

稳定匹配:起源、定义和进展*

羊 英¹, 钟力炜², 王 斌³

(1. 上海第二工业大学 工学部, 上海 201209; 2. 上海交通大学 附属第一人民医院, 上海 200080;
3. 上海第二工业大学 经济管理学院, 上海 201209)

摘要:经济管理领域存在许多双边匹配决策问题,而匹配的稳定性对于决策制定非常重要。为了深入了解稳定匹配理论的本质、起源和目前发展现状,把该理论运用到当前的研究问题上,收集整理了该领域的国内外相关文献,在此基础上进行分析和综述。首先概述了当前理论研究和应用研究成果,介绍双边匹配和稳定匹配的起源,阐述稳定匹配的定义、基本定理和实现的机制,然后分析稳定匹配网格定理和结构特性,并考虑多方匹配的特性和相关理论,最后展望了稳定匹配的应用前景。稳定匹配有了较好的理论基础,但仍然存在许多亟待解决的问题,在应用领域有着广阔的领域。

关键词:双边匹配;稳定匹配;匹配网格;多方匹配

中图分类号:C934;O29

文献标志码:A

文章编号:1672-6693(2015)04-0023-08

双边匹配是指在一个问题中,存在两个群体(即双边),其中一个群体中的一个或多个主体(或成员)与另一个群体中的一个或多个主体(或成员)进行匹配的情形。双边匹配理论源自 1960 年 9 月 10 日《New Yorker》杂志的一篇文章^[1],文章介绍一名记者用了几周时间观察耶鲁大学本科招生办公室的运作情况。记者在最初观察到:招生人员往往无法了解每个申请人同时申请的大学数量,也不知道他们所录用的学生中有多少人打算进入耶鲁大学。这样导致的结果是:实际招收的新生人数要么是学校计划招收人数的一半,要么大大超出计划招收人数范围,达到计划招收人数的两倍。文章还指出申请人也存在类似的情况:即使申请人对某些学校有着明确的偏好,他也得让所有学校觉得他申请的就是首选。因为学校不可能把最热门的专业分给最不看重自己的申请人,因此双方都有故意隐瞒信息的动机,这使得整个过程变为一场庞大的猜测博弈。

类似的问题还广泛存在于生活中,如婚姻匹配问题、住院医师分配问题、学生宿舍分配问题等^[2]。在过去 50 多年里,匹配问题吸引了许多学者的关注。

在匹配问题研究中,关于匹配的“稳定性”得到了许多关注,因为“稳定性”这个基本概念具有特殊的结构特性,因此关于这个主题有相当多的文献,这些著作包括对组合和网格理论结构的纯数学研究、算法研究和对经济问题的应用研究。此外,该主题一直非常活跃,涌现了许多成果。2012 年,美国学者 Roth 和 Shapley 因为在稳定匹配研究方面的成果获得了诺贝尔经济学奖。稳定匹配理论综合使用博弈论、机制设计理论和实验经济学等方法,能够实现市场中供需双方高效、稳定的资源配置^[3]。

为了加深对稳定匹配问题的认识并且寻找进一步研究方向,本文先对国内外研究现状进行了综述,然后对稳定匹配的定义、起源和相关理论进行阐述,接着对当前研究应用领域按照主题进行了分类,最后在此基础上指出该理论研究及应用的发展前景。

1 研究发展现状

首先选用中国学术期刊网全文数据库(CNKI)数据库检索中文文献,以“稳定匹配”为主题,按照主题、题名和关键词等检索方式对“稳定匹配”相关文献进行了检索,然后选择 EBSCO 和 Science Direct 检索英文文献,以“stable matching”和“stable matchings”作为摘要、题名或关键词进行了检索。截止到 2014 年 9 月 9 日,检索到与“稳定匹配”研究主题相关度较高的中文文献和英文文献分别是 40 篇和 111 篇。

1. 1 国外理论研究现状

以“stable matching”或“stable matchings”为题名、关键词或摘要分别在 EBSCO 和 Science Direct 等数据库中进行检索,然后对文章进行过滤筛选,找出相关性非常强的文章共计 111 篇。首先,从发表年份上看,1994 年及以前发表的只有 18 篇,其中比较有代表性的文献 4~10 篇^[4-10];大部分为 1995 年之后发表的,其中 2000 年之后发表的共计 76 篇,仅 2007 年就有 10 篇。由此可见,近 10 年来,稳定匹配越来越受到学者们的关注;其次,从论文关注的主题分类来看,涉及到的主题大类共有 9 大类,具体分布如表 1 所示。

从表 1 中可以看到,围绕着稳定匹配的特性和算法的研究比较多,为 53 篇,占将近 50%,进一步选择主题为“stable matching”和“stable matchings”且时间是 2010 年到现在的文献进行分析,主要有:Lin Cui 等根据规模和循环偏好对网络服务的三方(数据源、服务器和用户)建立匹配模型,并设计了求解算法,以获得能尽量满足各方偏好的稳定匹配^[11];Keisuke Bando 对工人与公司的多对一匹配设计了一个改进的延迟接受算法,能找到一个工人最优化的稳定匹配^[12];Michael Schwarz 等针对目前主要研究侧重于公司最优化或工人最优化的现象,定义了一个基于工资的中间双边匹配^[13];Yoshiteru Ishida 等对婚姻问题进行制图,将其复制到动态系统,研究其稳定平衡和稳定匹配网络等特性^[14];S. Kiselgof 考虑了偏好为区间数的算法^[15];Ewa Drgas-Burchardt 等对婚姻匹配模型的稳定匹配数量的上界进行了研究^[16];Tamás Fleiner 等对室友问题研究了一个有效的算法寻找其稳定匹配^[17]。

表 1 稳定匹配国外研究主题分类

Tab.1 The subject classification of stable matching in overseas' research

主题	论文数/篇
Stable matching(s)	53
Nash equilibrium	18
Stable marriage/marriage problem	25
Matching problem	12
Economic theory	8
Economic literature	6
Economic behavior	5
Preference list	7
Roommate problem	6

说明:111 篇文章中,部分文章主题有交叉,故以上篇数相加之和不为 111。

以上研究内容表明:越来越多的学者关注稳定匹配内在原理和实现机制。其他的研究涉及到纳什均衡、经济学理论和行为、偏好分析等,在此不再赘述。

1. 2 我国理论研究现状

以“稳定匹配”为主题在中国期刊网(CNKI)数据库中进行检索,筛选掉相关性不大的一些文章后,整理得到 40 篇文章。从发表年份看,在 2000 年之前的仅有一篇,其他的都是在 2005 年之后的,可见我国开始该项研究较晚。另外,从 2010 年之后研究成果逐步增加,在 2013 年达到 13 篇,可见,稳定匹配理论研究和应用在我国越来越受到重视。

吴伟良讨论了最小价格稳定匹配,展示了这个问题的数学模型,论证了它的最优解的存在,并提出了一个多项式时间算法来计算它的最优解^[18];张振华等研究了电子中介的稳定匹配问题^[19-20];吴杰康等提出了根据各条件因素值及其所占比率进行量化匹配的思想,并提出一种基于稳定匹配机制的网格任务调度算法(Stable matching mechanism, SMM)^[21];刘永强等建立了针对稳定匹配结果的评价函数和评价规则,在此基础上提出了蚁群算法求解此问题的思路及适合此类问题求解的蚂蚁状态转移策略和信息要素更新策略,同时给出算法步骤^[22];邹正兴等利用模糊数的相关性质对具有模糊收益的合作对策进行了研究^[23]。

樊治平及其团队在运用稳定匹配理论解决多属性决策问题方面做了许多有价值的工作:樊治平等在多指标双边匹配决策方法进行了研究,主要有:电子中介中具有多属性评价信息的商品交易匹配问题^[24],电子采购中具有语言评价信息的买方与卖方交易匹配问题^[25],个体及协同因素下的员工与工作任务匹配问题^[26],具有多种形式信息的求职者与岗位双边匹配问题^[27],组织中员工与岗位匹配的问题^[28],风险投资商与风险企业的双边匹配问题^[29],知识服务中技术知识供给与需求的双边匹配问题^[30],IT 服务外包中的供给方与需求方的双边匹配决策问题^[31]等,在这基础上,提出了多指标双边匹配决策方法^[32];乐琦等对基于偏好序信息的满意双边匹配决策方法进行了研究:针对具有序值信息的双边匹配决策问题,提出一种求解方法^[33],李铭洋等针对基于序值偏好信息的一对多双边匹配问题,提出了一种决策方法^[34];樊治平等针对双边主体给出偏好序值信息的双边匹配问题给出了一种考虑稳定匹配条件的双边满意匹配决策方法^[35]。

从以上文献综述可以看到:无论是国内还是国际,都越来越重视稳定匹配及其相关理论的研究,研究和应用的领域都不断在扩展和深化,但仍然存在许多未解决的问题和未涉及的领域。

2 稳定匹配问题

在双边匹配问题中,匹配的稳定性对于解决实际问题有着重要意义。因此关于该领域的研究成果非常多。以下先对稳定匹配的基本定义及相关定理进行说明。

假定有一组男人 m 和一组女人 w 。相容 mw 对的含义指 m 和 w 愿意匹配(或结婚)。可行匹配 μ 指每个 m 和每个 w 出现在一对一(如一夫一妻制)中的一组兼容对 (m, w) 。如果 mw 出现在 μ 中,写作 $w = \mu(m)$ 或 $m = \mu(w)$ 。进一步假定:每个 $m(w)$ 对与其相容的异性成员有一个总偏好排序,写作 $w >_m w'$,表示相比 w' , m 更偏好 w 而不是 w' , $m >_w m'$ 表示相比 m' , w 更偏好 m ^[36]。

2.1 基本定义

如果一个男人 m 和女人 w 不是 μ 匹配,但彼此倾向于对方作为自己的配偶,则匹配 μ 不稳定。在此情况下,称 mw 配对为阻碍对。如果没有阻碍对,则匹配稳定。用符号表示如下。

如果对于所有 m 和 w 而言, $w >_m \mu(m)$ 意味着 $\mu(w) >_w m$, 则称 μ 是稳定的。即:如果 m 倾向于 w 作为其配偶,则 w 也倾向于 m 作为其配偶。

是否对任何偏好排序组都始终存在稳定匹配? Gale 和 Shapley 给出了肯定回答,证明如何采用简单的“求偶”算法进行推断,下文将进行介绍。

2.2 相关定理

以上对稳定匹配给出了定义,下面对稳定匹配相关定理进行介绍。

2.2.1 存在性定理 一个匹配问题始终存在稳定匹配。

证明 所有男人初始都被指定为未订婚。

步骤 1:一个男人 m 向其偏好排序中的第一个(相容)女人 w 求婚, m 和 w 现在指定为已订婚。

步骤 2A: m 以外的一个男人 m' 向其偏好排序中的第一个女人 w' 求婚。

步骤 2B: 情况 1, 如果 w' 未订婚, 则 w' 和 m' 变为已订婚状态; 情况 2, 如果 w' 已订婚, 即 $w = w'$, 则 w 拒绝男人 m 或其偏好排序较低的 m' , 被拒绝的男人变为未订婚状态。

通常在任何阶段, 如果所有男人已订婚或已被其所有相容配偶拒绝则停止, 反之进入下一步。

步骤 3A: 一个未订婚男人 m 向其排序最高的且在在上一步中尚未拒绝他的女人 w 求婚。

步骤 3B: 如果 w 未订婚, 则 m 和 w 变为已订婚状态。如果 w 已经订婚, 则拒绝其排序较低的 m 或已订婚的男人。被拒绝的男人变为未订婚状态。

以上关于稳定匹配的证明基于以下观察: m 向 w 求婚后, 要么(a) w 的情况更好, 与更心仪的男人订婚, 要么(b) m 的情况更差, 被 w 拒绝(因为他的潜在结婚对象现在减少了), 要么其他男人被拒绝。很明显, 这种情况不会一直持续, 当所有未订婚男人被所有女人拒绝后, 算法终止, 最终匹配稳定。因为对女人 w 来说, 如果她喜欢 m 超过她现在的伴侣, 意味着 w 在之前拒绝过 m , 而青睐其他人 m' , 她对最终伴侣(如果有)的喜欢仍高于 m' 。因此, 她目前的伴侣是她最喜欢的, 不可能存在“喜欢 m 超过她现在的伴侣”的情形。 证毕

最简单的 2 乘 2 例子说明: 可能存在不止一个稳定匹配。求偶算法的结果是否取决于男人求婚的顺序? 显然女人进行求婚的过程也会给出一个稳定匹配。这个问题在 Gale 和 Shapley 的第二个研究中得到解决^[2]。

2.2.2 第一最优性定理 在以上求偶算法中获得的匹配是所有稳定匹配中的 m 最大化, 即任何男人都不倾向于其他稳定匹配。

证明 假定存在一个稳定匹配 μ 使 m 获得更好状况, 则他必须与算法某个步骤中拒绝过他的某个女人 w 匹配, 而女人 w 对他的偏好高于 μ 匹配的 m , 为 m' , 但是 m' 也必须在 μ 下获得更好状况, 否则, m' 和 w 将构成阻碍对, 导致之前的稳定匹配不成立, 因此 m' 必须与以前拒绝他而选择 m'' 的 w' 构成 μ 匹配, 以此类推下去, 过程将永不结束, 成为矛盾。 证毕

推论 1 求偶算法获得的匹配与男人求婚的顺序无关。

考虑到最优性定理, 笔者将求偶算法获得的匹配称为 M -最优匹配。

2.3 实现机制^[3]

如何得到一个匹配问题的稳定匹配是在实际应用非常重要的问题, Shapley 等先后提出两种实现机制, 即 Deferred Acceptance 和 Top Trading Cycle, 一般翻译为: 延迟接受机制和首位交易循环机制。

2.3.1 Deferred acceptance(延迟接受机制) 延迟接受机制是一种多次重复的迭代算法,可应用于多个领域。1962 年,Gale 和 Shapley 首次提出“延迟接受”机制,将其应用于高校招生和婚姻问题分析。

下面以婚姻问题为例说明该机制的执行方式。

基本模型构建:参与双方是男人和女人,分别标记为: $M=\{m_1,m_2,\cdots,m_n\}$ 和 $W=\{w_1,w_2,\cdots,w_n\}$ 。

假设实行一夫一妻制,即一对一匹配,并且双方人数相等。假设任一男人对 n 个女人都明确的偏好排序,同时任一女人对 n 个男人也都有明确的偏好排序。“延迟接受”机制要解决的问题是:让每个男人都能选到最喜欢的(即偏好的)女人,同时让每个女人都能找到最喜欢的(即偏好的)男人。

该机制包括多个步骤,每步中都包括两个小步骤:

第 1-1 步:每个男人分别向其最喜欢的(即最偏好的)女人提出求婚;

第 1-2 步:每个女人从向她求婚的男人中,暂时接受最喜欢的那个男人;如果对所有向她求婚的男人都不喜欢,则可以全部拒绝;

第 2-1 步:所有在上一次未找到对象的男人再在其他女人(即排除已经求过婚但被拒绝的女人)中寻找最喜欢的女人提出求婚;

第 2-2 步:每个女人将上一步暂时接受的男人和新向其求婚的男人进行对比,暂时接受其更喜欢的男人;如果仍然不喜欢任何求婚的男人,仍可全部拒绝;

重复进行以上步骤,直到没有男人继续提出求婚时,该过程结束,此时得到的匹配结果即为最终匹配结果。

该机制之所以被称作“延迟接受”机制,是因为在该过程结束之前,男人和女人之间的匹配结果都是暂时的,已经被某个女人接受的男人仍有可能被下一个她更喜欢的男人替代,而只有在过程结束了得到的匹配结果才能被实际执行。

2.3.2 Top trading cycle(首位交易循环) 延迟接受机制需要耗费的时间较长。1974 年,Shapley 和 Scarf 首次提出首位交易循环机制。该机制更适合使用在单边(One-sided)交易市场,与延迟接受机制相比,该机制更能够提高匹配效率。

仍以上述婚姻匹配模型为例说明首位交易循环机制运作方式。

第 1 步:每个男人都列出其最喜欢的女人,同时每个女人也列出其最喜欢的男人,会出现这样的情况: $m_1 \rightarrow w_1 \rightarrow m_2 \rightarrow w_2 \rightarrow \cdots \rightarrow m_1$,即起点和终点是同一个男人,称这种情况为闭合循环。循环中的所有男人与其最喜欢的女人匹配,已获得匹配的男人和女人都退出该机制;

第 2 步:未获得匹配的每个男人在剩余的女人中列出其最喜欢的女人,同时未获得匹配的每个女人也在剩余的男人在列出其最喜欢的男人,结果是至少存在一个闭合循环,如同上一步骤,在该循环中的男人与其中意的女人匹配,获得匹配的男人、女人退出。

重复进行以上步骤,当所有女人都获得匹配,该过程结束。与延迟接受机制不同,在每一步中,一旦匹配成功,结果就会被执行,这样匹配效率就大大提高。

该机制之所以称为“首位交易循环”机制,是因为双方在任一步骤中都选择最偏好的对方,且总是存在闭合循环。

3 匹配网格(Lattice)

在以上第一最优性定理提出:男人的所有匹配集存在一个自然偏序,女人的匹配集存在另一个自然偏序。即如果对一些 m 存在 $\mu(m) \succ_m v(m)$ 而对任何 m 都不存在 $v(m) \succ_m \mu(m)$,则称为 $\mu \succ v$ 。

换句话说,每个男人在 μ 匹配下至少和在 v 匹配下的状况一样好,用符号 $\succ_w$ 表示。稳定匹配的下一个重要结构特性——网格定理,是基于 John Conway 的研究提出的^[37]。

3.1 网格定理

Knuth D. E 于 1976 年提出在婚姻匹配问题中,男人集合和女人集合产生的匹配中,有限的分布网格是不是就是稳定匹配集合^[38]? Blair 发现每个分配网格与婚姻问题的稳定匹配网格是同构的^[39-40]。

稳定匹配的网格定理可表述为:

1) 按 $\succ_w$ 或 $\succ_m$ 得到的稳定匹配顺序集称为网格。因此,如果 μ 和 v 稳定,则将每个 m 与其首选配偶 $\mu(m)$ 或 $v(m)$ 匹配也属于稳定匹配。

2) M 网格与 W 网格相反,即如果 $\mu >_{M^v}$ 则 $v >_{w^u} \mu$ 。

3.2 匹配网格特性

一般情况下,无法让所有男人和女人获得满意的匹配。情况 1:男人和女人数量不等,这一点是显然的;情况 2:男人女人数量相等,因为缺乏足够多的相容对,所以仍然存在不能获得匹配的男人和女人。一般不存在以下这种情况:某人在一个匹配下匹配,在其他匹配下不匹配。

Gale 和 Sotomayor 提出的匹配网格的其他特性如下^[41]:

1) 不变性定理:在一个稳定匹配中匹配的男人或女人在所有稳定匹配中匹配。

2) 比较静态定理:如果一个新的男人(女人)进入市场,则任何女人(男人)在 M 或 W 最优匹配中状况都不会更差。第一最优性定理提到,不存在令所有男人状况都更好的稳定匹配。

3) 第二最优性定理:不存在令所有男人(严格意义上)的状况都好于 μ^M 状况下的匹配。可以用求偶算法对该事实进行快速证明。即:假定存在令所有男人状况更好的匹配,则他们都必须匹配一个在算法中拒绝过他们的女人。因此,所有男人都必须在 μ 下匹配,因为如果任何男人是单身,则无法在不取代另一个状况将变差的男人的情况下与一个拒绝他的女人匹配。因此,在女人 w 收到第一个求婚时,算法终止。但这意味着 w 还没有拒绝任何人,因此已拒绝的女人数量小于男人数量,提出的匹配不成立。应指出一点,此结果也是严密的。

4 多方匹配

前面提到过,稳定匹配算法一直用于将医学院毕业生分配给医院。但是,在早期,它没有用于学生选大学情况,没有应用该算法的实际理由很多,其中一个重要原因在于排名排序对医学院学生这样的情况合理,但不适合大学招生情况。通常,大学对入学班级的整体组成感兴趣,尤其关注性别平衡、地理分布以及尤其最近以来的种族“多样化”等问题。下面的简单示例显示,经典模型无法处理此类问题。

示例:具有两个名额的大学 C 希望招收一个男学生和一个女学生,申请人有 4 个: m, w, m' 和 w' 。 C 的第一选择是 mw 对,但如果 m 不可入学,则选择为 $m'w$,如果 w 不可入学,则选择为 mw' 。在经典案例中, C 将被迫在 m' 和 w' 之间显示出偏好,而无论偏好哪一方,都与上面介绍的选择不一致。为了方便后面的使用,用下列符号表示上面的情况: $mw m' w' \rightarrow mw; w m' w' \rightarrow w m'; m m' w' \rightarrow m w'$ 。

因此如果 T 是 S 的子集,写作 $S \rightarrow T$,这意味着如果 S 可用,将选择 T 。用 c 表示选择函数, $S \rightarrow T$ 相当于 $c(S) = T$ 。

显示性偏好指选择函数给出的偏好,即如果 $c(S) = T$,则 T 显示出比可能选择的 S 的任何其他子集 T' 更受偏好。显示性偏好给出的子集排序是招生问题的合理排序,即:在协商的每个阶段,大学选择向仍可入学的学生的某个子集提供入学资格;相对称的,学生在仍未拒绝他的大学中选择继续申请的大学。

排序子集必须满足显示性偏好条件。即若某大学具有 q 个名额,申请该学校的学生集合 S 中人数大于 q , $c(S)$ 由 S 中的 q 个排名最高的学生组成,否则 $c(S) = S$ 。

另外一个更具代表性的例子是公司雇佣工人。如果允许一个工人被多个公司雇用,将得到一般多方匹配模型。在此模型中,假定工人和公司按显示性偏好排序其选择集合。Blair 推出此类模型^[39-40]。他在对 c 函数选择了合适条件下证明:婚姻匹配模型的许多结构特性可以转移到多方匹配情况。特别地,他证明稳定匹配集合构成网格,但他的并集运算不像婚姻问题的并集。此外,他获得的网格不可分配。Alkan 最近的一些工作证明,在选择函数上增加一个额外且相当合理的条件,可以获得具有正常并集定义的完全可分配网格^[42]。

5 理论应用及发展前景

5.1 理论应用

稳定匹配是先有实践后有理论的,最早的实践是 1952 年美国开展的全美住院医师匹配项目。现在该理论已逐渐应用到多个领域。如住院医师匹配、学生择校匹配、肾脏配对捐献等。最早应用该理论的是美国,同时该理论在加拿大、英国、韩国、荷兰、我国香港地区等都有应用^[3]。

近年来,稳定匹配理论的应用研究主要有美国医学院毕业生与实习医院相匹配的现实问题^[8]、人力资源管理领域^[26-28]、学生选课^[43]、动态联盟利益分配^[44-46]、IT 服务领域^[31] 和电子商务^[24-25] 等多方面,但在医院资源管理方面的应用尚未发现。

5.2 发展前景

理论研究方面,从第 1 部分的研究现状综述上看,越来越多的学者关注稳定匹配内在原理和实现机制,以及将稳定匹配与经济学、组织或个人行为、偏好分析等理论相结合进行研究。

应用方面,稳定匹配理论可操作性强,无论在宏观还是微观市场都有着应用潜力。在我国以下领域,该理论可能发挥较好的作用^[3]:1)教育领域,如高考录取、高校排课、中小学择校等;2)就业领域,如公司员工招聘、高校教师招聘、医院医生招聘、第三方人力资源公司人才招聘与推荐等;3)医疗领域,如专家预约、医技资源分配、器官移植、手术排程等;4)科研领域,如项目与研究团队的匹配等,重点是改进公共科研资源配置效率;5)政府部门资源调配与人力资源管理,如干部选拔和任用领域,如公务员招录等。

从理论上来说,稳定匹配具有很好的操作性和简洁的过程,但应用到实际领域还需要政策支持与管理水平的提高。如果能够解决这些问题,稳定匹配理论可以发挥更大的作用。

参考文献:

- [1] Kinkead, Katharine T. The brightest ever[J]. New Yorker, 1960, 36(30): 132-181.
- [2] Gale D, Shapley L S. Collage admissions and the stability of marriage[J]. American Mathematical Monthly, 1962(69): 9-15.
- [3] 宋紫峰, 石光. 稳定匹配理论的发展及在我国的应用前景[N]. 中国经济时报, 2014-2-17, 第 005 版.
Song Z F, Shi G. The development of stable matching theory and application prospect in China[N]. China Economic Times, Feb. 17, 2014: 5.
- [4] Balinski M, Ratier G. Graphs and matching[J]. American Mathematical Monthly, 1998, 101: 430-445.
- [5] Dubins L E, Freedman D. Machiavelli and the gale-shapley algorithm[J]. American Mathematical Monthly, 1981, 88: 485-494.
- [6] Guseld D, Irving R W. The stable marriage problem, structure and algorithms[M]. Cambridge: MIT Press, 1989.
- [7] Irving R W, Leather P. The complexity of counting stable marriages[J]. SIAM Journal on Computing, 1987(15): 532-543.
- [8] Roth A E. The college admissions problem is not equivalent to the marriage problem[J]. Journal of Economic Theory, 1985, 36: 277-288.
- [9] Roth A E, Sotomayor M. Two-sided matching: a study in game-theoretic modeling and analysis[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
- [10] Roth A E. On the allocation of residents to rural hospitals: A general property of two-sides matching markets[J]. Economics, 1986, 54(2): 425-427.
- [11] Lin C, Wei J J. Cyclic stable matching for three-sided networking services[J]. Computer Networks, 2013, 57(1): 351-363.
- [12] Bando K. A modified deferred acceptance algorithm for many-to-one matching markets with externalities among firms[J]. Journal of Mathematical Economics, 2014(52): 173-181.
- [13] Schwarz M, Yenmez M B. Median stable matching for markets with wages[J]. Journal of Economic Theory, 2011, 146(2): 619-637.
- [14] Ishida Y, Sato T. Asymmetry in diagrams of stable marriage problems: stable manifolds mapped from stable matchings[J]. Procedia Computer Science, 2014(35): 1379-1387.
- [15] Kiselgof S. Matchings with interval order preferences: efficiency vs strategy-proofness[J]. Procedia Computer Science, 2014(31): 807-813.
- [16] Burchardt E D, S witalski Z. A number of stable matchings in models of the Gale-Shapley type[J]. Discrete Applied Mathematics, 2013, 161(18): 2932-2936.
- [17] Fleiner T, Irving R W, Manlove D F. An algorithm for a super-stable roommates problem[J]. Theoretical Computer Science, 2011, 412(50): 7059-7065.
- [18] 吴伟良, 最小价格稳定匹配[J]. 华东师范大学学报: 自然科学版, 1988(3): 22-29.
Wu W L. Minimum cost stable matching[J]. Journal of East China Normal University: Natural Science, 1988(3): 22-29.
- [19] 张振华, 汪定伟. 基于 BPR 的电子中介业务流程[J]. 东北大学学报: 自然科学版, 2005, 26(11): 1029-1032.
Zhang Z H, Wang D W. BPR-Based business operation procedure in electronic brokering[J]. Journal of Northeastern University: Natural Science, 2005, 26(11): 1029-1032.
- [20] 张振华, 贾淑娟, 曲衍国, 等. 基于稳定匹配的电子中介匹配研究[J]. 控制与决策, 2008, 23(4): 388-391.
Zhang Z H, Jia S J, Qu Y G, et al. Matching problem of electronic broker based on stable bipartite matching[J]. Control and Decision, 2008, 23(4): 388-391.
- [21] 吴杰康, 蔺美美, 陈国通, 等. 基于稳定匹配机制的网格任务调度算法[J]. 系统仿真学报, 2008, 20(18): 4878-4888.
Wu J K, Lin M M, Chen G T, et al. Stable matching mechanism-based grid computing task scheduling algorithm[J]. Journal of System Simulation, 2008, 20(18):

- 4878-4888.
- [22] 刘永强,常青,熊华钢.改进蚁群算法求解多属性双边稳定匹配问题[J].信息与电子工程,2011,9(4):510-514.
Liu Y Q, Chang Q, Xiong H G. An improved ant colony algorithm for multi-attribute stable bipartite matching problems[J]. Information and Electronic Engineering, 2011,9(4):510-514.
- [23] 邹正兴,高作峰,张欣,等.模糊支付合作对策的模糊 Shapley 值[J].西南师范大学学报:自然科学版,2013,38(11):51-58.
Zou Z X, Gao Z F, Zhang X, et al. On fuzzy shapley value for cooperative games with fuzzy payoffs[J]. Journal of Southwest Normal University: Natural Science Edition, 2013,38(11):51-58.
- [24] 樊治平,陈希.电子中介中基于公理设计的多属性交易匹配研究[J].管理科学,2009,22(3):83-88.
Fan Z P, Chen X. Research on multi-attribute trade matching problem in electronic broker based on axiomatic design[J]. Journal of Management Science, 2009,22(3):83-88.
- [25] 陈希,樊治平.电子采购中具有语言评价信息的交易匹配问题研究[J].运筹与管理,2009,18(3):132-137.
Chen X, Fan Z P. Research on trade matching problem in electronic procurement with linguistic assessment information[J]. Operations Research and Management Science, 2009,18(3):132-137.
- [26] 陈希,樊治平,李玉花.个体及协同因素下的员工与工作任务匹配问题[J].工业工程与管理,2009,14(2):120-124.
Chen X, Fan Z P, Li Y H. Matching problem of employee and task based on individual and cooperative factors[J]. Industrial Engineering and Management, 2009,14(2):120-124.
- [27] 陈希,樊治平.考虑多种形式信息的求职者与岗位双边匹配研究[J].运筹与管理,2009,18(6):103-109.
Chen X, Fan Z P. Research on two-sided matching problem between employees and positions based on multiple format information[J]. Operations Research and Management Science, 2009,18(6):103-109.
- [28] 陈希,樊治平.组织中员工与岗位匹配的两阶段测评与选择方法[J].东北大学学报:自然科学版,2009,30(9):1337-1340.
Chen X, Fan Z P. Two-phase evaluation and selection to match employees with their positions in an organization [J]. Journal of Northeastern University: Natural Science, 2009,30(9):1337-1340.
- [29] 陈希,樊治平.基于公理设计的风险投资商与风险企业双边匹配[J].系统工程,2010,28(6):9-16.
Chen X, Fan Z P. Problem of two-sided matching between venture capitalists and venture enterprises based on axiomatic design[J]. Systems Engineering, 2010,28(6):9-16.
- [30] 陈希,樊治平,李玉花.技术知识供需双边匹配的两阶段决策分析方法[J].工业工程与管理,2010,15(6):22-26.
Chen X, Fan Z P, Li Y H. A two-phase decision analysis method for two-sided matching of technological knowledge supply and demand[J]. Industrial Engineering and Management, 2010,15(6):22-26.
- [31] 陈希,樊治平,李玉花.IT服务供需双边匹配的模糊多目标决策方法[J].管理学报,2011,8(7):1097-1101.
Chen X, Fan Z P, Li Y H. A fuzzy Multi-objective decision making method for two-sided Matching of supply and demanding in IT service [J]. Chinese Journal of Management, 2011,8(7):1097-1101.
- [32] 陈希,樊治平.多指标双边匹配决策方法研究[M].北京:经济科学出版社,2013.
Chen X, Fan Z P. Research on multi-criteria two-sided matching decision making methods[M]. Beijing: Economic Science Press, 2013.
- [33] 乐琦,樊治平.一种具有序值信息的双边匹配决策方法[J].系统工程学报,2012,27(2):185-192.
Yue Q, Fan Z P. Method for two-sided matching decision-making with ordinal numbers[J]. Journal of Systems Engineering, 2012,27(2):185-192.
- [34] 李铭洋,樊治平,乐琦.考虑稳定匹配条件的一对多双边匹配决策方法[J].系统工程学报,2013,28(4):454-463.
Li M Y, Fan Z P, Yue Q. Decision analysis method for one-to-many two-sided matching considering stable matching condition[J]. Journal of Systems Engineering, 2013, 28(4):454-463.
- [35] 樊治平,李铭洋,乐琦.考虑稳定匹配条件的双边满意匹配决策方法[J].中国管理科学,2014,22(4):112-118.
Fan Z P, Li M Y, Yue Q. Decision on analysis method for two-sided satisfied matching considering stable matching condition [J]. Chinese Journal of Management Science, 2014,22(4):112-118.
- [36] Gale D. The two-sided matching problem, origin, development and current issues [J]. International Game Theory Review, 2001(3):237-252.
- [37] Conway, John B. On algebras of operators with totally ordered lattice of invariant sub-spaces[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1971,28(1):163-168.
- [38] Knuth D. Marriage stables[M]. Montreal: Montreal Univ Press, 1976.
- [39] Blair C. Every finite distributive lattice is a set of stable matching[J]. Journal of Combinatorial Theory: A, 1984, 37:353-356.
- [40] Blair C. The lattice structure of the set of stable matching with multiple partners[J]. Mathematics of Operations Re-

search, 1988(13):619-628.

- [41] Gale D, Sotomayor M. Some remarks on the stable matching problem[J]. Discrete Applied Mathematics, 1985(11): 223-232.
- [42] Alkan A, Gale D. Stable schedule matching under revealed preference[J]. Journal of Economic Theory, 2003, 112: 289-306.
- [43] 邓蔚之, 刘强, 任志虎, 等. 优化的 Gale-Shapley 算法在学生选课中的应用[J]. 湖南工业大学学报, 2013, 27(1): 67-70.
- Deng W Z, Liu Q, Reng Z H, et al. The application of optimal Gale-Shapley algorithm in students courses selection [J]. Journal of Hunan University of Technology, 2013, 27(1): 67-70.
- [44] 戴建华, 薛恒新. 基于 Shapley 值法的动态联盟伙伴企业利益分配策略[J]. 中国管理科学, 2004, 12(4): 33-36.

Dai J H, Xue H X. The strategy of profit allocation among partners in dynamic alliance based on the Shapley value [J]. Chinese Journal of Management Science, 2004, 12(4): 33-36.

- [45] 占辉斌, 郭锦塘, 詹海斌, 等. Shapley-value 法在战略联盟利益分配中的应用[J]. 商业研究, 2005, 327(19): 35-37.
- Zhan H B, Guo J Y, Zhan H B, et al. The application of Shapley-value in gains distribution of strategic alliance [J]. Commercial Research, 2005, 327(19): 35-37.
- [46] 张捍东, 严钟, 方大春. 应用 ANP 的 Shapley 值法动态联盟利益分配策略[J]. 系统工程学报, 2009, 24(2): 205-211.
- Zhang H D, Yan Z, Fang D C. Strategies of profit allocation in enterprises' dynamic alliance value based on Shapley applying ANP [J]. Journal of Systems Engineering, 2009, 24(2): 205-211.

Operations Research and Cybernetics

Stable Matching: Origin, Definition and Development

YANG Ying¹, ZHONG Liwei², WANG Bin¹

(1. School of Engineering, Shanghai Second Polytechnic University, Shanghai 201209;

2. Shanghai First People's Hospital, Shanghai 200080;

3. School of Economics and Management, Shanghai Second Polytechnic University Shanghai 201209, China)

Abstract: There are many two-sided matching decision making problems in economics and management area, and the stability of matching is very important to decision making. In order to understand the essence, origin and state of the art of stable matching theory, and apply the theory to the current research problems, we collect and organize relevant literature, based on it; we analyze and review the literature. Firstly, the current theory studies and application studies have been summarized, the origin of two-sided matching and stable matching have been introduced, the definition, basic principles and implement mechanism of stable matching have been described; Then, the lattice principle and its structure characteristics of stable matching have been analyzed, the theory and application related to multiple partner matching have been studied. Finally, the application areas and application prospects are forecast. Stable matching has had good theory foundation, but there still exist many problems to be solved, and there is a broad area in application.

Key words: two sided matching; stable matching; matching lattice; multiple partner matching

(责任编辑 游中胜)