DOI:10.11721/cqnuj20150419

强一致收敛条件下序列系统与极限系统的关联性*

罗 飞,金渝光
(重庆师范大学 数学学院,重庆 401331)

摘要:混沌动力系统是广大研究者的研究课题,而很少有研究混沌中的序列系统与极限系统。在混沌动力系统的基础上对混沌中的序列系统与极限系统进行研究,先在一致收敛条件下对序列映射非游荡点进行讨论,得出序列映射不能保持到极限映射。在此基础上,引入比一致收敛更强的收敛即强一致收敛,在强一致收敛条件下,序列映射的非游荡点与极限映射具有某种保持性。同时还讨论了在强一致收敛条件下,序列映射非游荡点与极限映射非游荡点集合的包含关系,得出序列映射非游荡点上确界的极限包含于极限映射非游荡点和若序列映射非游荡点集等于全空间则极限映射非游荡点集等于全空间。对序列映射和极限映射的研究为混沌动力系统中的序列动力系统和极限动力系统的研究作出了准备。

关键词:非游荡点;一致收敛;强一致收敛;序列系统;极限系统

中图分类号:O19 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-6693(2015)04-0078-03

一致收敛、强一致收敛是数学分析中重要概念,很多动力性状在一致收敛和强一致收敛下,序列系统的性质都可以保持到极限系统,如秦斌等[1]人研究了一致收敛下传递性,邓小霞[2]则在强一致收敛下研究了函数轨道稠密性,这对研究序列系统和极限系统做出一些准备。然而在研究序列映射动力系统中,只有少部分序列动力系统的性质在一致收敛条件下,其极限映射可以得到保持。就需要引进比一致收敛更强的收敛即强一致收敛,在强一致收敛条件下,可以得到更多的序列映射保持到极限映射。文献[3]探讨了在一致收敛条件很多序列动力性状不能保持到极限映射上。本文首先讨论了在一致收敛下,非游荡点序列的动力系统不能保持到极限系统。在此基础上引进了比一致收敛更强的收敛即强一致收敛,并证明了序列映射非游荡点及性质在强一致收敛下可以保持到极限映射。文献[4]探讨了在强一致收敛下映射序列的某些动力系统,如极小性、传递性。本文继续讨论了在强一致收敛下极限系统与序列系统中得相应集合之间的关系。

1 预备知识

下面给出有关符号和概念。设(X,f)为动力系统,其中 X 为具有度量 d 的紧致度量空间,及 f 为 X 上的连续自映射。$f^0=id,f^1=f,f^2=f\circ f,\cdots,f^n=f^{n-1}\circ f$,其中$\circ$表示映射的复合。

定义 1[5] 设(X,d)是紧致度量空间,对每一个正整数 n,$fn:X\to X$ 是连续映射,若对任意 $\varepsilon>0$,存在 $n0$,使得当 $n>n_0$ 时,任意 $x\in X$,有 $d(f_n(x),f(x))<\varepsilon$,则称 f_n 一致收敛 f,记作 $f_n\Rightarrow f$。

定义 2[6] 设 X 是紧致度量空间,点 $x\in X$ 称为 f 的非游荡点,如果对 $\forall\varepsilon>0$,$\exists n\in\mathbf{N}_+$,$\exists y\in B(x,\varepsilon)$使得 $f^n(y)\in B(x,\varepsilon)$,$f$ 的全体非游荡点组成的集合记$\Omega(f)$。

2 非游荡点序列映射在一致收敛极限保持性

根据文献[3-4]知,在一致收敛的情况下,动力系统中的连续映射序列$\{f_n\}$的不动点、链回归点在一致收敛下条件下是极限映射 f 的不动点、链回归点,故序列映射下不动点和链回归点与极限映射具有保持性。但非游荡点序列$\{f_n\}$在一致收敛的情况下,其极限映射 f 并不能保持。

下面举出例子来说明在一致收敛下,序列映射非游荡点$\{f_n\}$极限不能保持到 f。

例 1 连续映射 $f_n:I\to I$,$I=[0,1]$,定义为

* **收稿日期**:2014-04-10 **修回日期**:2015-03-20 **网络出版时间**:2015-5-15 10:56
资助项目:2013 年重庆市研究生教育教学研究项目(No. YJG133037);2013 年重庆高校创新团队建设计划资助项目(No. KJPB201308)
作者简介:罗飞,男,研究方向为拓扑动力系统,E-mail:395279493@qq.com;**通信作者**:金渝光,教授,E-mail:tsgjyg@aliyun.com
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.n.20150515.1056.012.html

$$f_n(x)=\begin{cases}x,x\in\left[0,\dfrac{1}{n+2}\right]\\ \dfrac{2}{n+2}-x,x\in\left[\dfrac{1}{n+2},\dfrac{2}{n+2}\right]\\ \dfrac{x}{n}-\dfrac{2}{n(n+2)},x\in\left[\dfrac{2}{n+2},1\right]\end{cases}\qquad (n=1,2,3,\cdots),$$

定义连续映射 $f\equiv 0,x\in I$。易证 $f_n\Rightarrow f$。

下证 $x\in\left(0,\dfrac{1}{n+2}\right)$都是$\{f_n\}$的非游荡点。

证明　对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists y\in B(x,\varepsilon)$，$\exists m=1$，$\forall x\in\left(0,\dfrac{1}{n+2}\right)$，$d(f_n^m(y),x)=d(y,x)<\varepsilon$。所以 $x\in\left(0,\dfrac{1}{n+2}\right)$都是$\{f_n\}$的非游荡点。但是 $f\equiv 0,x\in\left(0,\dfrac{1}{n+2}\right)$没有非游荡点。故在一致收敛条件下非游荡点序列$\{f_n\}$极限不能保持到 f。　证毕

通过上面的讨论得到，在一致收敛条件下序列映射不动点、链回归点可以保持到极限映射，然而序列映射非游荡点却不能保持到极限映射。下面引进更强的收敛即强一致收敛，在强一致收敛下，序列映射非游荡点与极限映射是否具有保持性呢？

3 强一致收敛下序列映射对非游荡点的保持性

非游荡点序列在一致收敛情况下，其极限不能保持到非游荡点，下面将给出比一致收敛更强的收敛即强一致收敛，讨论强一致收敛下序列映射非游荡点的保持性。

定义 3[5]　设(X,d)是紧致度量空间，对每一个正整数 n，$f_n:X\to X$ 是连续映射，若对任意 $\varepsilon>0$，存在 n_0，使得当 $n>n_0$ 时，对任意 $l\in\mathbf{N}$，任意 $x\in X$，有 $d(f_n^l(x),f^l(x))<\varepsilon$，则称 f_n 强一致收敛 f，记作 $f_n\xrightarrow{s}f$。

定理 1　设(X,d)是紧致度量空间，$\{(X,f_n)\}$为动力系统序列，$n\in\mathbf{N}$，有 $f_n\xrightarrow{s}f$，若 x 是$\{f_n\}(n=1,2,3,\cdots)$的一个非游荡点的，则 x 也是 f 的非游荡点。

证明　由 x 是 f_n 的非游荡点，对 $\forall\varepsilon>0\ \exists m\in\mathbf{N}_+$，$\exists y\in B(x,\varepsilon)$，得 $d(f_n^m(y),x)<\dfrac{\varepsilon}{2}$，又因 $f_n\xrightarrow{s}f$，存在正整数 $n0$，当 $n>n0$ 时，对任意正整数 $l(l=m)$和任意 $y\in X$ 有 $d(f_n^m(y),f^m(y))<\dfrac{\varepsilon}{2}$，则对上述的 $\forall\varepsilon>0$，$\exists m\in\mathbf{N}_+$，$\exists y\in B(x,\varepsilon)$，有 $d(f^m(y),x)\leqslant d(f_n^m(y),f^m(y))+d(f_n^m(y),x)<\dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$，即得 x 也是 f 的非游荡点。　证毕

在强一致收敛条件下，极限系统集合与序列系统集合存在一定的包含关系，故可以得到下面定理。

定理 2　设(X,d)是紧致度量空间，对每一个正整数 n，$f_n:X\to X$ 是连续映射，若 $f_n\xrightarrow{s}f$，则 $\limsup\limits_{n\to\infty}\Omega(f_n)\subset\Omega(f)$。

证明　设 $x\in\limsup\limits_{n\to\infty}\Omega(f_n)$，下证 $x\in\Omega(f)$。因为 $x\in\limsup\limits_{n\to\infty}\Omega(f_n)$，所以存在递增自然序列 $n_1<n_2<\cdots$，使得 $\forall\varepsilon>0$，$B\left(x,\dfrac{\varepsilon}{3}\right)\cap\Omega(f_{n_k})\neq\varnothing(k=1,2,\cdots)$。由映射$\{f_n\}$强一致收敛映射 f，对上述 $\varepsilon>0$，$\exists n_0$ 当 $n>n_0$，对 $\forall y\in X$，$\forall m\in\mathbf{N}_+$，有 $d(f_n^m(y),f^m(y))<\dfrac{\varepsilon}{3}$，存在 $k\in\mathbf{N}$，取 $n_k>n_0$，有 $d(f_{n_k}^m(y),f^m(y))<\dfrac{\varepsilon}{3}$，取 $x_k\in B\left(x,\dfrac{\varepsilon}{3}\right)\cap\Omega(f_{n_k})$，即对上述 $\varepsilon>0$，当 $n>n_k$，对 $\exists y\in X$，$\exists l\in\mathbf{N}_+$ 有

$$d(f^l(y),x)\leqslant d(f_{n_k}^l(y),f^l(y))+d(f_{n_k}^l(y),x_k)+d(x_k,x)<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}<\varepsilon。$$

故 $d(f^l(y),x)<\varepsilon$，故 $x\in\Omega(f)$，综上所述$\limsup\limits_{n\to\infty}\Omega(f_n)\subset\Omega(f)$。　证毕

对上面的定理，是否可以讨论，在强一致收敛下，是不是有$\limsup\limits_{n\to\infty}\Omega(f_n)=\Omega(f)$，这样关系成立？

例 2　记 $I=[0,1]$，对每一个 n，$f_n:I\to I$ 是连续映射，定义

$$f_n(x)=\begin{cases}0, x\in\left[0,\dfrac{1}{n}\right]\\ x-\dfrac{1}{n}, x\in\left[\dfrac{1}{n},1\right]\end{cases}\qquad (n=1,2,3,\cdots),$$

连续映射 $f:I\to I$ 定义为 $f(x)=x$，易知 $f_n(x)$强一致收敛 $f(x)$。

显然$\limsup\limits_{n\to\infty}\Omega(f_n)=\{0\}$，对 $f(x)=x$，$\Omega(f)=(0,1)$有$\limsup\limits_{n\to\infty}\Omega(f_n)\subset\Omega(f)$，故$\limsup\limits_{n\to\infty}\Omega(f_n)\neq\Omega(f)$。

接下来在强一致收敛下，极限系统的非游荡集与序列系统中的相应集合之间的关系，得到下面定理。

定理 3 设(X,d)是紧致度量空间，对每一个正整数 n，$f_n:X\to X$ 是连续映射若 $f_n\xrightarrow{s}f$，则有若对每一个正整数 n，有 $\Omega(f_n)=X$，则 $\Omega(f)=X$。

证明 由定理 2，若 $f_n\xrightarrow{s}f$，有$\limsup\limits_{n\to\infty}\Omega(f_n)\subset\Omega(f)$，可得到

$$\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=m}^{\infty}\Omega(f_n)\subset\Omega(f)。$$

由若对每一个正整数 n，有 $X=\Omega(f_n)$，由 $X=\bigcap\limits_{m=1}^{\infty}\bigcup\limits_{n=m}^{\infty}\Omega(f_n)\subset\Omega(f)\subset X$，故 $X=\Omega(f)$。 证毕

参考文献：

[1] 秦斌，严可颂，徐雪群.一致收敛下极限系统的传递性研究[J].广西师范学院学报：自然科学版，2009，26(3)：10-14.
Qin B, Yan K S, Xu X Q. The uniform convergence of transitivity of the limit system under[J]. Journal of Guangxi Teachers Education University: Natural Science Edition, 2009, 26 (3): 10-14.

[2] 邓小霞.序列函数在强一致收敛下极限函数轨道的稠密性[J].重庆工商大学学报：自然科学版，2013，2(3)：4-6.
Deng X X. The sequence of function limit in the strong uniform convergence under the function of track density[J]. Journal of Industrial and Commercial University of Chongqing: Natural Science Edition, 2013, 2(3): 4-6.

[3] Raghib A S, Kifah A H. Uniform convergence and chaotic behavior [J]. Nonliner Analysis, 2006, 10(65): 933-937.

[4] 曾凡平，严可颂，刘新和.强一致收敛与动力系统性质[J].广西大学学报：自然科学版，2008，33(3)：305-309.
Zeng F P, Yan K S, Liu X H. Strongly uniform convergence and some dynamical properties[J]. Journal of Guangxi University: Natural Science Edition, 2008, 33 (3): 305-309.

[5] 程其襄，张奠宙，魏国强.实变函数与泛函分析基础[M].北京：高等教育出版社，2009.
Cheng Q X, Zhang D Z, Wei G Q. Real variable function and functional analysis[M]. Beijing: Higher Education Press, 2009.

[6] 廖公夫，王立冬，范钦杰.映射迭代与混沌动力系统[M].北京：科学出版社，2013.
Liao G F, Wang L D, Fan Q J. The iterative mapping and chaotic dynamic system[M]. Beijing: Science Press, 2013.

The Condition of Strong Uniform Convergence of Relationship between Sequence System and Limit the System

LUO Fei, JIN Yuguang

(School of Mathematics Science, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: Chaotic dynamical system is a research topic of many researchers, but little research on the chaotic sequence system of limit system. This article is based on the chaotic dynamic system of chaos sequence and limit system research, this paper first in the uniform convergence of sequence mapping under the condition of non wandering point are discussed, the sequence mapping can not keep to the limit mapping. On this basis, the stronger convergence uniform convergence is in the strong uniform convergence, strong convergence conditions, non wandering point and limit mapping has a retention sequence mapping. Also discussed are the strong uniform convergence conditions, sequence mapping non wandering point and limit mapping non wandering contains the point set, the limit of sequence mapping non wandering point supremum is contained in the limit mapping non wandering point and if sequence mapping the set of non wandering points equal to the total space limit mapping the set of non wandering points equal to the total space. We prepared for the study on sequence mapping and limit mapping study of chaotic dynamical system in the sequence of power system and the limit of power system.

Key words: non wandering point; converges uniformly; strong convergence; sequence system; limit system

(责任编辑 游中胜)