DOI:10.11721/cqnuj20150418

时间分数阶粘弹性方程的有限差分方法*

余跃玉, 唐海军, 郑宗剑, 李红梅
(四川文理学院数学与财经学院, 四川 达州 635000)

摘要:粘弹性方程 $u_{tt}-\Delta u_t-\Delta u=\varphi(x,t)$ 能描述震动在粘弹性介质中的传播。首先对一类含 Caputo 型的时间分数阶粘弹性方程给出一种有限差分格式,讨论它的差分解的存在唯一性;然后利用能量范数证明了该差分格式的稳定性和收敛性;最后通过数值实验 1 说明在不同空间及时间步长取值下,数值解越接近精确解,也即该格式是有效的。

关键词:分数阶粘弹性方程;差分格式;可解性;稳定性;收敛性
中图分类号:O241.82 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-6693(2015)04-0085-06

在地震波传播理论的讨论中,绝大部分情况下是把地震波看成弹性波。但由于介质的粘滞性会损耗地震能量,使振幅衰减且频率降低,使得地震波在真实介质中传播与在理想介质中传播存在很大的误差,所以研究地震波在粘弹性介质中传播的性质具有重要意义[1-2]。

粘弹性方程

$$u_{tt}-\Delta u_t-\Delta u=\varphi(x,t) \tag{1}$$

能描述由震动产生的波在粘弹性介质中的传播等问题,粘弹性方程不仅在地震勘探中十分重要[3-4],而且可以用来描述具有记忆性材料中的热传导、核反应动力学、粘弹性力学、生物力学、松散介质中的压力等实际问题[5]。然而当实际问题的计算域不规则或问题本身比较复杂时,要求出其解析解即精确解却是很困难的,有效的方法是求其数值解。为此,许多学者对整数阶的粘弹性方程的数值解进行了大量的研究[6-10]。

由于粘弹性体对应力的响应兼有弹性固体和粘性流体的双重特性,所以利用分数阶导数来描述粘弹性材料显得非常自然。遗憾的是,对于分数阶粘弹性方程的数值解的研究却无人问津。在一维情形下将(1)式中对时间的二阶导数用 Caputo 型分数阶导数进行替换,考虑如下方程:

$${}_0^CD_t^\alpha u(x,t)-\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^2\partial t}-\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}=\varphi(x,t),(x,t)\in(0,L)\times(0,T), \tag{2}$$

$$u(0,t)=u(L,t)=0,t\in(0,T), \tag{3}$$

$$u(x,0)=f(x),u_t(x,0)=g(x),x\in(0,L), \tag{4}$$

其中 $1<\alpha<2$,$\varphi(x,t)$,$f(x)$,$g(x)$ 是给定函数。${}_a^CD_t^\alpha$ 表示 Caputo 型分数阶微分算子,定义为:

$${}_a^CD_t^\alpha u(x,t)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^t\frac{\partial^n u(x,\xi)}{\partial\xi^n}\frac{\mathrm{d}\xi}{(t-\xi)^{\alpha-n+1}},n-1<\alpha<n。 \tag{5}$$

下面将利用差分法[11-14]对方程(2)~(4)提出一个隐式差分格式,分析差分格式的可解性,证明差分格式的稳定性,再对差分解的收敛性进行分析并给出收敛阶,最后用数值试验对此格式进行有效性验证。

1 差分格式的建立及其差分解的存在唯一性分析

将区域 $[0,L]\times[0,T]$ 进行网格剖分,令 $h=\frac{L}{m}$ 为空间步长,$\tau=\frac{T}{n}$ 为时间步长,则有 $x_i=ih,t_j=j\tau$ $(i=0,1,2,\cdots,m;j=0,1,2,\cdots,n)$。用 u_i^j 表示 $u(x,t)$ 在 (x_i,t_j) 点的近似值。下面对方程(2)~(4)进行离散。

首先,对于时间分数阶导数 ${}_a^CD_t^\alpha u(x,t)$,$1<\alpha<2$,由 Caputo 导数 ${}_a^CD_t^\alpha u(x,t)$ 定义(5)式,按参考文献[15]的方法给出时间分数阶导数的一种差分近似:

* **收稿日期**:2014-02-20 **修回日期**:2015-03-13 **网络出版时间**:2015-4-20 09:30
资助项目:四川文理学院面上项目(No. 2013Z003Z);四川省教育厅科研项目(No. 14ZB0309)
作者简介:余跃玉,女,副教授,研究方向为微分方程数值解,E-mail: jhyyyyjyx@sina.com
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.n.20150420.0930.002.html

$$
{}_{0}^{C}D_{t}^{\alpha}u(x_i,t_{j+1})\approx\frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)}[b_0u_i^{j+1}+(b_1-2b_0)u_i^j+\sum_{k=1}^{j-1}(b_{k+1}-2b_k+b_{k-1})u_i^{j-k}+(-b_j+b_{j-1})f_i-\tau b_jg_i], \tag{6}
$$

其中 $b_k=(k+1)^{2-\alpha}-k^{2-\alpha}, k=0,1,2,\cdots,n$。

从而,得到方程(2)式的一种隐式差分近似:

当 $j=0$ 时,有

$$
-\frac{\tau+1}{h^2}u_{i-1}^1+\left[\frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)}+\frac{2(\tau+1)}{h^2}\right]u_i^1-\frac{\tau+1}{h^2}u_{i+1}^1=
$$

$$
-\frac{1}{h^2}f_{i-1}+\left[\frac{2}{h^2}+\frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)}\right]f_i-\frac{1}{h^2}f_{i+1}+\frac{\tau^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)}g_i+\tau\varphi_i^1。 \tag{7}
$$

当 $j=1,2,\cdots,n$ 时,有

$$
-\frac{\tau+1}{h^2}u_{i-1}^{j+1}+\left[\frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)}+\frac{2(\tau+1)}{h^2}\right]u_i^{j+1}-\frac{\tau+1}{h^2}u_{i+1}^{j+1}=-\frac{1}{h^2}u_{i-1}^j+\left[\frac{2}{h^2}+\frac{\tau^{1-\alpha}(2-b_1)}{\Gamma(3-\alpha)}\right]u_i^j
$$

$$
-\frac{1}{h^2}u_{i+1}^j+\sum_{k=1}^{j-1}c_ku_i^{j-k}+c_jf_i+\frac{\tau^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)}b_jg_i+\tau\varphi_i^{j+1}。 \tag{8}
$$

其中 $c_k=-\frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)}(b_{k+1}-2b_k+b_{k-1}), k=1,2,\cdots,j-1, c_j=\frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)}(b_j-b_{j-1})$。令 $\boldsymbol{U}^k=(u_1^k,u_2^k,\cdots,u_{m-1}^k)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\Phi}^k=(\varphi_1^k,\varphi_2^k,\cdots,\varphi_{m-1}^k)^{\mathrm{T}}, k=0,1,2,\cdots, \boldsymbol{G}=(g_1,g_2,\cdots,g_{m-1})^{\mathrm{T}}$, $m-1$ 阶矩阵:

$$
\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}
\frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)}+\frac{2(\tau+1)}{h^2} & -\frac{\tau+1}{h^2} & 0 & \cdots & 0 & 0\\
-\frac{\tau+1}{h^2} & \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)}+\frac{2(\tau+1)}{h^2} & -\frac{\tau+1}{h^2} & \cdots & 0 & 0\\
0 & -\frac{\tau+1}{h^2} & \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)}+\frac{2(\tau+1)}{h^2} & \cdots & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)}+\frac{2(\tau+1)}{h^2} & -\frac{\tau+1}{h^2}\\
0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{\tau+1}{h^2} & \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)}+\frac{2(\tau+1)}{h^2}
\end{pmatrix},
$$

$$
\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}
\frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)}+\frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} & 0 & \cdots & 0 & 0\\
-\frac{1}{h^2} & \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)}+\frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} & \cdots & 0 & 0\\
0 & -\frac{1}{h^2} & \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)}+\frac{2}{h^2} & \cdots & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)}+\frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2}\\
0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{1}{h^2} & \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)}+\frac{2}{h^2}
\end{pmatrix},
$$

$$
\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}
\frac{\tau^{1-\alpha}(2-b_1)}{\Gamma(3-\alpha)}+\frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} & 0 & \cdots & 0 & 0\\
-\frac{1}{h^2} & \frac{\tau^{1-\alpha}(2-b_1)}{\Gamma(3-\alpha)}+\frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} & \cdots & 0 & 0\\
0 & -\frac{1}{h^2} & \frac{\tau^{1-\alpha}(2-b_1)}{\Gamma(3-\alpha)}+\frac{2}{h^2} & \cdots & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{\tau^{1-\alpha}(2-b_1)}{\Gamma(3-\alpha)}+\frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2}\\
0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{1}{h^2} & \frac{\tau^{1-\alpha}(2-b_1)}{\Gamma(3-\alpha)}+\frac{2}{h^2}
\end{pmatrix},
$$

则方程(7)、(8)式可写成：

$$AU^1 = BU^0 - \frac{\tau^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)}G + \tau\Phi^1, \tag{9}$$

$$AU^{j+1} = CU^j + \sum_{k=1}^{j-1} c_k U^{j-k} + c_j U^0 + \frac{\tau^{2-\alpha} b_j}{\Gamma(3-\alpha)}G + \tau\Phi^{j+1}\ 。 \tag{10}$$

对于矩阵 $\boldsymbol{A}$，由于其主对角线上的元素 $a_{ii} = \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} + \frac{2(\tau+1)}{h^2} > \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$，$i=1,2,\cdots,m-1$，所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为严格对角占优矩阵，于是有以下定理。

定理 1　差分方程组(9)、(10)式的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为严格对角占优矩阵，$|\boldsymbol{A}| \neq 0$，方程组(9)、(10)式是唯一可解的，即方程组(7)、(8)式是唯一可解。

2 差分格式的稳定性

下面假设 V_i^j $(i=0,1,2,\cdots,m;j=0,1,2,\cdots,n)$ 是方程(7)、(8)式的近似解，则误差 $\varepsilon_i^j = V_i^j - u_i^j$ $(i=0,1,2,\cdots,m;j=0,1,2,\cdots,n)$ 将满足：

$$-\frac{\tau+1}{h^2}\varepsilon_{i-1}^1 + \left(\frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} + \frac{2(\tau+1)}{h^2}\right)\varepsilon_i^1 - \frac{\tau+1}{h^2}\varepsilon_{i+1}^1 = -\frac{1}{h^2}\varepsilon_{i-1}^0 + \left[\frac{2}{h^2} + \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)}\right]\varepsilon_i^0 - \frac{1}{h^2}\varepsilon_{i+1}^0, \tag{11}$$

$$-\frac{\tau+1}{h^2}\varepsilon_{i-1}^{j+1} + \left(\frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} + \frac{2(\tau+1)}{h^2}\right)\varepsilon_i^{j+1} - \frac{\tau+1}{h^2}\varepsilon_{i+1}^{j+1} =$$

$$-\frac{1}{h^2}\varepsilon_{i-1}^j + \left[\frac{2}{h^2} + \frac{\tau^{1-\alpha}(2-b_1)}{\Gamma(3-\alpha)}\right]\varepsilon_i^j - \frac{1}{h^2}\varepsilon_{i+1}^j + \sum_{k=1}^{j-1} c_k \varepsilon_i^{j-k} + c_j \varepsilon_i^0\ 。 \tag{12}$$

令 $\boldsymbol{E}^k = (\varepsilon_1^k, \varepsilon_2^k, \cdots, \varepsilon_{m-1}^k)^{\mathrm{T}}$，则方程组(11)、(12)式可化为：

$$AE^1 = BE^0 \tag{13}$$

$$AE^{j+1} = CE^j + c_1 E^{j-1} + \cdots + c_{j-1}E^1 + c_j E^0 \tag{14}$$

通过数学归纳法可得下面结果。

定理 2　$\|E^j\|_\infty \leqslant \|E^0\|_\infty$，$j=1,2,3,\cdots$。

证明　当 $j=1$ 时，有

$$-\frac{\tau+1}{h^2}\varepsilon_{i-1}^1 + \left(\frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} + \frac{2(\tau+1)}{h^2}\right)\varepsilon_i^1 - \frac{\tau+1}{h^2}\varepsilon_{i+1}^1 = -\frac{1}{h^2}\varepsilon_{i-1}^0 + \left[\frac{2}{h^2} + \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)}\right]\varepsilon_i^0 - \frac{1}{h^2}\varepsilon_{i+1}^0\ 。$$

令 $|\varepsilon_l^1| = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant m-1} |\varepsilon_i^1|$，则　$\frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)}\|E^1\|_\infty = \frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)}|\varepsilon_l^1| \leqslant$

$$-\frac{\tau+1}{h^2}|\varepsilon_{l-1}^1| + \left(\frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} + \frac{2(\tau+1)}{h^2}\right)|\varepsilon_l^1| - \frac{\tau+1}{h^2}|\varepsilon_{l+1}^1| \leqslant \left|-\frac{\tau+1}{h^2}\varepsilon_{l-1}^1 + \left(\frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} + \frac{2(\tau+1)}{h^2}\right)\varepsilon_l^1 - \frac{\tau+1}{h^2}\varepsilon_{l+1}^1\right| =$$

$$\left|-\frac{1}{h^2}\varepsilon_{l-1}^0 + \left[\frac{2}{h^2} + \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)}\right]\varepsilon_l^0 - \frac{1}{h^2}\varepsilon_{l+1}^0\right| \leqslant \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)}\|E^0\|_\infty$$

所以有 $\|E^1\|_\infty \leqslant \|E^0\|_\infty$。

假设 $\|E^j\|_\infty \leqslant \|E^0\|_\infty$，$j=1,2,3,\cdots,k$。令 $|\varepsilon_l^{j+1}| = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant m-1} |\varepsilon_i^{j+1}|$，同样有

$$\frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)}\|E^{j+1}\|_\infty = \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)}|\varepsilon_l^{j+1}| \leqslant -\frac{\tau+1}{h^2}|\varepsilon_{l-1}^{j+1}| + \left(\frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} + \frac{2(\tau+1)}{h^2}\right)|\varepsilon_l^{j+1}| - \frac{\tau+1}{h^2}|\varepsilon_{l+1}^{j+1}| \leqslant$$

$$\left|-\frac{\tau+1}{h^2}\varepsilon_{l-1}^{j+1} + \left(\frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} + \frac{2(\tau+1)}{h^2}\right)\varepsilon_l^{j+1} - \frac{\tau+1}{h^2}\varepsilon_{l+1}^{j+1}\right| \leqslant$$

$$\left|-\frac{1}{h^2}\varepsilon_{l-1}^j + \left[\frac{2}{h^2} + \frac{\tau^{1-\alpha}(2-b_1)}{\Gamma(3-\alpha)}\right]\varepsilon_l^j - \frac{1}{h^2}\varepsilon_{l+1}^j + \sum_{k=1}^{j-1} c_k \varepsilon_l^{j-k} + c_j \varepsilon_l^0\right| \leqslant \frac{\tau^{1-\alpha}(2-b_1)}{\Gamma(3-\alpha)}\|E^j\|_\infty + \sum_{k=1}^{j}(|c_k|\,\|E^{j-k}\|_\infty) =$$

$$\frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)}\left|(2-b_1)\|E^0\|_\infty + \sum_{k=1}^{j-1}(b_{k+1} - 2b_k + b_{k-1})\|E^0\|_\infty + (b_j - b_{j-1})\|E^0\|_\infty\right| \leqslant \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)}\|E^0\|_\infty\ 。$$

即有 $\|E^j\|_\infty \leqslant \|E^0\|_\infty$, $j=1,2,3,\cdots$。 证毕

于是可得定理3。

定理3 隐式格式(7)、(8)式是无条件稳定的。

3 差分解的收敛性

令 $u(x_i,t_j)$, $i=1,2,\cdots,m-1$; $j=1,2,\cdots,n$ 是方程(2)～(4)式在格点 (x_i,t_j) 处的精确值,则在格点 (x_i,t_j) 处的误差为 $e_i^0=0$, $i=1,2,\cdots,m-1$; $e_i^j=u(x_i,t_j)-u_i^j$, $i=1,2,\cdots,m-1$; $j=1,2,\cdots,n$。令 $e^j=(e_1^j,e_2^j,\cdots,e_{m-1}^j)^T$,因为 $e^0=0$,由(7)、(8)式得:

$$-\frac{\tau+1}{h^2}e_{i-1}^1+\left(\frac{2(\tau+1)}{h^2}+\frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)}\right)e_i^1-\frac{\tau+1}{h^2}e_{i+1}^1=R_i^1, \tag{15}$$

$$-\frac{\tau+1}{h^2}e_{i-1}^{j+1}+\left(\frac{2(\tau+1)}{h^2}-\frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)}\right)e_i^{j+1}-\frac{\tau+1}{h^2}e_{i+1}^{j+1}=$$
$$-\frac{1}{h^2}e_{i-1}^j+\left[\frac{2}{h^2}+\frac{\tau^{1-\alpha}(2-b_1)}{\Gamma(3-\alpha)}\right]e_i^j-\frac{1}{h^2}e_{i+1}^j+\sum_{k=1}^{j-1}c_ke_i^{j-k}+R_i^{j+1},k>0,i=1,2,\cdots,m-1\text{ 。} \tag{16}$$

其中 $R_i^j=O(\tau+h^2)$ 为截断误差,$i=1,2,\cdots,m-1$;$j=1,2,\cdots,n$。

令 $\boldsymbol{R}^j=(R_1^j,R_2^j,\cdots,R_{m-1}^j)^{\mathrm{T}}$,由于 $e_0^j=e_m^j=0$,(15)、(16)式可写成

$$\boldsymbol{A}e^1=\boldsymbol{R}^1, \tag{17}$$

$$\boldsymbol{A}e^{j+1}=\boldsymbol{C}e^j+\sum_{k=1}^{j-1}c_ke^{j-k}+\boldsymbol{R}^{j+1},j=1,2,\cdots,n-1\text{。} \tag{18}$$

因为 $R_i^j=O(\tau+h^2)$,所以 $\|\boldsymbol{R}^j\|_2=\sqrt{m-1}\cdot O(\tau+h^2)$, $j=1,2,\cdots,n-1$。

又矩阵 $\boldsymbol{A}$ 严格对角占优矩阵,所以 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 存在,(17)、(18)式又可化为:

$$e^1=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{R}^1, \tag{19}$$

$$e^{j+1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}e^j+\sum_{k=1}^{j-1}c_k\boldsymbol{A}^{-1}e^{j-k}+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{R}^{j+1},j=1,2,\cdots,n-1\text{。} \tag{20}$$

所以

$$\|e^1\|_2=\|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{R}^1\|_2\leqslant\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_2\|\boldsymbol{R}^1\|_2=\boldsymbol{C}\cdot(\tau+h^2)\text{。} \tag{21}$$

假设当 $k\leqslant j$ 时,有 $\|e^k\|_2\leqslant\boldsymbol{C}\cdot(\tau+h^2)$,则

$$\|e^{j+1}\|_2=\left\|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}e^j+\sum_{k=1}^{j-1}c_k\boldsymbol{A}^{-1}e^{j-k}+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{R}^{j+1}\right\|_2\leqslant\sum_{k=0}^{j-1}\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_2\|\boldsymbol{C}\|_2\|e^{j-k}\|_2+\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_2\|\boldsymbol{R}^{j+1}\|_2\leqslant$$
$$c\cdot(\tau+h^2),j=1,2,\cdots,n-1, \tag{22}$$

其中 c 为正常数。所以有定理4。

定理4 设 u_i^j 是通过差分格式(7)、(8)式计算出来的 $u(x_i,t_j)$ 近似值,则存在正常数 c,使得

$$|u_i^j-u(x_i,t_j)|\leqslant c(\tau+h^2),i=1,2,\cdots,m-1,j=1,2,\cdots,n\text{。}$$

即差分格式(7)、(8)式的解是收敛的。

4 数值试验

对于方程(2)～(4)式,考虑 $\alpha=1.8$, $L=2$, $T=1$, $f(x)=g(x)=0$, $\varphi(x,t)=\frac{2x(2-x)}{\Gamma(1.2)}t^{0.2}+4t+2t^2$ 时的情形,此时方程的精确解为 $u(x,t)=t^2x(2-x)$。

表1给出了当 $t=1$,空间及时间步长分别为 $\tau=0.1,h=0.1$; $\tau=0.05,h=0.05$ 和 $\tau=0.01,h=0.01$ 时的数值解 u_i^n 与精确解 $u(x,1)$。

表 1　当 $t=1$ 时不同步长下的数值解与精确解的比较

x	数值解 u_i^n $\tau=0.1,h=0.1$	$\tau=0.05,h=0.05$	$\tau=0.01,h=0.01$	精确解 $u(x,1)$
0.2	0.386 155 143 944 413	0.373 272 188 705 917	0.362 686 428 199 370	0.360 000 000 000 00
0.4	0.686 951 031 129 636	0.663 826 351 038 996	0.644 822 860 275 319	0.640 000 000 000 00
0.6	0.902 044 827 988 721	0.871 487 408 416 000	0.846 373 734 669 552	0.840 000 000 000 00
0.8	1.031 196 033 234 251	0.996 132 527 745 735	0.967 314 104 984 552	0.960 000 000 000 00
1.0	1.074 262 163 360 248	1.037 688 934 339 834	1.007 629 192 990 756	1.000 000 000 000 00
1.2	1.031 196 033 234 249	0.996 132 527 745 730	0.967 314 104 984 294	0.960 000 000 000 00
1.4	0.902 044 827 988 719	0.871 487 408 415 993	0.846 373 734 669 305	0.840 000 000 000 00
1.6	0.686 951 031 129 635	0.663 826 351 038 993	0.644 822 860 275 093	0.640 000 000 000 00
1.8	0.386 155 143 944 413	0.373 272 188 705 917	0.362 686 428 199 226	0.360 000 000 000 00

从表 1 可见，当网格剖分越细时，数值解越接近精确解。这说明该格式是有效的。

表 2　在 T 时刻的每个时间层上的 L_∞-误差

T	$h=0.1,\tau=0.1$	$h=0.05,\tau=0.025$	$h=0.025,\tau=0.006\,25$
0.1	0.009 756 750 292 491	0.002 474 373 787 279	0.000 620 377 290 852
0.2	0.019 118 252 576 870	0.004 866 708 314 855	0.001 221 590 998 410
0.3	0.027 989 906 096 858	0.007 142 105 879 208	0.001 794 020 904 793
0.4	0.036 315 795 855 355	0.009 280 620 167 102	0.002 332 263 356 090
0.5	0.044 066 947 355 895	0.011 271 624 276 909	0.002 833 429 645 850
0.6	0.051 233 523 061 883	0.013 110 743 456 063	0.003 296 292 209 077
0.7	0.057 819 398 632 518	0.014 797 940 727 919	0.003 720 767 703 267
0.8	0.063 838 259 736 806	0.016 336 223 308 599	0.004 107 572 926 938
0.9	0.069 310 721 216 736	0.017 730 724 826 011	0.004 457 982 753 970
1	0.074 262 163 360 248	0.018 988 033 755 394	0.004 773 653 902 597

表 2 给出了取不同的时间、空间步长，在时间 $t=0.1,0.2,\cdots,1$ 时的 L_∞-误差，数值结果表明收敛阶能达到 $O(\tau+h^2)$，与理论分析一致。

参考文献：

[1] 牛滨华，孙春岩. 地震波理论研究进展—介质模型与地震波传播[J]. 地球物理学进展，2004，19(2)：256-263.

Niu B H, Sun C Y. Developing theory of propagation of seismic waves-medium model and propagation of seismic waves[J]. Progress in Geophysics, 2004, 19(2): 256-263.

[2] 伍忠良，曾宪军，陆敬安. 海洋地震勘探直达波综合效应分析[J]. 海洋技术，2006(1)：111-114.

Wu Z L, Zeng X J, Lu J A. The synthetic analysis of the direct arrival in marine seismic survey[J]. Ocean Technology, 2006(1): 111-114.

[3] 王辉. 用于岩体质量评价的地震波 Q 值计算方法[J]. 工程地质学报，2006，14(3)：699-702.

Wang H. Computational methhods of seismic Q values for evaluation of rock mass quality[J]. Journal of Engineering Geology, 2006, 14(3): 699-702.

[4] 朱德兵. 双能量双通道地震采集技术[J]. 石油地球物理勘探，2010，45(4)：473-477.

Zhu D B. Dual-energy and dual-channel seismic acquisition technology[J]. Oil Geophysical Prospecting, 2010, 45(4): 473- 477.

[5] Rossikhin Y A, Shitikova M V. Applications of fractional calculus to dynamic problems of linear and nonlinear hereditary mechanics of solids[J]. Applied Mech Rev, 1997, 50(1): 15-67.

[6] 王立俊. 粘弹性方程的变网格有限元方法[J]. 计算数学，1990，12(2)：119-128.

Wang L J. The finite element method for the linear hyperbolic equations on a variable mesh[J]. Mathematica Numerica Sinica, 1990, 12(2): 119-128.

[7] 李宏，孙萍，尚月强，等. 粘弹性方程全离散化有限体积元格式及数值模拟[J]. 计算数学，2012，34(4)：413-424.

Li H, Sun P, Shang Y Q, et al. A fully discrete finite volume element formulation and numerical simulations for viscoelastic equations [J]. Mathematica Numerica Sinica, 2012,34(4):413-424.

[8] 张斐然.粘弹性方程的 Crank-Nicolson 格式全离散非协调元方法[J].河南大学学报:自然科学版,2011,41(2):123-128.
Zhang F R. A nonconforming finite element method with Crank-Nicolson full-discrete scheme for viscoelasticity type equations[J].Journal of Henan University:Natural Science,2011,41(2):123-128.

[9] 朱慧卿,石东洋.粘弹性方程各向异性有限元方法的超收敛分析[J].河南科学,2004,22(2):143-146
Zhu H Q,Shi D Y. A superconvergence analysis of anisotropic finite element for viscoelastic equation[J].Henan Science,2004,22(2):143-146.

[10] 张学凌,石东洋.粘弹性方程 Hermite 型有限元方法的超收敛分析[J].郑州经济管理干部学院学报,2007,22(1):84-86.
Zhang X L,Shi D Y. Superconvergence analysis for viscoelastic equation with Hermite-type finite element[J]. Journal of Zhengzhou Economics & Management Nstnute,2007,22(1):84-86.

[11] 余跃玉.一种 Caputo 型时间分数阶波动方程的差分方法[J].四川师范大学学报:自然科学版,2014,37(4):524-528.
Yu Y Y. A difference scheme on Caputo time-fracional wave equation[J]. Journal of Sichuan Normal University: Natural Science,2014,37(4):524-528.

[12] 余跃玉,周均,胡兵.带阻尼项的时间分数阶波动方程的一种差分方法[J].四川大学学报:自然科学版,2014,51(1): 40-46.
Yu Y Y,ZhouJ,Hu B.A difference scheme on Caputo time fractional wave equation with damping term[J]. Journal of Sichuan University:Natural Science,2014,51(1):40-46.

[13] 郑茂波.耗散 SRLW 方程的拟紧致平均隐式守恒差分格式[J].重庆师范大学学报:自然科学版,2014,31(1):71-75.
Zheng M B. A Pseudo-compact conservative average finite difference scheme for dissipation SRLV equation[J]. Journal of Chongqing Normal University: Natural Science, 2014,31(1):71-75.

[14] 刘利斌,刘焕文,余锦鸿.四阶抛物型方程子域精细积分紧致差分格式[J].重庆师范大学学报:自然科学版,2008,25(3):24-27.
Liu L B, Liu H W, Yu J H. Compact Crank-Nicolson scheme for solving four order parabolic equation based on Sub-domain precise integration[J]. Journal of Chongqing normal university:Natural Science,2008,25(3):24-27.

A Difference Scheme on Caputo Time-fractional Viscoelasticity Wave Equation

YU Yueyu, TANG Haijun, ZHENG Zhongjian, LI Hongmei

(Department of Mathematics and Finance, Sichuan University of Arts and Science, Dazhou Sichuan 635000, China)

Abstract: Viscoelastic equation $u_{tt}-\Delta u_t-\Delta u=\varphi(x,t)$ can describe the vibration propagation in viscoelastic medium. In this paper, we first will propose a finite difference scheme to solve a time fractional viscoelastic equation with Caputo type, and we will discuss the existence and uniqueness of the difference solution. Then we will use the energy norm to prove the numerical stability and convergence of the scheme. Finally, we will use a numerical experiment verify the validity of the scheme.

Key words: fractional viscoelastic equation; difference scheme; solvability; stability; convergence

(责任编辑 黄 颖)