2　设 $S,F\subseteq Y$ 为两个非空集,分别关于 $0\neq q_1,q_2\in Y$ 满足假设 B,则

$$\mathrm{cl}\,(\mathrm{int}\,S+\mathrm{int}\,F)=\mathrm{cl}\,(\mathrm{int}\,S+F)=\mathrm{cl}\,(S+\mathrm{int}\,F)=\mathrm{cl}\,(S+F)。$$

注 4　设 $S,F\subseteq Y$ 为两个非空集,分别关于 $0\neq q\in Y$ 满足假设 B,推论 2 的结论显然成立。

定理 3　设 $S,F\subseteq Y$ 为两个非空集,分别关于 $0\neq q_1,q_2\in Y$ 满足假设 B,则

$$\mathrm{cl}\,S=\mathrm{cl}\,F\Leftrightarrow\mathrm{int}\,S=\mathrm{int}\,F\Leftrightarrow\mathrm{int}\,S\subseteq F\subseteq\mathrm{cl}\,S\Leftrightarrow\mathrm{int}\,F\subseteq S\subseteq\mathrm{cl}\,F。$$

证明　1）首先证明 $\mathrm{cl}\,S=\mathrm{cl}\,F\Leftrightarrow\mathrm{int}\,S=\mathrm{int}\,F$。

若 $\mathrm{cl}\,S=\mathrm{cl}\,F$,则由引理 1 得 $\mathrm{int}\,S=\mathrm{int}\,(\mathrm{cl}\,S)=\mathrm{int}\,(\mathrm{cl}\,F)=\mathrm{int}\,F$;

若 $\mathrm{int}\,S=\mathrm{int}\,F$,则由引理 1 得 $\mathrm{cl}\,S=\mathrm{cl}\,(\mathrm{int}\,S)=\mathrm{cl}\,(\mathrm{int}\,F)=\mathrm{cl}\,F$。

2）接下来证明 $\mathrm{cl}\,S=\mathrm{cl}\,F\Leftrightarrow\mathrm{int}\,S\subseteq F\subseteq\mathrm{cl}\,S$。同理可证 $\mathrm{cl}\,S=\mathrm{cl}\,F\Leftrightarrow\mathrm{int}\,F\subseteq S\subseteq\mathrm{cl}\,F$。

若 $\mathrm{cl}\,S=\mathrm{cl}\,F$,则 $\mathrm{int}\,S=\mathrm{int}\,F$,进而得 $\mathrm{int}\,S=\mathrm{int}\,F\subseteq F\subseteq\mathrm{cl}\,F=\mathrm{cl}\,S$;

若 $\mathrm{int}\,S\subseteq F\subseteq\mathrm{cl}\,S$,则由引理 1 得 $\mathrm{cl}\,S=\mathrm{cl}\,(\mathrm{int}\,S)\subseteq\mathrm{cl}\,F\subseteq\mathrm{cl}\,(\mathrm{cl}\,S)=\mathrm{cl}\,S$,故 $\mathrm{cl}\,S=\mathrm{cl}\,F$。　证毕

3 假设 B_1 下集合的一些代数性质

这一部分假定 Y 是实线性空间。利用 Flores-Bazán 等人[8]的思想基于集合的代数结构提出假设 B_1:$0\neq q\in Y$,$S\subseteq Y$,使得 $S^c+\mathbf{R}^1_{++}q\subseteq\mathrm{cor}\,S$。

注 5　若 $S\subseteq Y$ 满足假设 B_1,则 $\mathrm{cor}\,S\neq\varnothing$。

注 6　显然 $S\subseteq Y$ 满足假设 B_1,S 不一定是凸集也不一定是锥。

下面给出这一部分将要用到的基本概念和引理。

引理 3[10]　设 $S,F\subseteq Y$ 为两个非空集,若 $\mathrm{cor}\,S\neq\varnothing$,则 $\mathrm{cor}\,S+F\subseteq\mathrm{cor}\,(S+F)$。

定义 1[12]　设 $S\subseteq Y$,S 的代数内部为 $\mathrm{cor}\,S=\{s\in S\mid\forall h\in Y,\exists\varepsilon>0,\forall t\in[0,\varepsilon],s+th\in S\}$。

定义 2[12]　设 $S\subseteq Y$,S 的代数闭包为 $S^c=\{x\in Y\mid\exists h\in Y,\forall\varepsilon>0,\exists t\in[0,\varepsilon],x+th\in S\}$。

引理 4[13]　设 $S,F\subseteq Y$ 为两个非空集,则 $S^c+F^c\subseteq(S+F)^c$。

受到文献[10-11]研究工作的启发,这部分将探讨在假设 B_1 条件下集合的代数性质。其中文献[10]在 $S,F\subseteq Y$ 均为凸集时证明了 $\mathrm{cor}\,(S+F)=\mathrm{cor}\,S+F$,下面的例子表明:在非凸情形下,上述结论也成立。

例 2　令 $Y=\mathbf{R}^2$,且 $S=\{(x_1,x_2)\mid 1\leqslant x_1+x_2,1\leqslant x_2\}\cup\{(x_1,x_2)\mid 0\leqslant x_1,0\leqslant x_2\leqslant 1\}$,$F=\{(x_1,x_2)\mid 1\leqslant x_1^2+$

$x_2^2, 0\leqslant x_1\leqslant 1, 0\leqslant x_2\leqslant 1\}$。经计算得

$$\text{cor }(S+F)=\text{cor }S+F=\{(x_1,x_2)\mid 2<x_1+x_2, 2<x_2\}\cup\{(x_1,x_2)\mid 1<x_1^2+x_2^2, 0<x_1, 0<x_2\}。$$

定理 4　设 $S,F\subseteq Y$ 为两个非空集，S 关于 $0\neq q\in Y$ 满足假设 B_1，则 $\text{cor }(S+F)=\text{cor }S+F$。

证明　由引理3得 $\text{cor }S+F\subseteq\text{cor }(S+F)$，故只需证明 $\text{cor }(S+F)\subseteq\text{cor }S+F$。

$\forall x\in\text{cor }(S+F)$，由定义得，对于 $q\in Y$，存在 $r\in\mathbf{R}^1_{++}$，使得 $x-rq\in S+F$，即 $x\in S+rq+F$。结合 S 满足假设 B_1，得 $x\in S+rq+F\subseteq\text{cor }S+F$。因此 $\text{cor }(S+F)\subseteq\text{cor }S+F$。　证毕

推论 3　设 $S,F\subseteq Y$ 为两个非空集，分别关于 $0\neq q_1,q_2\in Y$ 满足假设 B_1，则

$$\text{cor }S+\text{cor }F=\text{cor }(S+F)=\text{cor }S+F=S+\text{cor }F=\text{cor }S+F^c=S^c+\text{cor }F。$$

注 7　设 $S,F\subseteq Y$ 为两个非空集，分别关于 $0\neq q\in Y$ 满足假设 B_1，推论3的结论显然成立。

定理 5　设 $S,F\subseteq Y$ 为两个非空集，S 关于 $0\neq q\in Y$ 满足假设 B_1，则 $(S+F)^c=(\text{cor }S+F)^c$。

证明　首先证明 $S+\mathbf{R}^1_{++}q=\text{cor }S$。

$\forall x\in\text{cor }S$，由定义对于 $q\in Y$，存在 $r\in\mathbf{R}^1_{++}$，使得 $x-rq\in S$。则 $x\in S+rq\subseteq S+\mathbf{R}^1_{++}q$。故 $\text{cor }S\subseteq S+\mathbf{R}^1_{++}q$。结合 S 满足假设 B_1，得 $S+\mathbf{R}^1_{++}q\subseteq S^c+\mathbf{R}^1_{++}q\subseteq\text{cor }S$。故 $S+\mathbf{R}^1_{++}q=\text{cor }S$。因此 $S+\mathbf{R}^1_{++}q+F=\text{cor }S+F$。结合引理4得

$$(S+F)^c\subseteq(S+F)^c+\mathbf{R}^1_{+}q\subseteq((S+F)+\mathbf{R}^1_{++}q)^c\subseteq(\text{cor }S+F)^c$$

此外，显然有 $(\text{cor }S+F)^c\subseteq(S+F)^c$。　证毕

推论 4　设 $S,F\subseteq Y$ 为两个非空集，分别关于 $0\neq q_1,q_2\in Y$ 满足假设 B_1，则

$$(\text{cor }S+\text{cor }F)^c=(\text{cor }S+F)^c=(S+\text{cor }F)^c=(S+F)^c。$$

注 8　设 $S,F\subseteq Y$ 为两个非空集，分别关于 $0\neq q\in Y$ 满足假设 B_1，推论4的结论显然成立。

定理 6　设 $S\subseteq Y$ 为非空集且关于 $0\neq q\in Y$ 满足假设 B_1，则 $(\text{cor }S)^c=S^c$；$\text{cor }(S^c)=\text{cor }S$。

证明　1）显然 $(\text{cor }S)^c\subseteq S^c$。下证 $S^c\subseteq(\text{cor }S)^c$。

$\forall x\in S^c$，$\forall r\in\mathbf{R}^1_{++}$，由 S 关于 $0\neq q\in Y$ 满足假设 B_1 得 $x+rq\in S^c+\mathbf{R}^1_{++}q\subseteq\text{cor }S$。取 $h=q\in Y$，则对任意 $\varepsilon>0$，令 $r\in[0,\varepsilon]$，取 $t_0=r$，有 $x+t_0h\in\text{cor }S$。根据代数闭包的定义得 $x\in(\text{cor }S)^c$。由 x 的任意性得 $S^c\subseteq(\text{cor }S)^c$。

2）显然 $\text{cor }S\subseteq\text{cor }(S^c)$，下证 $\text{cor }(S^c)\subseteq\text{cor }S$。

$\forall y\in\text{cor }(S^c)$，由定义对于 $h=-q\in Y$，存在 $\varepsilon_0>0$，使得 $y+\varepsilon_0(-q)\in S^c$。即 $y\in S^c+\varepsilon_0q\subseteq\text{cor }S$。由 y 的任意性得 $\text{cor }(S^c)\subseteq\text{cor }S$。　证毕

对于一般的集合 $\text{cor }S$ 不一定是代数开集，S^c 不一定是代数闭集，但通过下面的例子可以看出：$S\subseteq Y$ 关于 $0\neq q\in Y$ 满足假设 B_1，$\text{cor }S$ 是代数开集，S^c 是代数闭集。

例 3　令 $Y=\mathbf{R}^2$，$q=(1,1)$ 且 $S=\{(x_1,x_2)\mid 2\leqslant x_1+x_2, x_1\leqslant 0, 2\leqslant x_2)\}\cup\{(x_1,x_2)\mid 1\leqslant x_1+x_2, 0\leqslant x_1, 0\leqslant x_2)\}$。能够验证 S 关于 $0\neq q\in Y$ 满足假设 B_1，且：

$$\text{cor }S=\text{cor }(\text{cor }S)=\{(x_1,x_2)\mid 2<x_1+x_2, x_1\leqslant 0, 2\leqslant x_2\}\cup\{(x_1,x_2)\mid 1<x_1+x_2, 0<x_1, 0<x_2\},$$
$$S^c=(S^c)^c=S。$$

定理 7　设 $S\subseteq Y$ 为非空集且关于 $0\neq q\in Y$ 满足假设 B_1，则 $\text{cor }S=\text{cor }(\text{cor }S)$；$S^c=(S^c)^c$。

证明　1）$\forall x\in\text{cor }S$。则任意 $h\in Y$，对于 $(h-q)\in Y$，存在 $\varepsilon_0>0$，任意 $t\in[0,\varepsilon]$ 有 $x+t(h-q)\in S$。即 $x+th\in S+tq\in\text{cor }S$。故 $x\in\text{cor }(\text{cor }S)$。由 x 的任意性可得 $\text{cor }S\subseteq\text{cor }(\text{cor }S)$。另一方面，显然有 $\text{cor }(\text{cor }S)\subseteq\text{cor }S$。

2）由引理4和 S 满足假设 B_1 得 $(S^c)^c+\mathbf{R}^1_{+}q\subseteq(S^c+\mathbf{R}^1_{++}q)^c\subseteq(\text{cor }S)^c\subseteq S^c$，故 $(S^c)^c\subseteq S^c$。此外，显然 $S^c\subseteq(S^c)^c$。　证毕

定理 8　设 $S,F\subseteq Y$ 为两个非空集，分别关于 $0\neq q_1,q_2\in Y$ 满足假设 B_1，则

$$S^c=F^c\Leftrightarrow\text{cor }S=\text{cor }F\Leftrightarrow\text{cor }S\subseteq F\subseteq S^c\Leftrightarrow\text{cor }F\subseteq S\subseteq F^c。$$

证明　1）首先证明 $S^c=F^c\Leftrightarrow\text{cor }S=\text{cor }F$。

若 $S^c=F^c$，则由定理6得 $\text{cor }S=\text{cor }(S^c)=\text{cor }(F^c)=\text{cor }F$；

若 $\text{cor }S=\text{cor }F$，则由定理6得 $S^c=(\text{cor }S)^c=(\text{cor }F)^c=F^c$。

2）接下来证明 $S^c=F^c \Leftrightarrow \mathrm{cor}\ S\subseteq F\subseteq S^c$。同理可证 $S^c=F^c \Leftrightarrow \mathrm{cor}\ F\subseteq S\subseteq F^c$。

若 $S^c=F^c$，则 $\mathrm{cor}\ S=\mathrm{cor}\ F$。故 $\mathrm{cor}\ S=\mathrm{cor}\ F\subseteq F\subseteq F^c=S^c$。同理可证 $\mathrm{cor}\ F\subseteq S\subseteq F^c$。

若 $\mathrm{cor}\ S\subseteq F\subseteq S^c$，由定理 6 和定理 7 得 $S^c=(\mathrm{cor}\ S)^c\subseteq F^c\subseteq (S^c)^c=S^c$，故 $S^c=F^c$。 证毕

4 结论

本文在假设 B 下基于拓扑内部、拓扑闭包的概念得到了 $\mathrm{int}\ (S+F)=\mathrm{int}\ S+F$ 等拓扑性质，在假设 B_1 下基于代数内部、代数闭包的概念证明了 $\mathrm{cor}\ (S+F)=\mathrm{cor}\ S+F$ 等代数性质，这些结果是对向量优化中集合性质的进一步补充和拓展。假设 B 是研究向量优化问题的有力数学工具，借助于集合的这些性质，可进一步研究解的统一性概念、解的存在性、解的性质及标量化等向量优化问题。

参考文献：

[1] Zhao K Q, Yang X M. A unified stability result with perturbations in vector optimization[J]. Optim Lett, 2013, 7(8): 1913-1919.

[2] Zhao K Q, Yang X M, Peng J W. Weak E-optimal solution in vector optimization[J]. Taiwan J Math, 2013, 17(4): 1287-1302.

[3] Zhao K Q, Yang X M. E-Benson proper efficiency in vector optimization[J]. Optimization, 2013, 64(4): 739-752.

[4] Bonnisseau J M, Crettez B. On the characterization of efficient production vectors[J]. Econ Theory, 2007, 31(2): 213-223.

[5] Tammer C, Zălinescu C. Lipschitz properties of the scalarization function and applications[J]. Optimization, 2010, 59(2): 305-319.

[6] 夏远梅，张万里，赵克全. 向量优化中改进集的对偶性质[J]. 重庆师范大学学报：自然科学版，2014，31(5)：26-30.
Xia Y M, Zhang W L, Zhao K Q. Dual characterizations of improvement set in vector optimization[J]. Journal of Chongqing Normal University: Natural Science, 2014, 31(5): 26-30.

[7] 廖伟，赵克全. 向量优化问题 ε-弱有效解的 Lagrange 乘子定理[J]. 重庆师范大学学报：自然科学版，2013，30(6)：22-24.
Liao W, Zhao K Q. A Lagrangian multiplier theorem of ε-weakly efficient solutions in vector optimization problems with set-valued maps[J]. Journal of Chongqing Normal University: Natural Science, 2013, 30(6): 22-24.

[8] Flores-Bazán F, Hernández E. A unified vector optimization problem: complete scalarizations and applications[J]. Optimization, 2011, 60(12): 1399-1419.

[9] Flores-Bazán F, Hernández E. Optimality conditions for a unified vector optimization problem with not necessarily preordering relations[J]. J Global Optim, 2013, 56(2): 299-315.

[10] Tanaka T, Kuroiwa D. The convexity of A and B assures $\mathrm{int}\ A+B=\mathrm{int}\ (A+B)$[J]. Appl Math Lett, 1993, 6(1): 83-86.

[11] Breckner W W, Kassay G. A systematization of convexity concepts for sets and functions[J]. J Convex Anal, 1997, 4(1): 109-127.

[12] 史树中. 凸分析[M]. 上海：上海科学技术出版社，1990.
Shi S Z. Convex analysis[M]. Shanghai: Shanghai Science and Technology Press, 1990.

[13] 杨玉红. 集合的凸性及其应用[D]. 重庆：重庆师范大学，2007.
Yang Y H. Convexity of sets and its applications[D]. Chongqing: Chongqing Normal University, 2007.

Operations Research and Cybernetics

Some Topological and Algebraic Properties of Sets in Vector Optimization

ZHANG Wanli, LIU Jinjie, ZHAO Kequan

(College of Mathematics Science, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: In this paper, $\mathrm{int}\ (S+F)=\mathrm{int}\ S+F$ is proved under the assumption B. Moreover, we get equivalent conditions about two sets by the concepts of topological closure and topological interior. By means of the idea of Flores-Bazán et al, we present the assumption B_1. Under the assumption B_1, we obtain $\mathrm{cor}\ (S+F)=\mathrm{cor}\ S+F$. Based on the condition of assumption B_1, we get that the algebraic closure is closed and algebraic interior is open and so on. These results extend and supplement various existing properties of sets under assumption B_1.

Key words: assumption B; topological properties; algebraic properties

（责任编辑 黄 颖）