

一类 Lurie 复杂网络混沌系统的保性能控制*

毛北行, 许宏伟

(郑州航空工业管理学院 数理系, 郑州 450015)

摘要:研究了 Lurie 复杂网络混沌系统的保性能控制问题的保性能控制问题, 基于 Lyapunov 稳定性理论和线性矩阵不等式处理方法, 得到了系统存在最优保性能控制律的充分性条件, 即 $\Omega_1 = P(L_1C + K) + (L_1C + K)^T P + \sigma_i \epsilon P^T P + Q + K^T R K + T < 0, \Omega_2 = \epsilon^{-1} N \sigma_i A^T A - T < 0$ 。而对应的 Lurie 非线性复杂网络系统存在最优保性能控制律的充分条件为: $\Omega_3 = P(L_1C + K) + (L_1C + K)^T P + \sigma_i \epsilon P^T P + Q + K^T R K + T < 0, \Omega_4 = \epsilon^{-1} N \sigma_i L_2 A^T A - T < 0$ 。所得结果以 LMI 形式表示, 便于利用 Matlab 进行求解。

关键词:Lurie 混沌系统; 保性能控制; 复杂网络

中图分类号:O482.4

文献标志码:A

文章编号:1672-6693(2015)04-0081-04

混沌同步自提出以来研究取得了巨大的进展^[1-7], 并从物理学迅速扩展到自动化、信息、通信、生物、化学、管理和社会学等领域。而 Lurie 系统的混沌同步引起了国内外学者的广泛兴趣。文献[8]基于自适应方法研究了一类 Lurie 系统混沌同步问题, 文献[9]研究了 Lurie 系统的脉冲混沌同步问题, 该方法所需的代价小性能可靠, 文献[10]基于单向耦合原理研究了 Lurie 系统的修正函数投影同步问题。另一方面, 时滞的存在给系统带来很大影响, 文献[11]基于非线性函数的线性化方法研究了一类时滞复杂动态网络系统的保性能控制问题, 但该方法有一定的局限性, 且讨论的不是 Lurie 混沌系统, 本文基于线性矩阵不等式(LMI)处理方法研究了 Lurie 复杂网络混沌系统的保性能控制问题, 得到了系统存在最优保性能控制律的充分性条件以及系统的性能上界。

1 系统描述

考虑一类 Lurie 复杂网络混沌系统:

$$\dot{x}_i(t) = f(Cx_i(t)) + \sigma_i \sum_{j=1}^N a_{ij} x_j(t - \tau) + u_i(t), \quad (1)$$

其中 $x_i(t)$ 为第 i 个节点的状态向量, $i=1, 2, \dots, N$, C 为适当维数的常数矩阵, 非线性函数 $f(Cx_i(t))$ 满足假设 1, σ_i 为节点的耦合强度, $u_i(t)$ 为控制器, $A = (a_{ij})$ 表示响应网络的非线性耦合配置矩阵, $a_{ij} \geq 0 (i \neq j)$, 同时对角线元素定义为

$$a_{ii} = - \sum_{i=1, i \neq j}^N a_{ij}。 \quad (2)$$

设 Lurie 复杂网络(1)的同步流形为

$$\dot{s}(t) = f(Cs(t)), \quad (3)$$

其中, $s(t) \in \mathbf{R}^n$ 为状态向量。当网络(1)达到同步时, 网络节点的状态向量与同步流形的状态变量之间满足 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - s(t)\| = 0$, 其中 $i=1, 2, \dots, N$ 。

假设 1 非线性函数 $f(Cx)$ 满足条件

$$\|f(Cx_i(t)) - f(Cs(t))\| \leq L_1 \|C(x_i(t) - s(t))\|, \quad (4)$$

定义系统误差 $e_i(t) = x_i(t) - s(t)$ 得到如下系统:

$$\dot{e}_i(t) = f(Cx_i(t)) - f(Cs(t)) + \sigma_i \sum_{j=1}^N a_{ij} e_j(t - \tau) + u_i(t)。 \quad (5)$$

* 收稿日期:2014-03-05 修回日期:2015-03-10 网络出版时间:2015-3-24 13:53

资助项目:国家自然科学基金(No. 51072184);国家自然科学基金数学天元基金(No. 11226337);航空基金(No. 2013ZD55006);河南省高等学校重点科研项目(No. 15B110011);河南省科技厅基础与前沿研究计划项目(No. 142300410410)

作者简介:毛北行,男,副教授,研究方向为复杂网络与混沌同步,E-mail: bxmao329@163.com

网络出版地址: <http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.n.20150324.1353.034.html>

定义 1 Lurie 复杂网络系统(5)的二次保性能函数

$$J = \sum_{i=1}^N \int_0^{\infty} [e_i(s)^T Q e_i(s) + u_i(s)^T R u_i(s)] ds \quad (6)$$

引理 1(Schur 补) 对给定的对称矩阵 $S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}$, 其中 S_{11} 是 $r \times r$ 维的, 则以下 3 个条件等价:

- 1) $S < 0$;
- 2) $S_{11} < 0, S_{22} - S_{11}^{-1} S_{12} < 0$;
- 3) $S_{22} < 0, S_{11} - S_{12} S_{22}^{-1} S_{21} < 0$.

引理 2

$$\sum_{i=1}^N e_i(t)^T P_i \sum_{j=1}^N a_{ij} e_j(t - \tau) \leq \sum_{i=1}^N e_i^T(t) \epsilon P^T P e_i(t) + \epsilon^{-1} N \sum_{i=1}^N e_i^T(t - \tau) A^T A e_i(t - \tau),$$

其中 $A = (a_{ij})$.

2 Lurie 复杂网络混沌系统的保性能控制

定理 1 若满足如下矩阵不等式:

$$\Omega_1 = P(L_1 C + K) + (L_1 C + K)^T P + \sigma_i \epsilon P^T P + Q + K^T R K + T < 0, \quad (7)$$

$$\Omega_2 = \epsilon^{-1} N \sigma_i A^T A - T < 0, \quad (8)$$

则 $u_i(t) = K e_i(t)$ 是系统(5)的保性能控制律, 其中系统的性能上界为

$$J^* = \sum_{i=1}^N [e_i^T(0) Q e_i(0) + \int_{-\tau}^0 e_i(s)^T R e_i(s) ds].$$

证明 对系统(5)构造 Lyapunov 函数

$$V(t) = \sum_{i=1}^N [e_i(t)^T P e_i(t) + \int_{t-\tau}^t e_i(s)^T T e_i(s) ds],$$

则沿系统(5)求导, 由引理 2 得到

$$\dot{V}(t) \leq \sum_{i=1}^N [e_i^T(t) [P(L_1 C + K) + (L_1 C + K)^T P + \sigma_i \epsilon P^T P + Q + K^T R K + T] e_i(t) +$$

$$\sum_{i=1}^N [e_i^T(t - \tau) [\epsilon^{-1} N \sigma_i A^T A - T] e_i(t - \tau)],$$

$$\text{即 } \dot{V}(t) \leq \sum_{i=1}^N [e_i^T(t) \Omega_1 e_i(t) + \sum_{i=1}^N [e_i^T(t - \tau) \Omega_2 e_i(t - \tau)] < 0. \quad \text{证毕}$$

定理 2 若满足矩阵不等式:

$$\begin{bmatrix} \Psi & P^T & K^T & I \\ * & -\sigma_i^{-1} \epsilon^{-1} I & 0 & 0 \\ * & * & -R^{-1} & 0 \\ * & * & * & -Q^{-1} \end{bmatrix} < 0, \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} -T & \sqrt{N \sigma_i} A^T \\ \sqrt{N \sigma_i} A & -\epsilon I \end{bmatrix} < 0, \quad (10)$$

其中 $\Psi = P(L_1 C + K) + (L_1 C + K)^T P + T$, 则 $u_i(t) = K e_i(t)$ 是系统(5)的保性能控制律, 系统的性能上界为

$$J^* = \sum_{i=1}^N [e_i^T(0) Q e_i(0) + \int_{-\tau}^0 e_i(s)^T R e_i(s) ds].$$

证明 由引理 1, 利用 Schur 补引理很容易得到矩阵不等式(7)等价于(9)式, (8)式等价于(10)式, 证明过程略。证毕

3 Lurie 复杂非线性网络混沌系统的保性能控制

考虑一类 Lurie 复杂网络混沌系统:

$$\dot{x}_i(t) = f(C x_i(t)) + \sigma_i \sum_{j=1}^N a_{ij} g(x_j(t - \tau)) + u_i(t), \quad (11)$$

其中 $g(\cdot)$ 为非线性函数。

假设 2 非线性函数 $g(\cdot)$ 满足条件

$$\|g(x_j(t-\tau)) - g(s(t-\tau))\| \leq L_2 \|x_j(t-\tau) - s(t-\tau)\|, \tag{12}$$

定义系统误差 $e_i(t) = x_i(t) - s(t)$, 利用(2)式很容易得到如下系统:

$$\dot{e}_i(t) = f(Cx_i(t)) - f(Cs(t)) + \sigma_i \sum_{j=1}^N a_{ij} g[x_j(t-\tau) - s(t-\tau)] + u_i(t). \tag{13}$$

引理 3

$$\sum_{i=1}^N e_i(t)^T P_i \sum_{j=1}^N a_{ij} g[e_j(t-\tau) - s(t-\tau)] \leq \sum_{i=1}^N e_i^T(t) \epsilon P^T P e_i(t) + \epsilon^{-1} N L_2 \sum_{i=1}^N e_i^T(t-\tau) A^T A e_i(t-\tau),$$

其中 $A = (a_{ij})$ 。

定理 3 若满足如下矩阵不等式:

$$\Omega_3 = P(L_1 C + K) + (L_1 C + K)^T P + \sigma_i \epsilon P^T P + Q + K^T R K + T < 0, \tag{14}$$

$$\Omega_4 = \epsilon^{-1} N \sigma_i L_2 A^T A - T < 0, \tag{15}$$

则 $u_i(t) = K e_i(t)$ 是系统(13)的保性能控制律, 其中系统的性能上界为

$$J^* = \sum_{i=1}^N \left[e_i^T(0) Q e_i(0) + \int_{-\tau}^0 e_i(s)^T R e_i(s) ds \right].$$

证明 对系统(13)构造 Lyapunov 函数

$$V(t) = \sum_{i=1}^N \left[e_i(t)^T P e_i(t) + \int_{t-\tau}^t e_i(s)^T T e_i(s) ds \right],$$

则沿系统(13)求导, 由引理 3 得到

$$\dot{V}(t) \leq \sum_{i=1}^N e_i^T(t) [P(L_1 C + K) + (L_1 C + K)^T P + \sigma_i \epsilon P^T P + Q + K^T R K + T] e_i(t) + \sum_{i=1}^N e_i^T(t-\tau) [\epsilon^{-1} N \sigma_i L_2 A^T A - T] e_i(t-\tau),$$

即

$$\dot{V}(t) \leq \sum_{i=1}^N e_i^T(t) \Omega_3 e_i(t) + \sum_{i=1}^N e_i^T(t-\tau) \Omega_4 e_i(t-\tau) < 0. \tag{证毕}$$

定理 4 若满足矩阵不等式:

$$\begin{bmatrix} \Psi & P^T & K^T & I \\ * & -\sigma_i^{-1} \epsilon^{-1} I & 0 & 0 \\ * & * & -R^{-1} & 0 \\ * & * & * & -Q^{-1} \end{bmatrix} < 0, \tag{16}$$

$$\begin{bmatrix} -T & \sqrt{N \sigma_i L_2} A^T \\ \sqrt{N \sigma_i L_2} A & -\epsilon I \end{bmatrix} < 0, \tag{17}$$

其中 $\Psi = P(L_1 C + K) + (L_1 C + K)^T P + T$, 则 $u_i(t) = K e_i(t)$ 是系统(13)的保性能控制律, 系统的性能上界为

$$J^* = \sum_{i=1}^N \left[e_i^T(0) Q e_i(0) + \int_{-\tau}^0 e_i(s)^T R e_i(s) ds \right].$$

证明 由引理 1, 利用 Schur 补引理很容易得到矩阵不等式(14)等价于(16)式, (15)式等价于(17)式, 证明过程略。 证毕

4 数值算例

考虑一个包含 3 个节点的 Lurie 复杂网络, 设节点方程为

$$(\dot{x}_{i1}, \dot{x}_{i2}, \dot{x}_{i3})^T = (x_{i1}, -2x_{i2}, -3x_{i3})^T$$

在平衡点 $s(t) = 0$ 处渐稳, 设耦合矩阵 $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $C = [1 \ 1 \ 1]$, 耦合强度 $\sigma_i = 0.2$, 时滞 $\tau = 1$, 应

用 Matlab 软件中的 LMI 工具箱, 可以得到 $P = \begin{bmatrix} 0.3236 & -0.0831 & -0.0703 \\ -0.0831 & 0.5481 & 0.0312 \\ -0.0703 & 0.0312 & 0.4059 \end{bmatrix}$, $Q =$

$$\begin{bmatrix} 0.7302 & 0.1054 & 0.0627 \\ 0.1054 & 0.9465 & -0.0073 \\ 0.0627 & -0.0073 & 1.0170 \end{bmatrix}$$
, 状态反馈控制器 $\mathbf{K} = [-1.8071 \quad -0.3196 \quad -0.1894]$, 系统的初始条件为

$$\mathbf{x}_1(t) = 0.2e^{0.4t}, \mathbf{x}_2(t) = e^{-0.06t}, \mathbf{x}_3(t) = -2e^{0.05t},$$

性能指标的上界 $J^* = 45.2366$ 。

5 结论

本文研究了 Lurie 复杂网络混沌系统的保性能控制问题, 分别讨论了一类 Lurie 复杂网络混沌系统的保性能问题以及 Lurie 非线性复杂网络混沌系统的保性能控制问题, 得到了系统最优保性能控制律以及性能上界。

参考文献:

- [1] Pecora L M, Carroll T L. Synchronization in chaotic systems[J]. Phys Rev Lett, 1990, 64(8): 821-824.
- [2] Pecora L M, Carroll T L. Driving systems with chaotic signals[J]. Phys Rev A, 1991, 44(4): 2374-2383.
- [3] Yoo W J, Ji D H, Won S C. Synchronization of two different non-autonomous chaotic systems using fuzzy disturbance observer[J]. Physics Letters, 2009, 374(11): 1354-1361.
- [4] Fallahi K, Leung H. A chaos secure communication scheme based on mul-triplication modulation[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2010, 15(2): 368-383.
- [5] 吕翎, 李纲, 张檬, 等. 全局耦合网络的参数辨识与时空混沌同步[J]. 物理学报, 2011, 60(9): 5051-5056.
Lv L, Li G, Zhang M, et al. Parameter identification and synchronization of spatiotemporal chaos in globally coupled network[J]. Acta Phys Sin, 2011, 60(9): 5051-5056.
- [6] 李建芬, 李农. 一类混沌系统的修正函数投影同步[J]. 物理学报, 2011, 60(8): 5071-5077.
Li J F, Li N. Modified function projective synchronization of a class of chaotic systems[J]. Acta Phys Sin, 2011, 60(8): 5071-5077.
- [7] 何汉林, 涂建军, 熊萍. 一类 Lurie 混沌系统的全局渐近同步[J]. 华中科技大学学报: 自然科学版, 2010, 38(2): 38-40.
He H L, Tu J J, Xiong P. Global asymptotical synchronization of a class of chaotic Lurie systems[J]. Journal of Huazhong University of Scitific and Technology: Natural Science Edition, 2010, 38(2): 38-40.
- [8] 毛北行, 王东晓, 卜春霞. Lurie 混沌系统的脉冲控制同步[J]. 华中师范大学学报: 自然科学版, 2012, 46(3): 297-299.
Mao B X, Wang D X, Bu C X. Synchronization of Lurie chaotic systems[J]. Journal of Huazhong Normal University: Natural Science Edition, 2012, 46(3): 297-299.
- [9] 毛北行, 程春蕊, 卜春霞. Lurie 混沌系统的修正函数投影同步[J]. 数学杂志, 2013, 33(4): 717-780.
Mao B X, Cheng C R, Bu C X. Modified function projective synchronization of Lurie chaotic systems [J]. Journal of Mathematics, 2013, 33(4): 717-780.
- [10] 罗毅平, 刘欢. 时滞复杂动态网络的保性能控制[J]. 计算机工程与应用, 2013, 49(20): 48-51.
Luo Y P, Liu H. Guaranteed cost control of complex network with delay[J]. Computer Engineering and Applications, 2013, 49(20): 48-51.

The Guaranteed Cost Control of Lurie Complex Networked Chaos Systems

MAO Beixing, XU Hongwei

(Department of Mathematics and Physics, Zhengzhou Institute of Aeronautical Industry Management, Zhengzhou 450015, China)

Abstract: The problem of guaranteed cost control of Lurie complex networks chaos systems is studied in the paper. Based on Lyapunov stability theory and LMI techniques, sufficient conditions for the existence of guaranteed cost state feedback controller of Lurie complex networks chaos system is derived. $\Omega_1 = \mathbf{P}(\mathbf{L}_1\mathbf{C} + \mathbf{K}) + (\mathbf{L}_1\mathbf{C} + \mathbf{K})^T\mathbf{P} + \sigma_i\epsilon\mathbf{P}^T\mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{K}^T\mathbf{R}\mathbf{K} + \mathbf{T} < 0$, $\Omega_2 = \epsilon^{-1}N\sigma_i\mathbf{A}^T\mathbf{A} - \mathbf{T} < 0$. The sufficient conditions for the existence of guaranteed cost state feedback controller of Lurie nonlinear complex networks is as following: $\Omega_3 = \mathbf{P}(\mathbf{L}_1\mathbf{C} + \mathbf{K}) + (\mathbf{L}_1\mathbf{C} + \mathbf{K})^T\mathbf{P} + \sigma_i\epsilon\mathbf{P}^T\mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{K}^T\mathbf{R}\mathbf{K} + \mathbf{T} < 0$, $\Omega_4 = \epsilon^{-1}N\sigma_i\mathbf{L}_2\mathbf{A}^T\mathbf{A} - \mathbf{T} < 0$. The result is given in LMI, So it is convenient to realize in Matlab.

Key words: Lurie chaotic systems; guaranteed cost control; complex networks