

一类 Boissonade 模型的稳定性及分支分析*

张颖, 杨玉, 衣凤歧
(哈尔滨工程大学理学院, 哈尔滨 150001)

摘要: 主要研究了一类刻画化学反应中斑图形成机制的 Boissonade 模型的动力学行为。首先, 研究了该系统的正平衡解的存在性。其次, 研究了系统的零平衡解及正平衡解的稳定性和系统的正平衡解附近的 Hopf 分支的存在性问题。最后, 研究了平衡解的性质并给出了参数平面分支图。

关键词: 斑图形成; Boissonade 模型; 稳定性; Hopf 分支

中图分类号: O175.12

文献标志码: A

文章编号: 1672-6693(2015)04-0091-06

1 预备知识

斑图形成问题是生物数学中人们研究的内容之一。在过去的几十年中, 反应扩散方程被广泛的用来研究生物数学中的斑图形成机制^[1-6]。

文献[1]首次提出用如下的常微分方程来刻画某类化学反应问题的斑图形成问题:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = u - \alpha v + \gamma uv - u^3, t > 0, \\ \frac{dv}{dt} = u - \beta v, t > 0. \end{cases} \quad (1)$$

其中, u 和 v 分别表示在该类化学反应中两种化学物质的浓度。 α, β, γ 均为正的参数, 用来刻画两种化学物质反应的强度。有关问题(1)的详细背景详见文献[1]。

模型(1)自提出以来, 鲜有文献对其动力学行为进行研究。本文首次从数学角度上, 利用无穷维动力系统的定性理论以及分支理论等方法来研究其平衡解的稳定性以及系统产生 Hopf 分支的可能性。所得的理论结果, 有助于人们进一步认识该类系统的丰富的动力学行为。

2 主要结论

2.1 正平衡解的存在性

系统(1)总具有平凡平衡解 $(0, 0)$ 。当 $0 < \alpha \leq \beta$ 时, 系统(1)有唯一的正平衡解 (u_1, v_1) , 其中:

$$u_1 := \frac{\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 4\alpha\beta + 4\beta^2}}{2\beta}, v_1 := \frac{\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 4\alpha\beta + 4\beta^2}}{2\beta^2}. \quad (2)$$

当 $\beta < \alpha \leq \beta + \gamma^2/4\beta$ 时, 系统(1)有两个正平衡解: 一个为(2)式中定义的 (u_1, v_1) , 另一个为 (u_2, v_2) , 其中

$$u_2 := \frac{\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4\alpha\beta + 4\beta^2}}{2\beta}, v_2 := \frac{\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4\alpha\beta + 4\beta^2}}{2\beta^2}. \text{ 而当 } \alpha > \beta + \frac{\gamma^2}{4\beta} \text{ 时, 系统(1)不存在正平衡解。}$$

2.2 平衡解的稳定性、性质及 Hopf 分支分析

* 收稿日期: 2014-04-05 修回日期: 2015-02-25 网络出版时间: 2015-3-24 13:53

资助项目: 国家自然科学基金(No. 11371108); 教育部新世纪优秀人才支持计划(No. NECT-13-0755)

作者简介: 张颖, 女, 研究方向为微分方程定性理论及分支问题, E-mail: yingzhangmath@163.com; 通信作者: 衣凤歧, 教授, E-mail: fengqi.yi@aliyun.com

网络出版地址: <http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.n.20150324.1353.032.html>

2.2.1 (0,0)的稳定性及性质分析 下面给出定理1。

定理1 1) 当 $\alpha > \beta > 1$ 时, $(0,0)$ 是局部渐近稳定的。当 $\alpha < \frac{(\beta+1)^2}{4}$ 时, 平衡点 $(0,0)$ 为稳定的结点; 当 $\alpha > \frac{(\beta+1)^2}{4}$ 时, 平衡点 $(0,0)$ 为稳定的焦点; 当 $\alpha = \frac{(\beta+1)^2}{4}$ 时, 平衡点 $(0,0)$ 为稳定的退化结点。

2) 当 $\alpha > \beta$ 且 $\beta < 1$ 时, $(0,0)$ 是不稳定的。当 $\alpha < \frac{(\beta+1)^2}{4}$ 时, 平衡点 $(0,0)$ 为不稳定的结点; 当 $\alpha > \frac{(\beta+1)^2}{4}$ 时, 平衡点 $(0,0)$ 为不稳定的焦点; 当 $\alpha = \frac{(\beta+1)^2}{4}$ 时, 平衡点 $(0,0)$ 为不稳定的退化结点。

3) 当 $\alpha < \beta$ 时, $(0,0)$ 是不稳定的。平衡点 $(0,0)$ 为鞍点。

4) 当 $\alpha > \beta = 1$ 时, 平衡点 $(0,0)$ 为中心。

证明 系统(1)在 $(0,0)$ 处的线性化算子为 $L(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ 1 & -\beta \end{pmatrix}$, 其特征方程为

$$\lambda^2 - (1-\beta)\lambda + (\alpha-\beta) = 0. \quad (3)$$

令 $T(\alpha) = 1-\beta$, $D(\alpha) = \alpha-\beta$, $\Delta_1 = T^2 - 4D = (1-\beta)^2 - 4(\alpha-\beta) = (\beta+1)^2 - 4\alpha$ 。

1) 当 $\alpha > \beta > 1$ 时, $T(\alpha) < 0$ 并且 $D(\alpha) > 0$ 。因此 $(0,0)$ 是局部渐近稳定的。

当 $\Delta_1 > 0$, 即 $\alpha < \frac{(\beta+1)^2}{4}$ 时, 平衡点 $(0,0)$ 为稳定的结点; 当 $\Delta_1 < 0$, 即 $\alpha > \frac{(\beta+1)^2}{4}$ 时, 平衡点 $(0,0)$ 为稳定的焦点; 当 $\Delta_1 = 0$, 即 $\alpha = \frac{(\beta+1)^2}{4}$ 时, 平衡点 $(0,0)$ 为稳定的退化结点。

2) 当 $\alpha > \beta$ 且 $\beta < 1$ 时, $T(\alpha) < 0$, $D(\alpha) > 0$ 。从而 $(0,0)$ 是不稳定的。

当 $\Delta_1 > 0$, 即 $\alpha < \frac{(\beta+1)^2}{4}$ 时, 平衡点 $(0,0)$ 为不稳定的结点; 当 $\Delta_1 < 0$, 即 $\alpha > \frac{(\beta+1)^2}{4}$ 时, 平衡点 $(0,0)$ 为不稳定的焦点; 当 $\Delta_1 = 0$, 即 $\alpha = \frac{(\beta+1)^2}{4}$ 时, 平衡点 $(0,0)$ 为不稳定的退化结点。

3) 当 $0 < \alpha < \beta$ 时, 总有 $D(\alpha) < 0$, 因此特征方程(3)总存在具正实部的特征根, 从而 $(0,0)$ 是不稳定的。此时平衡点 $(0,0)$ 为鞍点。

4) 当 $\alpha > \beta = 1$ 时, 有 $T(\alpha) = 0$, $D(\alpha) > 0$ 。平衡点 $(0,0)$ 为中心。 证毕

2.2.2 当 $0 < \alpha \leq \beta$ 时, 正平衡解 (u_1, v_1) 的稳定性、性质及分支分析 当 $0 < \alpha \leq \beta$ 时, 系统(1)有唯一的正平衡解 (u_1, v_1) 。其稳定性及分支分析的结论如下。

定理2 1) 假设 $\alpha = \beta > 0$ 成立, 若如下的任意一个条件成立, 则 (u_1, v_1) 是局部渐近稳定的: ① $\beta \geq 1$, 对所有的 $\gamma > 0$; ② $0 < \beta < 1$, 对 $\gamma^2 \in \left(\frac{\beta^2(1-\beta)}{2}, \infty \right)$; 而若如下条件成立: ③ $0 < \beta < 1$ 且 $\gamma^2 \in \left(0, \frac{\beta^2(1-\beta)}{2} \right)$, 则 (u_1, v_1) 是不稳定的。

特别地, 当 $\beta \in \left(0, \frac{2}{3} \right) \cup \left(\frac{2}{3}, 1 \right)$ 时, 曲线 $\gamma = \frac{\beta\sqrt{2(1-\beta)}}{2}$ 是 Hopf 分支曲线。在该分支曲线上, 系统在 (u_1, v_1) 附近经历了 Hopf 分支。

平衡点 (u_1, v_1) 的性质如下: (a) 当 $\beta > 2, \gamma > 0$ 时, 或 $1 \leq \beta \leq 2, 0 < \gamma^2 < \frac{\beta^2(1-\sqrt{2\beta-\beta^2})}{2}$ 时, 或 $0 < \beta < 2, \gamma^2 > \frac{\beta^2(1+\sqrt{2\beta-\beta^2})}{2}$ 时, 平衡点 (u_1, v_1) 为稳定的结点; (b) 当 $1 \leq \beta \leq 2, \frac{\beta^2(1-\sqrt{2\beta-\beta^2})}{2} < \gamma^2 < \frac{\beta^2(1+\sqrt{2\beta-\beta^2})}{2}$ 时, 或 $0 < \beta < 1, \frac{\beta^2(1-\beta)}{2} < \gamma^2 < \frac{\beta^2(1+\sqrt{2\beta-\beta^2})}{2}$ 时, 平衡点 (u_1, v_1) 为稳定的焦点; (c) 当 $1 \leq \beta \leq 2, \gamma^2 = \frac{\beta^2(1-\sqrt{2\beta-\beta^2})}{2}$ 或 $0 < \beta < 2, \gamma^2 = \frac{\beta^2(1+\sqrt{2\beta-\beta^2})}{2}$ 时, 平衡点 (u_1, v_1) 为稳定的退化结点; (d) 当 $0 < \beta < 1,$

$0 < \gamma^2 < \frac{\beta^2(1-\sqrt{2\beta-\beta^2})}{2}$ 时,平衡点 (u_1, v_1) 为不稳定的结点; (e) 当 $0 < \beta < 1, \frac{\beta^2(1+\sqrt{2\beta-\beta^2})}{2} < \gamma^2 < \frac{\beta^2(1-\beta)}{2}$ 时,平衡点 (u_1, v_1) 为不稳定的焦点; (f) 当 $0 < \beta < 1, \gamma^2 = \frac{\beta^2(1-\sqrt{2\beta-\beta^2})}{2}$ 时,平衡点 (u_1, v_1) 为不稳定的退化结点; (g) 当 $0 < \beta < 1, \gamma^2 = \frac{\beta^2(1-\beta)}{2}$ 时,平衡点 (u_1, v_1) 中心。

2) 假设 $0 < \alpha < \beta$, 若如下的任意一个条件成立, 则 (u_1, v_1) 是局部渐近稳定的: ① $\beta \geq 1$, 对所有的 $\gamma > 0$ 及 $0 < \alpha < \beta$; ② $0 < \beta < 1$, 对 $\gamma^2 \in [\beta^2 - \beta^3, \infty)$ 及 $0 < \alpha < \beta$; ③ $0 < \beta < 1$, 对 $\gamma^2 \in (0, \beta^2 - \beta^3)$ 及 $0 < \alpha < \frac{\beta^3 + 2\beta^2 + \gamma^2}{3\beta}$; ④ $0 < \beta < 1$, 对 $\gamma^2 \in \left(\frac{1}{2}(\beta^2 - \beta^3), \beta^2 - \beta^3\right)$ 及 $\frac{\beta^3 + 2\beta^2 + \gamma^2}{3\beta} < \alpha < \beta$; ⑤ $0 < \beta < 1$, 对 $\gamma^2 \in \left(0, \frac{1}{2}(\beta^2 - \beta^3)\right]$ 及 $\frac{\beta^3 + 2\beta^2 + \gamma^2}{3\beta} < \alpha < \alpha_+(\gamma, \beta)$; 而若如下条件成立: ⑥ $0 < \beta < 1$, 对 $\gamma^2 \in \left(0, \frac{1}{2}(\beta^2 - \beta^3)\right]$ 及 $\alpha_+(\gamma, \beta) < \alpha < \beta$, 则 (u_1, v_1) 是不稳定的。

特别地, $\alpha = \alpha_+(\gamma, \beta)$ 是 Hopf 分支曲线。在该分支曲线上, 系统在 (u_1, v_1) 附近经历了 Hopf 分支。

证明 1) 假设 $\alpha = \beta > 0$ 成立。系统在 (u_1, v_1) 处的线性化算子为 $L = L(\beta) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2\gamma^2}{\beta^2} & -\beta + \frac{\gamma^2}{\beta} \\ 1 & -\beta \end{pmatrix}$, 其特征方

程为 $\lambda^2 - T(\beta)\lambda + D(\beta) = 0$ 。这里, $T(\beta) := 1 - \beta - \frac{2\gamma^2}{\beta^2} = \frac{\beta^2 - \beta^3 - 2\gamma^2}{\beta^2}$, $D(\beta) := \frac{\gamma^2}{\beta} > 0$, $\Delta_2 = T^2 - 4D = \left(\frac{\beta^2 - \beta^3 - 2\gamma^2}{\beta^2}\right)^2 - \frac{4\gamma^2}{\beta} = \left(\frac{2\gamma^2}{\beta^2} - 1\right)^2 + \beta^2 - 2\beta$ 。

① 若 $\beta \geq 1$ 成立, 则对所有的 $\gamma > 0$, 均有 $T(\beta) < 0$ 及 $D(\beta) > 0$, 此时, (u_1, v_1) 是局部渐近稳定的。

当 $\beta > 2, \gamma > 0$ 时, 或 $1 \leq \beta \leq 2, 0 < \gamma^2 < \frac{\beta^2(1-\sqrt{2\beta-\beta^2})}{2}$ 或 $\gamma^2 > \frac{\beta^2(1+\sqrt{2\beta-\beta^2})}{2}$ 时, 有 $\Delta_2 > 0$, 平衡点 (u_1, v_1) 为稳定的结点;

当 $1 \leq \beta \leq 2, \frac{\beta^2(1-\sqrt{2\beta-\beta^2})}{2} < \gamma^2 < \frac{\beta^2(1+\sqrt{2\beta-\beta^2})}{2}$ 时, 有 $\Delta_2 < 0$, 平衡点 (u_1, v_1) 为稳定的焦点;

当 $1 \leq \beta \leq 2, \gamma^2 = \frac{\beta^2(1-\sqrt{2\beta-\beta^2})}{2}$ 或 $\gamma^2 = \frac{\beta^2(1+\sqrt{2\beta-\beta^2})}{2}$ 时, 有 $\Delta_2 = 0$, 平衡点 (u_1, v_1) 为稳定的退化结点。

② 若 $0 < \beta < 1$ 且 $\gamma^2 > \frac{\beta^2(1-\beta)}{2}$ 成立, 则有 $T(\beta) < 0$ 及 $D(\beta) > 0$, 此时, (u_1, v_1) 是局部渐近稳定的。

当 $\gamma^2 > \frac{\beta^2(1+\sqrt{2\beta-\beta^2})}{2}$ 时, 有 $\Delta_2 > 0$, 平衡点 (u_1, v_1) 为稳定的结点;

当 $\frac{\beta^2(1-\beta)}{2} < \gamma^2 < \frac{\beta^2(1+\sqrt{2\beta-\beta^2})}{2}$ 时, 有 $\Delta_2 < 0$, 平衡点 (u_1, v_1) 为稳定的焦点;

当 $\gamma^2 = \frac{\beta^2(1+\sqrt{2\beta-\beta^2})}{2}$ 时, 有 $\Delta_2 = 0$, 平衡点 (u_1, v_1) 为稳定的退化结点。

③ 若 $0 < \beta < 1$ 且 $\gamma^2 < \frac{\beta^2(1-\beta)}{2}$ 成立, 则有 $T(\beta) > 0$ 及 $D(\beta) > 0$, 此时, (u_1, v_1) 是不稳定的。

当 $0 < \gamma^2 < \frac{\beta^2(1-\sqrt{2\beta-\beta^2})}{2}$ 时, 有 $\Delta_2 > 0$, 平衡点 (u_1, v_1) 不稳定的结点;

当 $\frac{\beta^2(1-\sqrt{2\beta-\beta^2})}{2} < \gamma^2 < \frac{\beta^2(1-\beta)}{2}$ 时, 有 $\Delta_2 < 0$, 平衡点 (u_1, v_1) 为不稳定的焦点;

当 $\gamma^2 = \frac{\beta^2(1-\sqrt{2\beta-\beta^2})}{2}$ 时, 有 $\Delta_2 = 0$, 平衡点 (u_1, v_1) 为不稳定的退化结点。

④ 若 $0 < \beta < 1$ 且 $\gamma^2 = \frac{\beta^2(1-\beta)}{2}$ 成立, 亦即 $\beta = \beta_{\pm}(\gamma)$ 时, 有 $T(\beta_{\pm}(\gamma)) = 0$ 及 $D(\beta_{\pm}(\gamma)) > 0$, 并且

$\left. \frac{dT(\beta)}{d\beta} \right|_{\beta=\beta_{\pm}(\gamma)} = -1 + \frac{4\gamma^2}{\beta_{\pm}^3(\gamma)}$, 当 $\beta \neq \frac{2}{3}$ 时, $\left. \frac{dT(\beta)}{d\beta} \right|_{\beta=\beta_{\pm}(\gamma)}$ 是非零的, 此时“横截条件”成立。由文献[6]知, 在

(u_1, v_1) 附近, $\gamma = \frac{\beta\sqrt{2(1-\beta)}}{2}$ 为 Hopf 分支曲线, 其中 $\beta \in \left(0, \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}, 1\right)$ 。在分支曲线上, 系统在 (u_1, v_1) 附近经历了 Hopf 分支。此时, 平衡点 (u_1, v_1) 为中心。

2) 假设 $0 < \alpha < \beta$ 成立。系统在 (u_1, v_1) 处的线性化算子为

$$L(\alpha) = \begin{pmatrix} \frac{-2\beta^2 - \gamma^2 + 3\alpha\beta - \gamma\sqrt{\gamma^2 - 4\alpha\beta + 4\beta^2}}{\beta^2} & -\alpha + \frac{\gamma^2 + \gamma\sqrt{\gamma^2 - 4\alpha\beta + 4\beta^2}}{2\beta} \\ 1 & -\beta \end{pmatrix},$$

其特征方程为 $\lambda^2 - T(\alpha)\lambda + D(\alpha) = 0$, 这里:

$$\begin{aligned} T(\alpha) &= -\frac{\beta^3 + 2\beta^2 - 3\alpha\beta + \gamma^2 + \gamma\sqrt{\gamma^2 - 4\alpha\beta + 4\beta^2}}{\beta^2}, \\ D(\alpha) &= \frac{\gamma^2 - 4\alpha\beta + 4\beta^2 + \gamma\sqrt{\gamma^2 - 4\alpha\beta + 4\beta^2}}{2\beta} (> 0). \end{aligned} \quad (4)$$

由 $D(\alpha) > 0$ 可知, (u_1, v_1) 的稳定性取决于 $T(\alpha)$ 的符号。下面研究 $T(\alpha)$ 何时大于、等于或小于零。通过推导可知, $T(\alpha) = 0$ 等价于 $\sum(\alpha) = 9\beta\alpha^2 - [6\beta^2(\beta + 2) + 2\gamma^2]\alpha + \beta^2[\beta(\beta + 2)^2 + 2\gamma^2] = 0$, 其判别式为 $\Delta = \gamma^2 + 12\beta^2 - 12\beta^3$ 。

首先, 考虑判别式 $\Delta < 0$ 的情形, 亦即

$$\gamma^2 < 12\beta^3 - 12\beta^2 \text{ 且 } \beta > 1. \quad (5)$$

如果 $\Delta < 0$, 则 $\sum(\alpha) = 0$ 无解。易于验证: 此时, 对于所有的 $\alpha > 0$, $\sum(\alpha) > 0$, 亦即:

$$(\beta^3 + 2\beta^2 - 3\alpha\beta + \gamma^2)^2 > (\gamma\sqrt{\gamma^2 - 4\alpha\beta + 4\beta^2})^2. \quad (6)$$

当 $\sum(\alpha) > 0$ 时, $T(\alpha) = 0$ 无解, 此时需要判断 $T(\alpha)$ 取值的正负性。

由(4)式可知: 若 $\beta^3 + 2\beta^2 - 3\alpha\beta + \gamma^2 > 0$ 成立, 则 $T(\alpha) < 0$, 此时, (u_1, v_1) 是局部渐近稳定的;

若 $\beta^3 + 2\beta^2 - 3\alpha\beta + \gamma^2 < 0$ 成立, 则由(4)、(6)式可知 $T(\alpha) > 0$ 。下面证明 $\beta^3 + 2\beta^2 - 3\alpha\beta + \gamma^2 < 0$ 不可能成立。

事实上, 若 $\beta^3 + 2\beta^2 - 3\alpha\beta + \gamma^2 < 0$ 成立, 则有 $\alpha > \frac{\beta^3 + 2\beta^2 + \gamma^2}{3\beta}$ 。

由假设 $0 < \alpha < \beta$, 有 $\frac{\beta^3 + 2\beta^2 + \gamma^2}{3\beta} < \beta$ 这意味着 $\gamma^2 < \beta^2 - \beta^3$ 且 $\beta < 1$ 。然而这与 $\Delta < 0$ 相矛盾。故 $\beta^3 + 2\beta^2 - 3\alpha\beta + \gamma^2 > 0$ 成立, 从而 $T(\alpha) < 0$ 。

其次, 考虑判别式 $\Delta \geq 0$ 的情形, 即 $0 < \beta < 1$, 或 $\beta \geq 1$ 且 $\gamma^2 \geq 12(\beta^3 - \beta^2)$ 成立。

如果 $\Delta \geq 0$ 成立, 则 $\sum(\alpha) = 0$ 有两个正解:

$$\alpha_{\pm} = \alpha_{\pm}(\beta, \gamma) = \frac{6\beta^2 + \gamma^2 + 3\beta^3 \pm \gamma\sqrt{\gamma^2 + 12\beta^2 - 12\beta^3}}{9\beta} > 0 \quad (7)$$

若 $\beta \geq 1$ 且 $\gamma^2 \geq 12(\beta^3 - \beta^2)$, 则有 $\frac{\beta^3 + 2\beta^2 + \gamma^2}{3\beta} > \beta$ 。从而, $\frac{\beta^3 + 2\beta^2 + \gamma^2}{3\beta} > \beta > \alpha$ 。这意味着 $\beta^3 + 2\beta^2 - 3\alpha\beta + \gamma^2 > 0$, 由

(4)式, $T(\alpha) < 0$ 。结合(5)式, 证明了 2) 下面的①。

若 $\gamma^2 \geq \beta^2 - \beta^3$ 且 $0 < \alpha < \beta < 1$ 成立, 则有 $T(\alpha) < 0$ 。事实上, 如果 $\gamma^2 \geq \beta^2 - \beta^3$ 且 $0 < \alpha < \beta < 1$, 则有

$\frac{\beta^3 + 2\beta^2 + \gamma^2}{3\beta} \geq \beta > \alpha$, 从而 $\beta^3 + 2\beta^2 - 3\alpha\beta + \gamma^2 > 0$, 由(4)式, $T(\alpha) < 0$ 。从而证明了 2) 下面的②。

若 $0 < \beta < 1$, $0 < \gamma^2 < \beta^2 - \beta^3$ 且 $0 < \alpha < \frac{\beta^3 + 2\beta^2 + \gamma^2}{3\beta}$ 成立, 则有 $T(\alpha) < 0$ 。事实上, $\beta^3 + 2\beta^2 - 3\alpha\beta + \gamma^2 > 0 \Leftrightarrow$

$0 < \alpha < \frac{\beta^3 + 2\beta^2 + \gamma^2}{3\beta}$ 。从而 $\beta^3 + 2\beta^2 - 3\alpha\beta + \gamma^2 > 0$, 由(4)式, $T(\alpha) < 0$ 。从而证明了 2) 下面的③。

若 $0 < \beta < 1, \frac{\beta^2 - \beta^3}{2} < \gamma^2 < \beta^2 - \beta^3$ 且 $\frac{\beta^3 + 2\beta^2 + \gamma^2}{3\beta} < \alpha < \beta$ 成立, 则 $T(\alpha) < 0$ 。事实上, 由 $\Delta \geq 0$ 可知(7)中式定

义的 $\alpha_{\pm}(\beta, \gamma)$ 存在。由于 $\alpha_-(\beta, \gamma) < \frac{\beta^3 + 2\beta^2 + \gamma^2}{3\beta} < \alpha < \beta < \alpha_+(\beta, \gamma)$, 从而 $\beta^3 + 2\beta^2 - 3\alpha\beta + \gamma^2 < 0$, 但 $\sum(\alpha) < 0$, 则由(4)式, $T(\alpha) < 0$ 。从而证明了 2) 下面的④。

由于 $0 < \beta < 1$ 时, $\beta^2 - \beta^3 > 0$ 。故对所有的 $0 < \alpha < \beta$ 可以验证 $\frac{\beta^3 + 2\beta^2 + \gamma^2}{3\beta} > \alpha_-(\beta, \gamma)$ 并且

$$\begin{cases} \frac{\beta^3 + 2\beta^2 + \gamma^2}{3\beta} < \alpha_+(\beta, \gamma) \Leftrightarrow \gamma^2 < 4\beta^2 - 4\beta^3, \\ \alpha_+(\beta, \gamma) < \beta \Leftrightarrow \beta < 1, 0 < \gamma^2 < \frac{\beta^2 - \beta^3}{2}. \end{cases}$$

通过上面的分析, 若 $0 < \beta < 1$ 及 $\gamma^2 < \frac{\beta^2(1-\beta)}{2}$ 成立, 显然有 $\frac{\beta^3 + 2\beta^2 + \gamma^2}{3\beta} < \alpha_+(\beta, \gamma) < \beta$ 。

当 $\frac{\beta^3 + 2\beta^2 + \gamma^2}{3\beta} < \alpha < \alpha_+(\beta, \gamma)$ 时, 有 $\beta^3 + 2\beta^2 - 3\alpha\beta + \gamma^2 < 0$ 及 $(\beta^3 + 2\beta^2 - 3\alpha\beta + \gamma^2)^2 < (\gamma\sqrt{\gamma^2 - 4\alpha\beta + 4\beta^2})^2$ 。即

由(4)式, $T(\alpha) < 0$ 。即证明了 2) 下面的⑤。

当 $\alpha_+(\beta, \gamma) < \alpha < \beta$, 可以得到 $\sum(\alpha) > 0$, 故有 $T(\alpha) > 0$ 。从而证明了 2) 下面的⑥。

在 $0 < \beta < 1$ 的情况下, $\Delta = \gamma^2 + 12\beta^2 - 12\beta^3 > 0$ 且当 $\alpha = \alpha_+(\beta, \gamma)$ 时, 有 $\sum(\alpha_+(\beta, \gamma)) = 0, D(\alpha_+(\beta, \gamma)) > 0$ 。

故有 $T(\alpha_+(\beta, \gamma)) = 0, D(\alpha_+(\beta, \gamma)) > 0$ 。并且 $\frac{dT(\alpha)}{d\alpha} \Big|_{\alpha=\alpha_+(\beta, \gamma)} = \frac{3\sqrt{\gamma^2 - 4\alpha_+(\beta, \gamma)\beta + 4\beta^2} + 2\gamma}{\beta\sqrt{\gamma^2 - 4\alpha_+(\beta, \gamma)\beta + 4\beta^2}} > 0$ 。显然是非零的, 此时“横截条件”成立。由文献[7], 在 (u_1, v_1) 附近, $\alpha = \alpha_+(\beta, \gamma)$ 为 Hopf 分支曲线。在分支曲线上, 系统在 (u_1, v_1) 附近经历了 Hopf 分支。

注 1 当 $0 < \alpha < \beta$ 时, (u_1, v_1) 的性质与 $0 < \alpha = \beta$ 时, (u_1, v_1) 的性质讨论方法相同, 但表达式更繁杂。

2.2.3 当 $\beta < \alpha \leq \beta + \frac{\gamma^2}{4\beta}$ 时, (u_1, v_1) 和 (u_2, v_2) 的稳定性分析 当 $\beta < \alpha \leq \beta + \frac{\gamma^2}{4\beta}$ 时, $(u_1, v_1), (u_2, v_2)$ 是系统(1)的两个正平衡解, 其稳定性结论如下。

定理 3 假设 $\beta < \alpha \leq \beta + \frac{\gamma^2}{4\beta}$ 成立。1) 若如下的任意一个条件成立, 则正平衡解 (u_1, v_1) 是局部渐近稳定的:

- ① $\beta \geq 1$, 对所有的 $\gamma > 0$ 及 $\beta < \alpha \leq \beta + \frac{\gamma^2}{4\beta}$; ② $0 < \beta < 1$, 对 $\gamma^2 \in [4(\beta^2 - \beta^3), \infty)$ 及 $\beta < \alpha \leq \beta + \frac{\gamma^2}{4\beta}$; ③ $0 < \beta < 1$, 对 $\gamma^2 \in (\beta^2 - \beta^3, 4(\beta^2 - \beta^3))$ 及 $\beta < \alpha < \alpha_+(\beta, \gamma)$; ④ $0 < \beta < 1$, 对 $\gamma^2 \in \left(\frac{\beta^2 - \beta^3}{2}, \beta^2 - \beta^3\right)$ 及 $\beta < \alpha < \alpha_+(\beta, \gamma)$ 。

然而, 如果⑤ $0 < \beta < 1$, 对 $\gamma^2 \in (0, 4(\beta^2 - \beta^3))$ 及 $\alpha_+(\gamma, \beta) < \alpha \leq \beta + \frac{\gamma^2}{4\beta}$, 则平衡解 (u_1, v_1) 是不稳定的。特别地, $\alpha = \alpha_+(\gamma, \beta)$ 是 Hopf 分支曲线。在该分支曲线上, 系统在 (u_1, v_1) 附近经历了 Hopf 分支。

2) 正平衡解 (u_2, v_2) 总是不稳定的。

由于此定理的证明与定理 1 相似, 因此省去相关的证明。

注 2 当 $\beta < \alpha \leq \beta + \frac{\gamma^2}{4\beta}$ 时, (u_1, v_1) 的性质同样与 $0 < \alpha = \beta$ 时, (u_1, v_1) 的性质讨论方法相同, 但表达式很繁杂。

2.3 平衡点处的参数平面分支图

在 $(0, 0)$ 处, 以及当 $0 < \alpha = \beta$ 时, (u_1, v_1) 处的参数平面分支图分别如图 1、图 2。

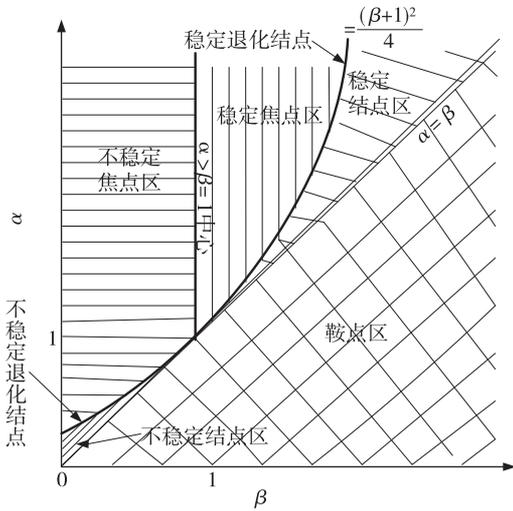


图1 (0,0)处的参数平面分支图

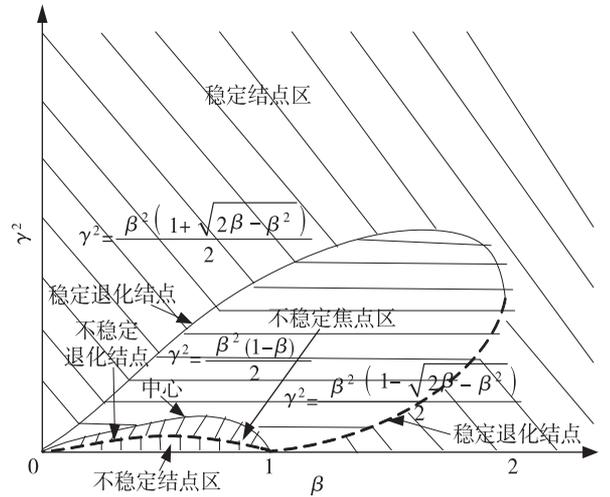


图2 0 < alpha = beta 时, (u1, v1) 处的参数平面分支图

参考文献:

[1] Duet V, Boissonade J. Dynamics of Turing pattern monolayers close to onset[J]. Physical Review E, 1995, 53(5): 4883-4892.

[2] Murray J D. Mathematical Biology[M]. 3rd. Berlin: Springer, 2002.

[3] Fujii H, Mimura M, Nishiura Y. A picture of the global bifurcation diagram in ecological interacting and diffusing systems[J]. Physica D: Nonlinear Phenomena, 1982, 5(1): 1-42.

[4] Kapral R, Showalter K. Chemical waves and patterns[M]. Berlin: Kluwer Academic Publishers, 1995: 221-268.

[5] Yi F, Wei J, Shi J. Diffusion-driven instability and bifurca-

tion in the Lengyel-Epstein system[J]. Nonlinear Analysis Real World Applications, 2008, 9(3): 1038-1051.

[6] 李坤琼, 刘双, 朱长荣. 一类新三维混沌系统的脉冲控制和 Hopf 分支[J]. 四川师范大学学报: 自然科学版, 2013, 36(5): 708-711.

Li KQ, Liu S, Zhu CR. Impulsive control and Hopf bifurcation of a new three-dimensional chaotic system[J]. Journal of Sichuan Normal University: Natural Science, 2013, 36(5): 708-711.

[7] Wiggins S. Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos[M]. 2nd. New York: Springer, 2003.

Stability and Bifurcation Analysis in a Kind of Boissonade Model

ZHANG Ying, YANG Yu, YI Fengqi

(College of Science, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China)

Abstract: In this paper, a kind of Boissonade model describing the formation of Turing patterns is investigated. Firstly, we consider the existence of the positive equilibrium solution. Secondly, we study the stability of the nonnegative equilibrium solutions and the existence of Hopf bifurcation near the positive equilibrium solution. Finally, we investigate the property of the equilibrium solution and provide bifurcation diagram in the parameter plane.

Key words: formation of Turing patterns; Boissonade model; stability; Hopf bifurcation

(责任编辑 黄颖)